FRANCESCO SEVERI

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE

A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume primo

1900-1908

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1971



Francesco Severi

111076

510.8 S498

FRANCESCO SEVERI

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE

A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume primo

1900-1908

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1971

SCUOLA NORMALE SUPERIORE · PISA · BIBLIOTECA ·

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI

ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

ROMA, 1971 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei

PREFAZIONE

Il presente vol. I delle Opere matematiche *di* FRANCESCO SEVERI *esce a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei, a poco meno di dieci anni dalla scomparsa del grande scienziato. Dette opere appariranno così distribuite cronologicamente in sei volumi, da esse venendo esclusi gli scritti di carattere non matematico, nonché la riproduzione di libri, conferenze e di alcuni lavori minori.*

Va rammentato che, fin dal 1949, era stato costituito un « Comitato Nazionale per le Onoranze a Francesco Severi », il quale si proponeva di pubblicare una raccolta di Memorie Scelte *di quell'A., raggruppate per argomenti in quattro volumi. Il primo di tali volumi vide la luce a cura di Beniamino Segre nel 1950, in occasione del giubileo del Severi, corredato da pregevoli note e commenti dello stesso Severi; ma l'iniziativa non ebbe poi altro seguito per disparati motivi.*

Nel 1962, a pochi mesi dalla scomparsa del Severi, l'Istituto Nazionale di Alta Matematica, che il Severi aveva fondato e presieduto fino alla morte, contemplò la possibilità di condurre a termine quell'impresa: il che non poté poi aver luogo a cagione della crisi tosto insorta in detto Istituto.

La questione venne ripresa dall'Unione Matematica Italiana nel 1965, con la nomina di una Commissione di Studio per la stampa delle opere di Severi composta dai professori G. DANTONI, E. MARCHIONNA, E. MARTINELLI, U. MORIN, B. SEGRE, G. ZAPPA, O. ZARISKI, *ai quali vennero in seguito aggiunti* A. ANDREOTTI, W. GRÖBNER, E. KÄHLER, E. VESENTINI *e poi ancora* F. GHERARDELLI, M. ROSATI *e* C. MARCHIONNA–TIBILETTI. *La Commissione elesse a suo Presidente il prof.* SEGRE *ed a Direttore della pubblicazione il prof.* VESENTINI, *al quale nel 1969 succedette il prof.* MARTINELLI *in seguito alla rinuncia del Vesentini.*

La Commissione espresse il parere, fatto poi suo dalla Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana, che le Opere di Francesco Severi venissero pubblicate dall'Accademia Nazionale dei Lincei. E questa ben volentieri si assunse tale compito non lieve, in segno di omaggio alla memoria di uno dei suoi Soci più illustri e conscia di render così un importante servigio alla scienza.

A queste Opere matematiche *è premesso il discorso commemorativo su* FRANCESCO SEVERI *tenuto da Beniamino Segre il 15 dicembre 1962 di fronte alle Accademie dei Lincei e dei XL. Nelle* Opere *è stato preferito l'ordine cronologico, come quello che non presenta incertezze e che rende più semplici i raffronti con la Bibliografia posta al termine della suddetta Commemorazione; d'altro canto, alla fine dell'ultimo volume figureranno diversi indici, fra cui uno per materie, i quali agevoleranno la consultazione.*

I lavori qui pubblicati riproducono fedelmente gli originali, ed includono quelli inseriti nel vol. I delle già citate Memorie Scelte, comprese le postille a firma del Severi stesso che ivi compaiono.

FRANCESCO SEVERI (*)

È trascorso quasi esattamente un anno dacchè, l'8 dicembre 1961, FRANCESCO SEVERI cessava ottantaduenne la sua vita terrena, lasciando un vuoto incolmabile nella matematica italiana. Vegeto ed estremamente attivo fino ad oltre i settantacinque anni, venne poi colpito da una serie di malattie che lo costrinse a letto per più di quattro anni e di cui non ebbero ragione ben cinque interventi chirurgici. Il suo nome trovasi già collocato nella storia, accanto a quelli dei grandi uomini di scienza.

Era nato il 13 aprile 1879 in Arezzo, da famiglia di patrioti: e verso la terra natìa e la gente aretina egli conservò fin all'ultimo un attaccamento profondo, riconoscendo di aver tratto le migliori qualità di fantasia e chiarezza da quelle aure leggere e frizzanti e di essersi formato sull'esempio dei maggiori fra i suoi concittadini. Genialmente dedito alla scienza, come LUCA PACIOLI, PIERO DELLA FRANCESCA, CESALPINO, REDI, FOSSOMBRONI, ebbe invero universalità d'interessi e lati aspri e ferrigni come MICHELANGELO, e la lingua — a seconda delle circostanze — tagliente ed incisiva come quella dell'ARETINO o ricca ed armoniosa come quella del PETRARCA; pregiatore della cultura come MECENATE e delle arti come MARGARITONE, GUIDO MONACO, SPINELLO, PIERO DELLA FRANCESCA, VASARI, SIGNORELLI e MASACCIO, si mostrò pronto al sacrificio come il vescovo GUGLIELMINO DEGLI UBERTI, caduto a Campaldino nella cruenta battaglia contro i fiorentini.

Ma fu soprattutto ai genitori, entrambi da lui svisceratamente amati ed ammirati, ch'egli dovette i tratti più caratteristici della sua spiccata, singolare personalità.

I SEVERI, come pure gli antenati materni, avevano abbandonato il lavoro dei campi da forse non più di due generazioni per dedicarsi agli studi e alle professioni; ma la nonna paterna proveniva dall'antica e nobile famiglia dei GHERARDI di Borgo Sansepolcro, ed era stata sorella di quel FRANCESCO GHERARDI DRAGOSANNI che fu col GUERRAZZI nel governo provvisorio della Toscana e ch'ebbe a sfuggire agli Austriaci con una navicella da pesca nel 1849, per approdare esule a Costantinopoli, dove morì di colera nel 1855.

Il padre COSIMO fu ufficiale garibaldino e combattè le battaglie dell'indipendenza insieme a tre fratelli, come lui volontari sotto le insegne dell'eroe

(*) Commemorazione tenuta da BENIAMINO SEGRE il 15 dicembre 1962 di fronte alle Accademie dei Lincei e dei XL; pubblicata negli « Annali di Matematica Pura e Applicata », (4) *61* (1963), pp. I–XXXVI.

dei due mondi; acceso repubblicano, prese poi parte alle lotte politiche dal 1876 al 1885, talora scendendo anche sul terreno con qualche avversario, secondo i costumi del tempo. In mezzo alla pratica professionale di notaio, scriveva e pubblicava apprezzate poesie, inni ed epigrafi. Da lui il Nostro fin da fanciullo trasse, oltre alla combattività ed al gusto per le lettere, l'amore appassionato della Patria congiunto ad un senso religioso e quasi spartano del dovere.

Dalla madre LICINIA CAMBI, donna di elevati sentimenti religiosi, laboriosa, parsimoniosa, piena di previdente saggezza e di riservata affettuosità, tenace, coraggiosa e di forte volontà anche se in apparenza remissiva, egli ereditò varie doti del suo complesso temperamento, in parte contrastanti con quelle trasmessegli dal padre.

Fu ultimo di nove figli, ma non il beniamino della famiglia; e crebbe in un ambiente austero, alieno da ogni manifestazione esterna di affetto, dove il padre si vedeva poco, parlava poco, dava soprattutto degli ordini. Nume della casa era invece il primogenito, maggiore del Nostro di 15 anni, adorato, riverito, viziato: il quale però, dopo un'esistenza burrascosa per sè e per gli altri, emigrò a Buenos Aires distaccandosi completamente dalla famiglia. Afflitto, oppresso e scoraggiato da tale grave delusione e poi da un lieve momentaneo imbarazzo finanziario, il padre si tolse con atto impulsivo la vita il 4 gennaio 1889.

Quattro dei figli essendo premorti, il Nostro — non ancora decenne — ebbe così a ritrovarsi solo con la mamma e tre sorelle, la maggiore delle quali — di appena diciannove anni — stava compiendo gli studi a Roma per conseguire un diploma d'abilitazione all'insegnamento secondario. La vita — dopo la tremenda sciagura — lentamente riprese scorrendo grigia, amara e difficile, anche per le misere condizioni economiche in cui ora veniva a svolgersi. La mamma, infatti, poteva soltanto contare su di una pensioncina che, detratte le tasse, ammontava ad un'unica lira al giorno; essa non volle però chiedere nulla a nessuno e, con forte impegno ed amorevole dedizione seppe completare degnamente l'educazione dei figli rimasti, esigendo ed ottenendo da loro ferrea disciplina e spirito di sacrificio.

Il piccolo FRANCESCO fu acutamente colpito dalla disgrazia, riportandone impressioni e facendo quindi anzitempo esperienze che dovevano influire su di lui per tutta la vita. A dieci anni, il giorno della sua licenza elementare — ottenuta con plauso — la gioia gli si stemperò in tristezza, e lo ritrovarono solo in un terrazzo che recitava ad alta voce « I sepolcri » di FOSCOLO. Poco appresso, non ancora dodicenne, volendo in qualche modo contribuire al magro bilancio familiare, principiò a far da ripetitore di tutte le materie a compagni di scuola ed anche a ragazzi più avanzati, proseguendo poi alacremente tale poco allegra attività per lunghi anni — in quelle ch'erano per gli altri le vacanze e nelle ore lasciategli libere dalle occupazioni scolastiche — fino al conseguimento della laurea.

Gli individui, come i popoli, si rafforzano più nella sventura che negli agi. E fu attraverso a tali asperità che il Nostro riuscì a forgiarsi una cultura

generale varia ed ampia, e che la sua volontà si temprò, diventando tenace ed adamantina, e la sua forza e capacità di lavoro raggiunse livelli e si creò abiti del tutto inconsueti, tanto da fargli esclamare scherzosamente — ancora in anni recenti — ch'egli poteva ben dirsi condannato ai lavori forzati a vita. Da quegli anni difficili gli restò inoltre per sempre una parsimonia ed un tenore di vita austero, unitamente ad una serietà di propositi, ad un'oculatezza e ad una severità di giudizio, ch'egli esercitava rigidamente su se medesimo prima ancora che sugli altri.

Terminati brillantemente gli studi secondari all'Istituto Tecnico di Arezzo nel 1896, SEVERI potè proseguire all'Università avendo ottenuto per concorso una borsa (di sole 600 lire annue!) della benemerita Fraternità dei Laici, fondata nel secolo XIII dal ricordato vescovo GUGLIELMINO. Egli si iscrisse all'Università di Torino col proposito di laurearsi in Ingegneria, perché questo era il destino che da fanciullo gli aveva assegnato suo padre. Ma i suoi professori lo persuasero a deviare dagli studi d'ingegneria a quelli di matematica, esprimendo un giudizio totalmente opposto a quello del suo primo insegnante di matematica nelle scuole secondarie, il quale l'aveva erroneamente ritenuto un inetto sgobbone. In base alle norme allora vigenti, onde poter accedere alla laurea in matematica pura egli dovette sostenere esami suppletivi di latino ed italiano: ma si dolse poi sempre che gli fosse mancato il latino nella scuola secondaria, pur avendo successivamente cercato in tutti i modi e faticosamente di colmare da sé tale lacuna.

In quegli anni, nel firmamento matematico torinese, brillavano astri di prima grandezza quali CORRADO SEGRE, GIUSEPPE PEANO, VITO VOLTERRA. Il Nostro fu subito attratto dalla suggestiva personalità del primo, allora nel pieno rigoglio delle sue forze creatrici, subendone il paterno influsso nei modi cui egli stesso doveva poco appresso alludere nella seguente dedica di un suo aureo volume: «A - CORRADO SEGRE - Maestro incomparabile - che con assidua cura - m'educò l'intelletto - alle severe indagini della scienza - questo libro dedico - elevando il cuore - ai più alti sentimenti filiali - nel ricordo caro e venerato - di mio Padre».

È invero principalmente dal SEGRE che SEVERI derivò l'interessamento alle questioni algebriche e numerative, accompagnato da un largo eclettismo geometrico e da una raffinata destrezza nel campo proiettivo iperspaziale. Delle sue eccellenti disposizioni alla geometria aveva dato prova fin da studente, facendo stampare ad Arezzo nel 1898 — di sua iniziativa — un'elegante estensione dei teoremi di PASCAL e di BRIANCHON, di cui aveva avuto improvvisa intuizione mentre a teatro ascoltava la musica d'un'opera. Egli non sapeva allora che l'estensione era nota; ma ebbe in tal guisa a dimostrare la precocità del suo ingegno e l'interessamento per un ramo al quale doveva in seguito arrecare contributi ben più salienti.

Si laureò a Torino col SEGRE il 30 giugno 1900, discutendo una pregevolissima tesi «Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio», accolta l'anno appresso nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Ivi difficili problemi di geometria numerativa vengono risolti mediante un inge-

gnoso sistematico impiego del metodo funzionale di CAYLEY, e con l'originale intervento di proprietà differenziali nella riduzione di quelli ad opportuni casi speciali.

Venne quindi subito assunto quale assistente a Torino da ENRICO D'OVIDIO, uomo di stampo antico, ch'era stato maestro del SEGRE ed aveva compiuto illuminata opera di precursore nell'ambito iperspaziale. Questi però, alla fine dell'anno accademico 1900–1901, ebbe a manifestargli il suo malcontento ed a licenziarlo dal posto di assistente, per essersi il SEVERI nel frattempo sposato a sua insaputa. Il Nostro, infatti, il 10 ottobre 1900 s'era unito in matrimonio con ROSANNA ORLANDINI, amica di fanciullezza e da qualche anno a lui fidanzata. Creatura di grande intelletto e nobile cuore, essa doveva poi essergli inseparabile affettuosa compagna per 52 anni, sorreggendolo e spesso guidandolo nelle alterne vicende della vita con profondo senso di maternità.

Il SEVERI, lasciata così Torino per Bologna e poi per Pisa, dove fu successivamente assistente dell'ENRIQUES e del BERTINI nel 1902 e nel 1903, conseguì la libera docenza nel 1902, intensificando ed elevando la sua pure già notevolissima attività di studioso e di ricercatore, con l'arduo proposito d'inserirsi decisamente in un nuovo difficile campo che da qualche anno veniva fiorendo in Italia: la geometria sopra una superficie albebrica. «Mi gettai « al lavoro con tale ardore » — lasciò scritto — « che dopo un anno di este- « nuante occupazione per concentrare il pensiero sull'obiettivo delle mie « ricerche, per assimilare cognizioni nuove e familiarizzarmi col loro uso, « mi ero stancato talmente da sentirmi scoraggiato, nel timore che le forze « non mi bastassero al compito prefissomi. In quello stato d'animo, bisognoso « com'ero di riposo e di trovare incoraggiamento nel calore amoroso della « famiglia, prezioso e risolutivo mi fu l'ausilio equilibrato e confortevole della « mia diletta Compagna, la quale si rese subito conto del come deve essere « trattato, e spesso perfino compatito, uno studioso. Così riuscii a superare « la crisi e cominciare a camminare spedito per la mia strada ».

In tale inizio felice egli venne senza dubbio assai agevolato dai frequenti personali contatti coi due grandi Maestri ENRIQUES e BERTINI, specie da quelli con l'ENRIQUES, che fu uno dei creatori della Scuola algebrico-geometrica italiana. Ma fu specialmente in se stesso ch'egli seppe trovare impensate risorse, raggiungenti talora il subitaneo folgoreggiare del genio. «Mi stavo occupando da qualche anno » — egli ebbe poi a narrare — « di una questione « controversa, che era da tempo all'ordine del giorno, per l'ulteriore sviluppo « della geometria algebrica, alla quale ho dato la maggior parte dei miei con- « tributi; avevo allora terminato un libro scolastico e in un pomeriggio della « soffocante estate pisana mi ero sdraiato un poco sul letto, per trovare riposo « e difesa dal caldo. Invece la mente ritornò subito, senza che la volontà « c'entrasse per nulla, alla questione controversa, alla quale ho accennato « sopra. Improvvisamente riaffiorò alla mia memoria un calcolo fatto molti « mesi prima, al quale lì per lì non avevo attribuito importanza, ai fini che « mi proponevo. Mi balzò all'improvviso al cervello l'idea che quel calcolo

« contenesse già la chiave per la risoluzione della questione. In quelle con-
« dizioni di spirito, mi precipitai dal letto e cercai affannosamente il foglietto,
« vecchio di mesi. Era effettivamente così, come avevo intuito. La sera stessa
« potei spedire una Nota accademica ai Lincei, con la risoluzione dell'annosa
« questione ». Si tratta della Nota uscita nel volume 13° del 2° semestre 1904 dei nostri Rendiconti; essa venne sviluppata in un'ampia Memoria apparsa l'anno seguente nei «Mathematische Annalen », la quale segna una pietra miliare nello studio delle superficie algebriche dal punto di vista trascendente.

Questo e numerosi altri smaglianti successi gli valsero presto i più alti ed ambiti riconoscimenti. Conquistato in quello stesso anno 1904 — a soli 25 anni — l'ordinariato in Geometria proiettiva e descrittiva nell'Università di Parma, d'onde passò l'anno appresso a quella di Padova, ebbe nel 1906 la medaglia d'oro della Società dei XL e nel 1908 la medaglia d'oro Guccia, conferitagli a Roma dal IV Congresso internazionale dei matematici su relazione di MAX NOETHER, HENRI POINCARÉ e CORRADO SEGRE. Nel 1907, una importante Memoria sua e dell'ENRIQUES sulla teoria delle superficie iperellittiche valse ai due autori il Premio Bordin dell'Accademia delle Scienze di Parigi, in riconoscimento — disse il Relatore G. HUMBERT — delle loro qualità geometriche di prim'ordine. Nel 1913 SEVERI ottenne il Premio reale per la Matematica conferitogli dalla nostra Accademia, della quale era Socio Corrispondente fin dal 1910 e di cui venne poi nominato Socio Nazionale nel 1926.

Come già GALILEO, a Padova egli trascorse — secondo la frase di quel grande da lui varie volte ripetuta — « li migliori 17 anni di tutta la mia etade ». Da tale periodo occorre però detrarre quello della prima guerra mondiale, cui — sull'esempio paterno — partecipò quale combattente volontario, arrecando notevoli contributi tecnici all'impiego dell'artiglieria concernenti il servizio fonotelemetrico e le correzioni al tiro, ed ottenendo una promozione per merito di guerra, due croci di guerra e varie decorazioni.

All'Ateneo patavino fu successivamente professore ordinario di geometria descrittiva, di geometria analitica, di matematiche superiori, di geometria superiore; in pari tempo impartì altro insegnamento per incarico alla Università di Ferrara. Pure in seguito ebbe a cambiare cattedra più e più volte in conformità alle esigenze eclettiche del suo spirito, ma specialmente allo scopo di conservare freschezza alle sue lezioni e potere dar loro la massima efficacia didattica. Un siffatto eccezionale interessamento verso la Scuola, congiunto sempre ad una prodigiosa attività di ricerca, non escludeva in lui la possibilità di dedicarsi ancora entusiasticamente alle più disparate faccende. Così, per esempio, a Padova — a soli 28 anni — egli fu Presidente delle aziende municipalizzate del gas e dell'acquedotto, eppoi Assessore socialista per l'Istruzione. Fu anche Direttore di quella Scuola d'Ingegneria, la quale ebbe a conferirgli la laurea d'ingegnere *honoris causa* nel 1921.

In tale anno — in base alla legge riguardante le persone « venute in alta e meritata fama » — fu chiamato dalla Facoltà di Scienze dell'Università di Roma a ricoprire la cattedra di analisi algebrica, che in seguito mutò in

quella di analisi infinitesimale e poi di geometria superiore. Poco appresso, non ancora quarantacinquenne, e precisamente nel 1923, diventò Rettore dell'Università di Roma. Ebbe così modo, fra l'altro, di attuare ivi la riforma Gentile, risolvendo con attività ed energia i gravi problemi inerenti alle prime applicazioni dell'autonomia universitaria, e di iniziare la creazione di un Consorzio per la costruzione della Città Universitaria, la quale — secondo il primitivo progetto — avrebbe dovuto sorgere al Castro Pretorio; ma — firmatario del Manifesto Croce — lasciò detta carica nel 1925 per dimissioni, a seguito del delitto Matteotti: onde gliene derivò un profondo disaccordo col governo fascista, che perdurò — seppure in forma sempre più attenuata — per qualche anno, anche dopo esser stato chiamato a far parte dell'Accademia d'Italia.

Nel 1939 creò l'Istituto Nazionale di Alta Matematica, ove divenne professore di alta geometria, concependolo come « qualcosa di intermedio tra « l'Università e l'Accademia, intesa, quest'ultima, nel senso migliore, cioè « come organo propulsore di ricerche e di discussioni scientifiche, indipendenti « da finalità professionali ». Egli ebbe più volte a rilevare che detto Istituto « non voleva e non vorrà mai essere una scuola di perfezionamento, nel senso « non sempre elevato, che questo abusato contorno dei nostri ordinamenti « ha assunto nella pratica attuazione »; in esso quindi non vi sono né esami né diplomi, e neppure tasse, chè anzi a molti dei discepoli vengono conferiti premi o borse di studio. « L'Istituto » — egli disse in occasione della lezione inaugurale del medesimo — « è persona giuridica distinta dall'Università; « ma la legge e lo statuto costitutivi lo hanno voluto nella Città Universi- « taria di Roma, anzi nella Scuola Matematica o in edificio contiguo (che even- « tualmente potrà sorgere in avvenire), per affermare colla coabitazione « materiale, la vicinanza spirituale dei due Enti. Io penso che nessun Istituto, « il quale si proponga di esercitare una qualsiasi forma di proselitismo scien- « tifico fra la gioventù, possa vivere fuori dell'Università. La quale rappre- « senta la continuità delle nostre gloriose tradizioni di pensiero e in essa pulsa « vigorosa e simpaticamente vivace la vita della gioventù, che assumerà domani « le leve del comando nella Nazione. Qui s'incontrano i Maestri più insigni « e qui noi dobbiamo cercare gli eccitamenti e gli incitamenti al nostro lavoro « e andare incontro ai giovani selezionando ed invitando quelli che hanno at- « titudine alla ricerca ».

Questo programma ambizioso fu condotto innanzi con grande successo, nonostante i contraccolpi della guerra scoppiata poco appresso: tanto che il nome dell'Istituto si è ormai affermato nel mondo intero, sì che da molteplici punti di vista parrebbe opportuno se l'Istituto stesso — adeguatamente modificato e potenziato — potesse esser chiamato ad assolvere ancor più alti compiti sul piano internazionale. Va poi rilevato che taluno dei premi e delle borse che ivi attualmente si conferiscono è dovuto alla generosità dello stesso SEVERI, memore certo delle strettezze in cui ebbe a dibattersi da giovane. Egli tenne ininterrottamente la presidenza di detto Istituto dal 1939 fino alla morte e pur nelle menomate sue condizioni fisiche durante gli ultimi

anni, essendone stato nominato « Presidente a vita » nel 1956, con legge speciale.

Questa legge non fu che uno dei tanti spiccati riconoscimenti ch'egli ebbe a ricevere in vita, troppo numerosi per poterne dir qua partitamente [1]. Basti ricordare ch'era Direttore degli « Annali di Matematica », dottore o professore *honoris causa* di molte Università, presidente dell'Accademia Nazionale dei XL e membro di numerosissime altre Accademie italiane e straniere, — fra cui oltre alla nostra — l'Accademia delle Scienze di Parigi che nel 1957 lo aveva chiamato a succedervi ad ALBERT EINSTEIN. Nel 1950, ricorrendo il cinquantesimo anniversario del suo insegnamento, gli furono fatti presso l'Università di Roma e nella città di Arezzo festeggiamenti trionfali e rese solenni onoranze, alle quali ben quattordici Stati vennero rappresentati.

FRANCESCO SEVERI fu un gigante del pensiero matematico moderno. La sua opera scientifica, geniale e profonda, sotto vari aspetti decisiva per i progressi recenti e futuri dell'Algebra e della Geometria, è ricchissima d'idee luminose e feconde, oltrechè di risultati fondamentali e stupefacente anche per ampiezza e multiformità. Essa è tuttavia permeata da una sostanziale

(1) Un elenco ragionevolmente completo è il seguente.

SEVERI fu promosso a tenente colonnello di artiglieria per « segnalati servigi resi al Paese »; grande ufficiale al merito della Repubblica; cavaliere gran croce della Corona d'Italia; commendatore dei SS. Maurizio e Lazzaro; grande ufficiale dell'Ordine del Tesoro Sacro (Giappone); grande croce al merito civile bulgaro (Bulgaria); grande croce dell'Ordine di Alfonso el Sabio (Spagna); commenda dell'Ordine di S. Silvestro (Vaticano). Socio nazionale della Accademia dei Lincei; membro dell'Accademia Pontificia delle Scienze; Presidente dell'Accademia Nazionale dei XL; membro straniero dell'Istituto di Francia; socio della poi disciolta Accademia d'Italia, dell'Accademia delle Scienze di Torino, dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti, dell'Istituto Lombardo di Scienze Lettere e Arti, dell'Accademia di Scienze Lettere e Arti di Padova, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, dell'Accademia Gioenia di Catania, dell'Accademia Peloritana di Messina, dell'Accademia Petrarca di Arezzo (di cui anche fu Presidente), dell'Accademia Etrusca di Cortona, dell'Accademia Valdarnese del Poggio, della Società Torricelliana di Scienze e Lettere di Faenza, dell'Accademia Prussiana delle Scienze (Berlino), dell'Accademia Romena (Bucarest), dell'Accademia delle Scienze di Halle (Germania), dell'Accademia delle Scienze di Göttingen, dell'Accademia delle Scienze dell'U.R.S.S. (Mosca); membro straniero della Reale Accademia delle Scienze del Belgio, della Società Reale delle Scienze di Liegi (Belgio), dell'Accademia delle Scienze di Madrid (Spagna), dell'Accademia delle Scienze di Lisbona (Portogallo), della Società Matematica Spagnola (Madrid), dell'Accademia Colombiana di Scienze esatte, fisico-chimiche e naturali di Bogotà (Columbia). Laureato *ad honorem* dell'Università di Madrid; dottore in filosofia *honoris causa* dell'Università di Göttingen (Germania); dottore *honoris causa* della Università di Bucarest; dottore in scienze *honoris causa* dell'Università di Toronto (Canadà); professore *honoris causa* dell'Università di Buenos Aires; membro d'onore del Consejo de investigaciones de España. Membro del Consiglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo; Direttore degli « Annali di Matematica »; redattore di « Scientia », del « Zentralblatt für Mathematik ». Medaglia d'oro della Società Italiana delle Scienze (1906); laureato col premio Bordin dell'Istituto di Francia (1907); medaglia Guccia conferita al IV Congresso Internazionale dei Matematici (1908); premio Reale per la Matematica conferito dalla Accademia dei Lincei (1913); primo premio del Giubileo copernicano (Königsberg, 1943); stella d'oro al Merito della Scuola; medaglia d'oro dei Benemeriti della Cultura.

unità d'ispirazione, derivante dalla felice confluenza di una sagace intuizione con un acuto spirito critico, e di una larga sensibilità filosofica con un finissimo gusto estetico ed umanistico.

Quasi ciascuno dei lavori matematici originali del SEVERI è un grande affresco — ricco di contenuto e di idee — in cui problemi vitali assai generali vengono affrontati con ardire ed abilità magistrali, all'uopo forgiando istrumenti adatti ed aprendo vie nuove. Ma vi son pure qua e là miniature di gran pregio, dove non si sa se maggiormente ammirare l'eleganza del disegno od il virtuosismo della cesellatura: veggasi o mo' d'esempio la Nota dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo dedicata ad alcuni complementi alla teoria della base, col minuzioso profondo studio in essa effettuato di certe superficie algebriche del 4° ordine e del gruppo delle loro trasformazioni birazionali.

I contributi più significativi che già hanno avuto e tuttora hanno un'incalcolabile influenza nello sviluppo matematico del nostro secolo, sono quelli dati dal SEVERI alla geometria algebrica, e particolarmente all'indagine delle proprietà delle superficie e varietà algebriche invarianti per trasformazioni birazionali. Egli ebbe però ad occuparsi anche di altri campi con grande successo: tanto che i risultati da lui conseguiti in taluno di essi, specie in quello delle funzioni analitiche di più variabili complesse, basterebbero da soli per assicurargli fama duratura.

Per rendersi conto della grandiosità dell'apporto di FRANCESCO SEVERI alla geometria algebrica, basta raffrontare lo stato attuale di questo importantissimo ramo di Geometria con quello in cui esso si trovava agli inizi del nostro secolo, e riflettere che l'enorme progresso compiuto devesi in buona parte all'opera sua ed al decisivo influsso delle sue idee.

Fin dal 1894, CORRADO SEGRE aveva dato un'interessante rielaborazione, alla quale avevano pure contribuito EUGENIO BERTINI e GUIDO CASTELNUOVO, della Geometria sopra una curva algebrica, già altrimenti sviluppata in Germania da BRILL e NOETHER sulle orme di RIEMANN. Una veduta più propriamente invariantiva, in parte inerente alle trasformazioni introdotte una trentina di anni addietro (nel 1863 e nel 1865) da LUIGI CREMONA, aveva poco appresso condotto il CASTELNUOVO e l'ENRIQUES a gettare le basi di una teoria consimile per le superficie algebriche, ed a conseguire in questa straordinari successi ch'ebbero immediata risonanza internazionale, specie in Francia attraverso all'opera del PICARD. Il SEVERI, come già si è accennato, fu tosto attratto dal nuovo indirizzo, al quale ebbe quindi a dedicarsi appassionatamente per quasi un sessantennio. Egli si cimentò così con esito brillantissimo nei più salienti problemi ancora aperti, che parevano inattaccabili, ed in questioni del tutto nuove, da lui ardimentosamente poste e genialmente risolte, portando la teoria invariantiva birazionale delle superficie a grande perfezione e creando poi una teoria analoga — naturalmente assai più vasta e complessa — per le varietà algebriche ad un qualunque numero di dimensioni.

Non mi è possibile d'intrattenermi qui maggiormente sui contributi arrecati dal Nostro alla geometria algebrica ed a tanti altri rami della matematica,

i quali vanno dalla geometria numerativa e proiettiva alla geometria differenziale, dalla teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse a quella delle varietà abeliane e quasi abeliane [2]. Ma conviene almeno nominare le sue fondamentali teorie della base e delle serie e dei sistemi di equivalenza; ed accennare all'imponente complesso di monografie e trattati espositivi, spazianti in argomenti molteplici fra i più elevati e fornenti strumenti indispensabili ai ricercatori. Va infine particolarmente ricordata la notevolissima serie di penetranti lavori dedicati alle questioni critiche attinenti al rigore nei fondamenti della geometria algebrica, i quali, sebbene limitati all'ambito classico, hanno nell'ultimo ventennio promosso all'estero definitivi approfondimenti e svariate estensioni, anche nell'indirizzo astratto.

È perciò curioso rilevare l'eccessiva diffidenza di SEVERI, talora perfino la sua aperta ostilità, verso tali estensioni ed approfondimenti, ch'egli non di rado e non sempre a ragione giudicava piuttosto banali e riteneva in opposizione con lo spirito dell'opera sua. Atteggiamento questo ch'è da raccostare alla aspra battaglia che, in varie occasioni, egli ebbe a condurre contro l'astrattismo matematico — nella tema ch'esso implicasse la sterilità del progresso scientifico — ed alla sua più generale veduta critica sul valore della scienza, parzialmente collegata alla crisi religiosa (in lui maturata negli ultimi anni) sulla quale avremo poi occasione di ritornare.

Si deve forse in parte all'influenza di siffatte concezioni filosofiche negative se l'interesse dei giovani verso certi importanti ordini di questioni è andato da noi negli ultimi tempi un po' allentandosi. Ma ciò non toglie nulla all'eccelso valore della sua lunga ed illuminata opera di Maestro, improntata al suo amore ed alla sua dedizione verso la scienza, mercè la quale — durante la sua lunga vita — riuscì ad ispirare una mole immensa di eccellente lavoro. Fra i matematici italiani scomparsi prima di lui e che già furono suoi allievi, sono da ricordare RUGGERO TORELLI, GIACOMO ALBANESE, ANNIBALE COMESSATTI, GIUSEPPE GHERARDELLI e FABIO CONFORTO. Ma molti dei matematici che in Italia giunsero alla cattedra universitaria nell'ultimo ventennio ebbero a passare per il crogiuolo dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, ed innumerevoli furono coloro che — da noi ed all'estero — subirono la sua influenza diretta od indiretta: fra gli stranieri viventi, basti ad esempio citare i nomi di WERNER BURAU, FEDERICO GAETA, LUCIEN GODEAUX, WOLFGANG GRÖBNER, ERICH KÄHLER, KUNIHIKO KODAIRA e LEONARD ROTH.

Occorre poi aver presente che — col SEVERI — ci troviamo di fronte ad una complessa, intensa natura tormentata e ad una personalità d'eccezione, e che non sempre riesce agevole un'equa valutazione di quelle che (come

(2) Per ulteriori particolari al riguardo, veggasi il discorso su *L'opera scientifica di Francesco Severi* da me [B. SEGRE; N.d.R.] tenuto il 27 aprile 1962, in apertura di un Simposio Matematico Internazionale svoltosi presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica [cfr. « Rendiconti di Matematica », (5) *21* (1962), fasc. 3–4 ed il Quaderno n. 3 de « La Ricerca Scientifica » (Roma, C.N.R., 1962)]. L'elenco cronologico generale alla fine della presente *Commemorazione* è tratto appunto da tale discorso.

da lui fu detto con riferimento a LEONARDO) « per un essere di statura normale sarebbero incongruenze o contraddizioni ». Egli stesso ebbe a dichiarare di non sapere « facilmente rinunciare a quel dinamismo inquieto, che « mozza il respiro e ci rende infelici »; ma che (ancora con riferimento a LEONARDO): « Quest'oscillare fra i due estremi dell'arco conoscitivo, pensiero « ed esperienza, pensiero ed azione, è destino d'ogni pensatore che senta il « contrasto drammatico tra ragione e realtà, tra riflessione ponderata ed im- « pulsi estetici, che conducono all'azione o alla rappresentazione ».

Ecco quindi come la sua sicurezza orgogliosa potesse talora celare un arcano ingiustificato timore di non essere apprezzato e benvoluto, e come l'uomo innamorato della natura, equilibrato, raziocinante, potesse essere nello stesso tempo amante della caccia e automobilista spericolato, ed accogliere certe vedute empiriche senza troppo sottilizzare. Così, ad esempio, egli credeva fermamente nell'influenza del giorno 8 nella sua vita (morì di fatto l'8 dicembre), e che le botti piene abbiano a straripare col plenilunio: credenza questa forse non accettabile sul piano scientifico, comune però fra i contadini e ch'egli diceva d'aver potuto confermare sperimentalmente.

Il « dinamismo inquieto » che lo sospingeva — e con notevole successo — verso le più disparate attività pratiche (come quelle di presidente della Casa Editrice Vallecchi e della Banca Mutua Popolare di Arezzo e quella di agricoltore), gli suggeriva altresì sempre nuove imprese dello spirito: in ciò agevolato da mirabili capacità letterarie e da stupefacenti doti di duttilità, versalità, facondia, prontezza, che gli permettevano ad esempio di dettare alla segretaria una decina di lettere nel breve intervallo fra due lezioni o di improvvisare un discorso in modo perfetto, ed una volta persino di compiere felicemente un viaggio all'estero nonostante avesse scordato di prender seco il passaporto. Frutto di una di quelle imprese fu tra l'altro il volume su *Leonardo da Vinci*, cui per due anni dedicò ogni ora lasciatagli libera da altre urgenti occupazioni: opera pregevolissima, compenetrata di dottrina storica e di spirito critico, e nel contempo profondamente umana, redatta con levità di tocco e purezza di forma, nella quale viene compiuto il miracolo di esprimere vedute nuove su di una figura tanto dibattuta ed enigmatica, in base alle insondabili affinità ed all'amore che legavano lo scrivente a quel suo grande conterraneo.

Il Nostro — fin dal 1924 — analizzò acutamente i postulati della relatività, muovendo dai concetti di sensazioni contemporanee e successive, e compiendo la riduzione di quelli ai loro elementi logici e psicologici. Più di recente ebbe a tornare varie volte sull'argomento ed allargò anche l'indagine ai principi della fisica moderna con suggestive riflessioni appartenenti — come egli stesso riconobbe — « a quella zona intermedia fra intuizione, induzione e « deduzione ove maturano quasi tutti i concetti della scienza ». Fra le nozioni da lui così introdotte, rimaste però sostanzialmente a tutt'oggi in quell'ambito, possono venire ricordate quelle di « tempo naturale », di « materia pura », di « energia pura », assieme ad un raccostamento fra *quanta* e *virus* e ad una distinzione geometrico-topologica fra particelle ed antiparticelle, in certa guisa analoga al « rovesciamento del tempo » di FANTAPPIÉ.

SEVERI, specie negli ultimi vent'anni, si appassionò anche a fondo all'eterno problema della conoscenza e dell'Essere, giungendovi da posizioni positivistiche le quali — da giovane — gli avevano fatto esclamare col Poeta:

Umano ardir, pacifica
Filosofia secura,
Qual forza mai, qual limite
Il tuo poter misura?

Questa baldanzosa sicurezza era poi stata — in lui come in tanti altri — dapprima scossa e poi smorzata dal movimento che portò alla cosiddetta crisi del pensiero moderno, originato dalla critica dei fondamenti della matematica nel secolo scorso e dalle conseguenti evoluzioni e rivoluzioni nella fisica. Su queste ultime, egli così si esprimeva ancora nel 1942.

« La crisi della fisica del secolo XX, echeggiando con falsi toni in un « mondo dove la cultura — a differenza di quanto avviene nei grandi periodi « creativi della storia ed in ispecial modo nel nostro Rinascimento — è a « prevalente sfondo letterario; e dove certa filosofia, postasi al vertice della « gerarchia del sapere, è di fatto spesso in condizione da non poter giusta- « mente valutare i problemi scientifici; contribuisce a deformare le conquiste « rivoluzionarie del pensiero ed ad accrescere il disagio e lo scetticismo verso « la scienza pura ».

Contro questo scetticismo egli reagì allora con grande energia, tanto da asserire categoricamente:

« Rifiuto però ogni inerte pessimismo », soggiungendo che: « come ma- « tematico, un altro motivo accentua il mio ottimismo sulla possibilità di su- « perar relativamente presto i nocivi orientamenti accennati. Ed è che una « più chiara coscienza scientifica, quale, per certi segni, si va qua e là deli- « neando, non mancherà di diffonder nel mondo culturale e politico la con- « vinzione che pochi furono nei secoli i momenti in cui la matematica sia stata « non già l'ancella, ma la creatrice e la padrona degli schemi interpretativi « dell'Universo, come avviene da una quindicina di lustri ad oggi ».

In seguito, tuttavia, nell'intento — come disse — di « avvicinarsi alla « comprensione della realtà assoluta fuori del tempo e dello spazio, la quale « sola può placare la nostra inquietudine », egli modificò via via più radicalmente il proprio atteggiamento, fino ad un totale capovolgimento delle conclusioni. Così, ad esempio, nel 1951 egli scriveva che:

« Matematica e fisica hanno non poca responsabilità nella presente crisi « del pensiero, la quale tocca tutti i valori, religiosi, morali, filosofici, artistici, « politici », prevedendo inoltre che:

« l'umana società s'avvia in direzioni pericolose per l'avvenire della « civiltà, quando tutto ciò che rende stabili sentimenti e rapporti morali « crolla dinanzi ad una critica, che dissolve ogni cosa in una sconcertante « provvisorietà di relazioni formali cui può dar titolo di legittimità sol- « tanto il fatto materiale, senza che alcuna aspirazione di spiritualità la illu- « mini ».

Da tali scoraggianti premesse, egli inferì che:

« non si deve chiedere alla scienza ed alla filosofia più di quanto esse non « possano effettivamente dare, perché quando la richiesta va al di là dei limiti « delle loro capacità, ecco che si naufraga nel disperato Nulla o si scopre ancora « una volta Dio ».

Ed a questa riscoperta, che veniva a ravvicinarlo agli anni della sua mesta fanciullezza, egli si dedicò fervidamente verso la fine della vita, con umiltà per lui inconsueta; a ciò anche sospinto dal ricordo dolcissimo della madre credente e del padre tragicamente scomparso, dal dolore subito nel 1952 per la morte quasi improvvisa della moglie amatissima e dalla gravezza delle sofferenze fisiche negli ultimi anni.

Il suo scetticismo verso la scienza andò così a mano a mano accrescendosi, in quanto essa — come disse — « non ci fa che scoprire rapporti contingenti « i quali sono in ogni tempo dipendenti dal complesso di tutte le teorie fino « a quel momento formulate e di tutti i fatti a quel momento conosciuti: « donde il loro relativismo. Le teorie mutano perciò col moltiplicarsi delle « conoscenze e dei fenomeni scoperti. Basta un fatto nuovo per far crollare « tutti i nostri sistemi scientifici, che siano con esso discordanti, e per costrin- « gerci a costruirne dei nuovi, i quali possano inquadrare le vecchie e le nuove « conoscenze ». E la stessa insoddisfazione egli ebbe insistentemente a mostrare nei riguardi anche della matematica (della quale purtuttavia continuò ad occuparsi in modo costruttivo fino all'ultimo giorno), escludendo ch'essa potesse concepirsi come una disciplina meramente ipotetico-deduttiva e conseguentemente ridursi ad un'unica colossale tautologia; mentre, d'altro canto, riteneva che « fuori delle scienze conoscitive, quell'intellettualismo « esacerbato non può che sboccare nell'assurdo, giacché a un certo momento « bisogna pur porre di fronte alla ragione, come diceva PASCAL, le ragioni del « cuore ».

Egli giunse a raffermarsi in tali convincimenti attraverso ad interessanti — anche se non sistematiche — analisi storico-critiche dei fondamenti, costellate da osservazioni sottili come quella sulla pericolosità della nozione di « insieme infinito di oggetti o elementi » e quella secondo cui non è lecito parlare di « un ' insieme di concetti astratti ', perché nessuno di questi esiste indivi- « dualmente se non concretandosi ». È però strano ch'egli abbia voluto collegare Dio a siffatte argomentazioni puramente logiche, usando poi naturalmente tutt'altro metro nei riguardi di quello, da lui appellato — con riferimento appunto alla teoria degli insiemi — « l'Infinito di tutti gl'infiniti ». Siffatte incongruenze avrà senza dubbio egli stesso varie volte più o meno esplicitamente avvertite, come quando (nel 1956) — alludendo al giorno (29 agosto 1952) in cui, dopo ormai più di cinquant'anni tornò a prostrarsi nella confessione — così ebbe ad esprimersi:

« L'illuminazione di quel giorno fu invero spesso oscurata dal desiderio « di vedere fino in fondo coi soli mezzi scientifici: desiderio irrazionale, si « potrebbe dire insulso. Continuavo a pretendere di arrivare alla Fede attra- « verso i sillogismi e le esperienze della scienza. Ebbene, bisogna persuadersi

« che così non ci si arriva, e contentarsi invece d'arrivare con la scienza a « questo punto: ' È assurdo che tu voglia negare quello che non puoi compren- « dere; è assurdo che tu non cerchi la Fede! ' ».

E tale trepida ricerca egli di fatto compì assiduamente, ma non senza titubanze, avendo dovuto constatare di essere (com'egli disse) « agitato sem- « pre dai dubbi che m'assoggettano a un continuo travaglio per arrivare alle « certezze, per le quali confido soprattutto nell'illuminazione della fede e nello « aiuto di Dio »; aggiungendo però da ultimo che:

« Le sofferenze, invece, hanno in me compiuto il miracolo di far ascen- « dere l'anima verso una più chiara visione dei cieli, donde è derivato tutto « il vigore per ogni sopportazione ».

Egli avrebbe comunque ben potuto far suo il detto di LEONARDO: « sì « come una giornata bene spesa dà lieto dormire, così una vita ben usata dà « lieto morire »; talché le sue ultime ore saranno certo state allietate dalla fede ritrovata e dalla consapevolezza di avere saputo raggiungere in tanti campi le mete più eccelse. Alla sua memoria vada il cocente rimpianto e l'affettuosa, riconoscente ammirazione di noi tutti che, dal suo esempio luminoso, abbiamo tratto e traiamo i più alti ammaestramenti di scienza e di vita.

ELENCO CRONOLOGICO GENERALE DELLE PUBBLICAZIONI DI FRANCESCO SEVERI

1898

[1] *Generalizzazione dei teoremi di Pascal e di Brianchon* (Arezzo, Sinatti 1898). 1 fasc., 8 pp., 19×12 cm.

1900

[2] *Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe,* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *35* (1900), pp. 526–541.

[3] *I gruppi neutri con elementi multipli, in un'involuzione sopra un ente razionale,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *9*1 (1900), pp. 379–381.

[4] *Le coincidenze di una serie algebrica* $\infty^{(k+1)(r-k)}$ *di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *9*2 (1900), pp. 321–326.

[5] *Sopra le coniche che toccano e secano una o più curve gobbe,* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *36* (1900), pp. 74–93.

1901

[6] *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio,* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *50* (1901), pp. 81–114.

[7] *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e ai suoi punti tripli apparenti,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *15* (1901), pp. 33–51.

1902

[8] *Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *9*1 (1902), pp. 52–56.

[9] *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive,* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *52* (1902), pp. 61–118.

[10] *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *9*1 (1902), pp. 105–113.

[11] *Risoluzione descrittiva di alcuni problemi spaziali biquadratici,* Le matematiche pure ed applicate, *2*, n. 8–9 (1902), 9 pp.

[12] *Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica,* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *37* (1902), pp. 433–451.

[12 *a*] *Esercizi di geometria analitica,* [Anno accademico 1901–1902], (Torino, Tip. C. Giorgis, 1902). 1 vol., 222 pp., 24×15 cm., Litografia.

1903

[13] *Sulla forma delle rigate cubiche,* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *62* (1903), pt. 2, pp. 863–879.

[14] *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica,* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *38* (1903), pp. 119–134.

[15] *Su alcune questioni di postulazione,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *17* (1903), pp. 73–103.

[16] *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica,* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *36* (1903), pp. 495–511.

[17] *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie,* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *54* (1903), 49 pp.

[18] *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 12_2 (1903), pp. 250–257.

1904

[19] *Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *18* (1904), pp. 256–259.

[20] *Lezioni di geometria proiettiva* (Pisa, Gozani, 1904). 1 vol. Litografia.

[21] *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica,* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *39* (1904), pp. 371–392.

[22] *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie (Nota),* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 13_2 (1904), pp. 253–258.

1905

[23] *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie (Memoria),* Mathematische Annalen, *61* (1905), pp. 20–49.

[24] *Sulla differenza fra i numeri degli integrali di Picard della prima e della seconda specie appartenenti ad una superficie irregolare,* Atti della Accademia delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 254–262.

[25] *Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de Picard attachées à la surface,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 140_1 (1905), pp. 361–363.

[26] *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *20* (1905), pp. 93–96.

[27] *Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques (Note),* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 140_1 (1905), pp. 926–928.

[28] *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (Memoria),* Annali di matematica, (3) *12* (1905), pp. 55–79.

[29] *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica,* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 602–612.

[30] *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica,* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *38* (1905), pp. 859–865.

1906

[31] *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *41* (1906), pp. 167–185.

[32] *Complementi di geometria proiettiva* (Bologna, Zanichelli, 1906). 1° vol., VII + 432 pp., 23×15 cm.

[33] *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (*Memoria*), Mathematische Annalen, *62* (1906), pp. 194–225.

[34] *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *21* (1906), pp. 257–282.

[35] *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *65* (1906), pt. 2, pp. 625–643.

[36] *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 152 (1906), pp. 691–696.

[37] *F. Enriques: Problemi della scienza* (Recensione), Rivista di filosofia e scienze affini, (8) *2* (1906), n. 7–9, 15 pp.

1907

[38] *Picard et Simart: Théorie des fonctions algébriques, etc.* (Recensione), Bollettino di bibliografia e storia delle matematiche, (10) (1907), pp. 1–10.

[39] *Intorno alle superficie iperellittiche* (in collab. con F. Enriques), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 16_1 (1907), pp. 443–453.

[40] *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 16_2 (1907), pp. 337–344.

[41] *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri, di trasformazioni birazionali*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *67* (1907), pt. 2, pp. 409–419.

1908

[42] *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari* (in collab. con F. Enriques), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 17_1 (1908), pp. 4–9.

[43] *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), 1 vol., VI + 346 pp., 28×19 cm., Litografia.

[44] *Osservazioni sul Restsatz per le curve iperspaziali*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *43* (1907–1908), pp. 444–447.

[45] *Appunti di geometria algebrica*, Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, *26* (1908), pp. 137–144.

[46] *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 17_2 (1908), pp. 465–470.

[47] *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales de l'École Normale Supérieure de Paris, (3) *25* (1908), pp. 449–468.

[48] *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *68* (1908), pt. 2, pp. 247–260.

[49] *G. Loria: Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (Recensione), Rivista di scienza [poi divenuta « Scientia »], *4* (1908), n. 8, pp. 376–378.

1909

[50] *Sur les intégrales doubles de première espèce attachées à une variété algébrique*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 148_1 (1909), pp. 80–81. Pubbl. anche col titolo *Sugli integrali doppi di 1ª specie appartenenti ad una varietà algebrica a tre dimensioni*, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Riun. 2 [Firenze, 1908], (1909), pp. 311–312.

[51] *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 28_2 (1909), pp. 38–87.

[52] *Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *68* (1909), pt. 2, pp. 829–838.

[53] *Di alcuni recenti risultati nella teoria delle superficie algebriche e sopra qualche problema ad essi collegato*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, *2* (1909), pp. 234–241.

[54] *Sulle superficie modanate*, Periodico di Matematica, (3) *6* (1909), pp. 193–240.

[55] *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Parties I et II*) (in collab. con F. ENRIQUES), Acta Mathematica, *32* (1909), pp. 283–392 [et bibl. p. 1–12]; *33* (1910) pp. 321–403.

1910

[56] *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 30_2 (1910), pp. 265–288.

[57] *Sul metodo di Mayer per l'integrazione delle equazioni lineari ai differenziali totali*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *69* (1910), pt. 2, pp. 412–425.

[58] *Ipotesi e realtà nelle scienze geometriche* (Discorso), Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Riun. 3 [Padova, 1909] (1910), pp. 191–217. Pubbl. anche in « Scientia », *8* (1910), n. 15, pp. 1–29; anche in francese (Suppl. pp. 3–32).

1911

[59] *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *70* (1910–11), pt. 2, pp. 373–382.

[60] *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 20_1 (1911), pp. 537–546.

[61] *Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 152_1 (1911), pp. 1079–1081.

[62] *La nostra scuola*, Discorso per l'inaugurazione della Scuola « Ardigò » in Padova, Il Veneto (settimanale), Padova, 1911.

1912

[63] *Sul principio della conservazione del numero*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 33_1 (1912), pp. 313–327.

[64] *Sulle congruenze solenoidali*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *71* (1912), pp. 769–774.

1913

[65] *Les correspondances algébriques existant sur les courbes d'un système linéaire tracées sur une surface* (*Note*), Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 156_1 (1913), pp. 287–289.

[66] *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* (*Memoria*), Mathematische Annalen, *74* (1913), pp. 515–544.

[67] *Relazioni fra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica*, Annali di Matematica, (3) *20* (1913), pp. 201–216.

[68] *Risposta ad un'osservazione del Signor De Franchis*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 36_2 (1913), pp. 226–232.

[69] *Sulle superficie irregolari con infinite curve razionali*, Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, *29* (1913), 4 pp.

[70] *Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *72* (1913), pp. 765–772.

[71] *Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *48* (1913), pp. 660–674.

[72] *Lezioni di geometria descrittiva*. Raccolte dall'assistente dottore A. COMESSATTI (Padova, Parisotto, 1913), 1 vol. Litografia.

[73] *Notizie sulle mie pubblicazioni scientifiche dal 1900 al 1913* (Padova, Società cooperativa tipografica, 1913), 1 fasc.

[74] *Razionalismo e spiritualismo*. Discorso inaugurale dell'anno accademico 1913–14, Annuario della R. Università di Padova, 1913–14. Riprodotto in «Conferenze e prolusioni», (1914) pp. 3–39.

1914

[75] *Sugli integrali abeliani riducibili* (*Note I e II*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 23_1 (1914), pp. 581–587, 641–651.

[76] *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque, in una priva di punti multipli*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 23_2 (1914) pp. 527–539.

1915

[77] *Lezioni di geometria proiettiva* (Padova, Milani, 1915). 1 vol. Litografia.

[78] *Osservazioni a proposito della Nota del Comessatti: Sulle trasformazioni hermitiane delle varietà di Jacobi*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *50* (1915), pp. 439–455.

[79] *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann* (*Note I e II*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 24_1 (1915), pp. 877–888, 1011–1020.

[80] *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, Annali di Matematica, (3) *24* (1915), pp. 1–32.

1916

[81] *Ruggero Torelli: Necrologia*, Bollettino di bibliografia e di storia delle matematiche, *18* (1916), pp. 11–12.

[82] *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (*Note I e II*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (25) (1916), pp. 459–471, 551–562.

[83] *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *75* (1916), pt. 2, pp. 1121–162.

1917

[84] *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *42* (1917), pp. 227–259.

1918

[85] *Sugl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica*, Scritti matematici offerti ad E. D'Ovidio, (Torino, Bocca, 1918), pp. 186–199.

1919

[86] *Sulle correzioni al tiro d'artiglieria dipendenti dalle variazioni di temperatura e di pressione*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *78* (1919), pt. 2, pp. 297–322.

[87] *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* (in collab. con A. COMESSATTI), (Padova, Milani, 1919). 1 vol., 444 pp.

[88] *La matematica*, Energie nuove [Torino, ed. Piero Gobetti], (2) (1919), n. 9, pp. 196–199.

1920

[89] *Una rapida ricostruzione della geometria sopra una curva algebrica*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *79* (1920), pt. 2, pp. 929–938.

[90] *L'istruzione professionale* (Discorso inaugurale), Atti del Congresso degli Agricoltori e Bonificatori, Padova, 1920.

1921

[91] *Riflessioni intorno ai problemi numerativi concernenti le curve algebriche*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, *54* (1921), pp. 1–12.

[92] *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921). 1 vol., XV+408 pp.

[93] *Sulla teoria degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica* (*7 Note*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *30* (1921), pp. 163–167, 204–208, 231–235, 276–280, 296–301, 328–332, 365–367.

[94] *Geometria proiettiva* (Padova, « La Linotipo » Editr. Universitaria, 1921). 1 vol., IV + 363 pp., 24×17 cm. Ristampa 1922.

1922

[95] *Die Geometrie auf einer algebraischen Fläche*, « E. Pascal, ed.: Repertorium des höheren Mathematik », cap. XXXIII, pp. 741–782 (Leipzig, Teubner, 1922).

[96] *Sul teorema di esistenza di Riemann*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *46* (1922), pp. 105–116.

[97] *Lezioni di analisi algebrica* (Roma, Tip. del Genio Civile, 1922). 1 vol., 402 pp., 25×18 cm. Litografia. 2ª ed. 1925. Altre ediz. successive.

[98] *Lezioni di analisi infinitesimale* (Roma, Tip. Genio Civile, 1922). 1 vol., 25×18 cm. Litografia. Altre ediz. successive, 3ª ediz. 1928. Altra ediz. 1934.

[99] *Alexander von Brill zum achtzigsten Geburstag*, Jahresbericht der deut. Math. Vereinigung, *31* (1922), pp. 89–96.

[100] *Una proprietà fondamentale degli integrali doppi di 1ª specie*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *31* (1922), pp. 416–419.

1923

[101] *Intorno alla costruzione razionale degli integrali di Picard di 1ª specie*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *32* (1923), pp. 192–195.

[102] *La teoria elementare delle serie doppie*, Periodico di Matematica, (4) *3* (1923), pp. 219–237.

[103] *La legge 25 luglio 1922 sull'istruzione superiore*, Athena, *1* (1923), pp. 3–17.

[104] *Sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili*, Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, (2) *1* (1923), pp. 1–5. Cfr. anche: Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Riun. 12 [Catania, 1923], *2* (1924), pp. 1–2.

1924

[105] *Riduzione dei principi di relatività ai loro elementi logici e psicologici*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *33* (1924), pp. 429–435. Trad. in spagnolo nella Revista mat. hispano-americana, (2) *1* (1926), pp. 108–115.

1925

[106] *Elementi logici e psicologici dei principi di relatività*, Scientia, *37* (1925), pp. 1–10.

[107] *Esame delle obiezioni d'ordine generale contro la relatività del tempo*, Scientia, *37* (1925), pp. 11–20.

[108] *Max Noether* (in collab. con G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES), Mathematische Annalen, *93* (1925), pp. 161–181.

[109] *Sulla teoria delle corrispondenze fra curve algebriche*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *1* (1925), pp. 562–568.

[110] *Sulle curve di livello costante degli integrali di Picard*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *2* (1925), pp. 521–526.

1926

[111] *Geometria proiettiva*, 2ª ed. (Firenze, Vallecchi, 1926), 1 vol., 381 pp., 20×14 cm.

[112] *Elementi di geometria*. Vol. I pel Ginnasio e pel corso infer. dell'Ist. tecnico. [Ediz. completa] (Firenze, Vallecchi, 1926). 1 vol., XIII + 187 pp., 22×14 cm.; 2ª ed. 1928; 3ª ed. 1930; altre ediz. successive. (Trad. spagnola: Barcelona, Editorial Labor S. A., 1929, Tomo primero, 269 pp.).

[113] *Conferencia general sobre la geometria algebraica*, Revista mat. hispano-americana, (2) *1* (1926), p. 8, pp. 225–232.

[114] *Trattato di geometria algebrica*. Vol. I, pt. 1; *Geometria delle serie lineari* (Bologna, Zanichelli, 1926), 1 vol., VIII + 358 pp., 24×15 cm.

1927

[115] *Elementi di geometria.* Vol. II pei Licei e pel corso infer. dell'Ist. tecnico [Ediz. completa] (Firenze, Vallecchi, 1927). 1 vol., VII + 275 pp., 22×14 cm., 2ª ed. 1929. Altre ediz. successive. (Trad. spagnola. Barcelona, Editorial Labor S. A., 1930. Tomo segundo, 373 pp.).

[116] *Riflessioni sull'area di una superficie curva (Note I e II),* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *51* (1927), pp. 471–475, 475–479. Trad. spagnola in Revista mat. hispano–americana, (2) *2* (1927), n. 7, pp. 207–211; n. 8, pp. 238–241.

[117] *L'insegnamento della geometria nei suoi rapporti colla riforma,* Annali dell'istruzione media, *3* (1927), quad. 1, pp. 108–116.

[118] *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva variabile sopra una superficie algebrica,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) 6_2 (1927), pp. 435–441.

[119] *Conferenze di geometria algebrica,* Raccolte da B. Segre (Roma, Tip. lit. del Genio Civile, 1927–1929), 1 vol., 392 pp., 24×16 cm.

1928

[120] *Sugl' integrali algebrici semplici e doppi (4 Note),* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *7* (1928), pp. 3–8, 9–14, 101–108, 161–169.

[121] *La géometrie algébrique,* Atti del Congresso internazionale dei matematici, Toronto, 1924, (Toronto, 1928), pp. 149–154.

[122] *Elementi di geometria.* Vol. I, edizione ridotta. (Firenze, Vallecchi, 1928). 1 vol., 154 pp., 21×14 cm., 2ª ed. 1930. Altre ediz. successive.

[123] *Elementi di geometria.* Vol. II, edizione ridotta. (Firenze, Vallecchi, 1928). 1 vol., 275 pp., 21×14 cm., 2ª ed. 1930. Altre ediz. successive.

[124] *Commemorazione di Giuseppe Bagnera,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *8* (1928), pp. XII–XXX.

1929

[125] *Un paradosso topologico* (in collab. con B. SEGRE), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *91* (1929), pp. 3–8.

[126] *Ancora sopra un paradosso topologico* (in collab. con B. SEGRE), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *91* (1929), pp. 117–122.

[127] *Moderni indirizzi nelle matematiche,* Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Riun. 17 [Torino, 1928], (1929), pp. 85–115.

[128] *Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *9* (1929), pp. 915–921. Trad. spagnola, Asociación Española para el Progreso de las Ciéncias, Barcelona, *2*, p. 47–54.

[129] *Sull'estensione delle figure convesse,* Bollettino di matematica, *25* (1929), pp. 81–87.

1930

[130] *Le curve intuitive,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *54* (1930), pp. 51–66. Preced. pubbl. in trad. spagnola, Revista matematica hispano–americana, (2) *4* (1929), pp. 145–165.

[131] *Sulle condizioni d'integrabilità pei differenziati esatti di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica e sui differenziali semiesatti*, Atti del Congresso internazionale dei matematici, Bologna 1928, *4* (1930), pp. 69–77, (Bologna, Zanichelli).

[132] *Sugli estremanti delle funzioni di due variabili*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *1* (1930), n. 1, pp. 3–19.

[133] *La topologia e i fondamenti dell'analisi generale*, Rendiconti del Seminario Matematico di Roma, (2) *7* (1930), pp. 5–37.

[134] *On the moduli of algebraic functions*, American Journal of Mathematics, *52* (1930), n. 3, pp. 501–508.

[135] *L'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane* (in collab. con B. SEGRE), Annali di Matematica, (4) *8* (1930), pp. 173–199.

[136] *Il secolo delle invenzioni*, *3*, pt. 2. pp. 1–27, in D. Donati e F. Carli, coed.: « L'Europa nel secolo XIX » (Padova, Milani, 1932).

1931

[137] *La matematica italiana*, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Trento, Riun. 19 [Bolzano–Trento, 1930], *1* (1931), pp. 189–203.

[138] *Il problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *2* (1931), pp. 7–29.

[139] *Sobre el concepto de dimension de un continuo*, Asociación Española para el Progreso de las Ciéncias, Madrid: Ciéncias matmáticas, (1931), pp. 101–107.

[140] *Sur une propriété fondamentale des fonctions analytiques de plusieurs variables*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *192* 1 (1931), pp. 596–599.

[141] *Su alcune questioni di topologia infinitesimale*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, Cracovie, *9* (1931), pp. 97–108.

[142] *Les fonctions biharmoniques et la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *192* 1 (1931), pp. 1514–1520.

[143] *Contributi alla teoria delle funzioni biamorniche*, Memoria della R. Accademia d'Italia, *2* (1931), pp. 357–411.

[144] *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *13* (1931), pp. 795–804.

[145] *Didattica della matematica*, pp. 362–370, Enciclopedia delle Enciclopedie: Pedagogia (Roma, Formìggini, 1931).

[146] *Conferencias pronunciadas en la Universidad de Buenos Aires* (Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, 1931). Serie B, n. 10, 1 fasc., 78 pp., 24×16 cm.

[147] *Topologia: Conferenze tenute nella Università di Buenos Aires* (Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, 1931). Serie B, n. 9, 165 pp., 24×16 cm.

[148] *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, *5* (1931–32), pp. 1–58 (e, Rendiconti del Seminario Matematico di Roma, (2) *7*, pt. 2, pp. 1–58).

1932

[149] *Osservazioni a proposito della Nota di E. Kähler « Sui periodi dell'integrali multipli sopra una varietà algebrica »*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *56* (1932), pp. 75–81.

[150] *Alcune proprietà fondamentali dell'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *3* (1932), n. 1, pp. 1–20.

[151] *Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *15* (1932), pp. 487–490.

[152] *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica*, Commentarii mathematici helvetici, *4* (1932), pp. 268–326.

[153] *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *3* (1932), n. 5, pp. 1–52.

[154] *Le rôle de la géometrie algébrique dans les mathématiques*, Verhandlungen der internationalen Mathematiker–Kongresses, Zürich 1932, *1*, pp. 202–220 (s. a.).

[155] *Nuovi orizzonti nella geometria algebrica*, ibidem, *2*, pp. 156–158 (s. a.).

1933

[156] *Lezioni di analisi*. Vol. I (Bologna, Zanichelli, 1933). 1 vol., VIII + 434 pp., 2ª ed. 1938, 4ª ed. rived. e ampl. 1953.

[157] *Quelques théories nouvelles en géométrie algébrique*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *196* (1933), pp. 229–231.

[158] *Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche e analitiche*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *17* (1933), pp. 3–12.

[159] *Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle varietà algebriche*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *4* (1933), n. 6, pp. 71–129.

[160] *La teoria delle serie d'equivalenza e delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica* (*7 Note*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *17* (1933), pp. 419–425, 491–497, 597–600, 682–685, 759–764, 869–876, 876–881.

[161] *Ueber die Grundlagen der algebraischen Geometrie*, Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität, *9* (1933), pp. 335–364.

[162] *Fascismo e scienza*, Illustrazione italiana, 29 ottobre 1933.

[163] *Sulle trasformate razionali di una superficie algebrica priva di punti multipli*, Mathematische Annalen, *109* (1933), pp. 4–6.

1934

[164] *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *5* (1934), n. 6, pp. 239–283.

[165] *La théorie générale des correspondances entre deux surfaces algébriques*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *198* (1934), pp. 422–424.

[166] *Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali*, Annali di Matematica, (4) *13* (1934), pp. 1–35.

[167] *Autorecensione delle «Lezioni di analisi»*, Bollettino di matematica, *30* (1934), pp. LVI–LX.

[168] *Le involuzioni razionali sopra una superficie come serie di equivalenza* (*Note I e II*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *19* (1934), pp. 751–754, 831–836.

[169] *Guglielmo Marconi*, Illustrazione italiana, 20 maggio 1934.

[170] *Geometria*. Vol. I, II, III (Firenze, Vallecchi, 1934). 3 vol., VII + 108, VI + 78, VI + 108 pp., 21 × 14 cm.

[171] *Sobre funciones de dues variables complexes* (Barcelona, Institut d'Estudies Catalans, 1931). 1 fasc., 34 pp.

[172] *Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *20* (1934), pp. 287–293.

[173] *In memoria di E. Bertini*, Bollettino di Matematica, a. 30, *13* (1934), pp. 48–49.

[174] *Ancora sulla caratterizzazione topologica e trascendente delle serie d'equivalenza*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *20* (1934), pp. 395–397.

1935

[175] *Un'altra proprietà fondamentale delle serie d'equivalenza sopra una superficie*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *21* (1935), pp. 3–5.

[176] *Del principio di Plücker–Clebsch e di altre cose meno importanti*, Bollettino di Matematica, a. 31 (1935), pp. XXVI–XXXII.

[177] *Peut-on parler d'un esprit latin même dans les mathématiques?*, Revue scientifique (Paris), a. 73, *2* (1935), pp. 581–589.

[178] *A proposito della Città universitaria*, Capitolium, Rassegna mensile del Governatorato di Roma, a. 11 (1935), n. 6, p. 308.

[179] *Geometria intuitiva*, pei Ginnasi inferiori (Firenze, Vallecchi, 1935). 1 vol., 22×14 cm.

[180] *Nozioni di geometria*, per le Scuole di avviamento (Firenze, Vallecchi, 1935). 1 vol., 118 pp., 22×14 cm.

[181] *Aritmetica pratica* (in collab. con M. MASCALCHI), per le Scuole medie inferiori (Firenze, Vallecchi, 1935), 1 vol., 231 pp., 22×14 cm.

[182] *Nozioni di aritmetica* (in collab. con M. MASCALCHI), per le Scuole di avviamento (Firenze, Vallecchi, 1935). 1 vol., VII + 155 pp., 22×14 cm.

1936

[183] *The series of sets of points on an algebraic surface*, Proceedings of the Imperial Academy Tokyo, Suppl. *12* (1936), 7 pp.

[184] *The principles of the relativity theory deduced from the common sense*, Proceedings of the Physico-mathematical Society of Japan, *18* (1936), n. 6, pp. 257–267.

[185] *L'Italia d'oggi*, a cura della Kokusai Bunka Shinkokai, Tokyo (in lingua giapponese).

[186] *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche* (*Note I e II*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *23* (1936), pp. 818–823, *24*, pp. 1–5.

[187] *Il rango d'una corrispondenza a valenza sopra una superficie*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, a. 15 (1936), n. 4, pp. 161–169.

[188] *Equivalenza d'una curva come gruppo virtuale parziale di una serie d'equivalenza sopra una superficie*, Scritti matematici offerti da L. Berzolari, pp. 77–84 (Pavia, 1936).

[189] *Aritmetica razionale* (in collab. con U. BINI), per gli Istituti magistrali superiori (Firenze, Vallecchi, 1936). 1 vol., VIII + 75 pp., 21×14 cm.

[190] *Lectures on the theory of analytical functions of several variables* (in lingua giapponese). (Tokyo, 1936). 1 vol., circa 100 pp.

[191] *Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche* (*Note I e II*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *24* (1936), pp. 493–497; *25* (1937), pp. 3–9.

[191 *a*] *Applicazioni di geometria descrittiva*. Lezioni, 2° anno della Facoltà [di Architettura]. (Roma, Castellani, 1936). 1 vol., 271 pp., 26×18 cm. Litografia. (R. Università degli Studi, Roma: Facoltà di Architettura).

1937

[192] *Algebra* (in collab. con U. BINI), per le Scuole tecniche agrarie, Scuole professionali femminili. Corsi preparatori degli Istituti tecnici; *Algebra e nozioni di trigonometria* (in collab. c. s.), per le Scuole tecniche industriali; *Algebra e nozioni di matematica finanziaria* (in collab. c. s.), per le Scuole teniche commerciali (Firenze, Vallecchi, 1937). 1 vol. cad.

[193] *Contributi alla teoria delle serie e dei sistemi d'equivalenza sulle varietà algebriche*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *8* (1937), n. 8, pp. 387–410.

[194] *Scienza pura e applicazioni della scienza*, Discorso inaugurale al *1° Congresso dell'Unione Matem. Italiana, Firenze, 1937*: Atti, pp. 13–25 (Bologna, Zanichelli, 1938). Riprod. in « Scienza e tecnica », *1* (1937), n. 4, pp. 81–89.

[195] *Questions pédagogiques liées à l'enseignement moyen des mathématiques* (in lingua giapponese) (Tokyo, Università di Scienze e Lettere, 1937), 1 fasc., 9 pp.

[196] *Sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica come sistemi razionali* (*Note I e II*), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *25* (1937), pp. 529–532, 679–682.

[197] *Giappone d'oggi*, Nuova antologia, a. 72 (1937), pp. 151–164.

[198] *Algebra elementare* (in collab. con U. BINI), per le Scuole medie inferiori. (Firenze, Vallecchi, 1937). 1 vol., 22×14 cm.

[199] *I sistemi d'equivalenza sulle varietà algebriche e le loro applicazioni*, Atti del I Congresso dell'Unione Matematica Italiana, (1937), pp. 58–68.

[200] *La geometria delle funzioni analitiche di più variabili e i teoremi d'esistenza e di unicità ad esse relativi*, Annali di Matematica, (4) *17* (1937), pp. 221–261.

[201] *Guglielmo Marconi*, Bollettino della R. Università per Stranieri di Perugia, *9* (1937), pp. 427–443.

[201 *a*] *Scienza che diventa poesia: il genio e la praticità dell'inventore*, L'illustrazione italiana, a. 64 (1937), p. 823.

1938

[202] *Relazioni tra i periodi degli integrali multipli d'una varietà algebrica*, Memorie della R. Accademia d'Italia, *9* (1938), n. 3, pp. 121–146.

[203] *Intorno alla teoria delle serie di equivalenza sulle curve riducibili*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (6) *27* (1938), pp. 53–56.

[204] *Aritmetica* (in collab. con M. MASCALCHI), per le Scuole tecniche (Firenze, Vallecchi, 1938). 1 vol., 112 pp., 24×14 cm.

[205] *Geometria e applicazioni*, per le Scuole tecniche (Firenze, Vallecchi, 1938). 1 vol., 24×14 cm.

1939

[206] *Un'ampia estensione del criterio di Plücker–Clebsch*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (2), a. 1 (1939), n. 2, pp. 97–99.

[207] *La teoria generale delle corrispondenze fra due varietà algebriche e i sistemi d'equivalenza*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hansischer Universität, *13* (1939), pp. 101–112.

[208] *Università e laboratori di ricerca*, Scienza e tecnica, *3* (1939), pp. 332–333.

[209] *Le matematiche in Italia*, Gli annali delle università d'Italia, a. 1 (1939), n. 1, pp. 40–44.

[210] *Galileo e il metodo sperimentale* (Discorso generale), Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Riun. 28 [Pisa, 1939], *1* (1940), pp. 5–23. Riprod. col titolo *Galileo e il pensiero moderno*, « Il libro nel mondo », Rassegna bibliografica, a. 1 (1940), nn. 6–7, pp. 5–23. Cfr. anche l'ulteriore articolo cit. in [238].

[211] *Archimede*, Scienza e tecnica, *3* (1939), pp. 737–752.

[212] *Interventi al Convegno di Padova per l'istruzione media, classica, scientifica e magistrale*, Scuola e cultura, (1939).

1940

[213] *L'Istituto Nazionale di Alta Matematica e i suoi compiti*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, (2) a. 2 (1940), n. 2, pp. 142–146.

[214] *Discorso per l'inaugurazione dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica*, Scienza e tecnica, *4* (1940), pp. 272–276.

[215] *Anima del cielo*, « I quattro elementi nella poesia italiana contemporanea », a cura di F. Sapori, pp. 169–189 (Firenze, Vallecchi, 1940).

[216] *Ernesto Pascal*, Commemorazione presso la R. Accademia d'Italia, Annuario, *11* (1940), pp. 360–366, 411–413.

[217] *Relazione al Convegno di Messina per l'istruzione media, classica, scientifica e magistrale*, Scuola e cultura, (1940), pp. 136–138.

[218] *Caratterizzazione topologica delle superficie razionali e delle rigate*, « Festschrift », in onore di R. Fueter, « Viert. der Naturfors. Gesell. in Zürich », *75* (1940), pp. 51–60.

[219] *Relazione al Convegno di Firenze per l'istruzione classica, scientifica e magistrale*, Scuola e cultura, (1940), pp. 70–73.

[220] *I fondamenti della Geometria numerativa*, Annali di Matematica, (4) *19* (1940), pp. 153–242.

[221] *L'Istituto Nazionale di Alta Matematica e le sue funzioni pel progresso della scienza italiana*, Atti del II Convegno dell'Unione Matematica Italiana, (1940), pp. 26–35.

1941

[222] *In occasione dell'inizio dell'anno accademico 1940–41 del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (2), a. 3 (1941), n. 2, pp. 130–140.

[223] *La funzione scientifica dell'Università*, Annali delle Università Italiane, a. 2 (1941), n. 3, pp. 195–204.

[224] *Sulla classificazione delle rigate algebriche*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, (5) *2* (1941), pp. 1–32.

[225] *Valore sociale della scienza e necessità attuali dell'organizzazione scientifica*, Romana, a. 5 (1941), n. 2, 13 pp.

[226] *Nozioni di geometria elementare, con cenni storici*, per la Scuola media (Firenze, Vallecchi, 1941). 1 vol., 24×14 cm.

[227] *Nozioni di aritmetica pratica con cenni storici* (con la collab. di M. MASCALCHI), per il 1° e 2° anno della Scuola media (Firenze, Vallecchi, 1941). 1 vol., VIII + 177 pp., 24×14 cm.

[228] *L'opera scientifica di Gaetano Scorza*, Annali di Matematica, (4) *20* (1941), pp. 1–20.

[229] *La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica,* Memorie della R. Accademia d'Italia, *12* (1941), pp. 337–430.

[230] *Due anni di vita del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica,* Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni, *13* (1941), 9 pp.

[231] *Prefazione* al volume: G. MARCONI, « Gli scritti... », pp. V–VIII (Roma, R. Accademia d'Italia (1941). Trad. tedesca in: G. MARCONI, « Schriften... », pp. V–VIII (Roma, R. Accademia d'Italia, 1943).

[232] *Il teorema di Riemann–Roch sopra le superficie per curve dotate di componenti multiple,* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (2), a. 4 (1942), pp. 1–7.

[233] *L'attività dell'Istituto di Alta Matematica,* Scienza e tecnica, *5* (1941), pp. 740–743.

[233 *a*] *Marconi:* Celebrazione fatta alla radio... nell'annuale della nascita, Radiocorriere, (1941) *19*, p. 5.

1942

[234] *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche,* a cura di F. CONFORTO ed E. MARTINELLI (Roma, Cremonese, 1942). 1 vol., VI+417 pp., 25×17 cm. [Pubblicazioni dell'Istituto Matematico dell'Università di Roma]. Cfr. [375] e [384].

[235] *Sul limite dell'intersezione di due curve variabili sopra una superficie, le quali tendano ad avere una parte comune,* Rendiconti della R. Accademia d'Italia, (7) *3* (1942), pp. 410–414.

[236] *Sulle sezioni spaziali delle varietà algebriche normali,* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (2), a. 4 (1942), pp. 81–82.

[237] *Nozioni di algebra elementare con cenni storici* (in collab. con U. BINI), per la Scuola media (Firenze, Vallecchi, 1942). 1 vol.

[238] *Galileo e il pensiero moderno,* Nuova antologia, a. 77, *422* (1942), pp. 3–14. Cfr. [210].

[239] *Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica,* Rendiconti della R. Accademia d'Italia, (7) *3* (1942), pp. 547–555.

[240] *Sugli integrali semplici di 1ª specie e sulle involuzioni irregolari appartenenti ad una varietà o superficie algebrica,* Annali di Matematica, (4) *21* (1942), pp. 1–20.

[241] *Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche,* Commentationes: Pontificia Academia Scientiarum, a. 6, *6* (1942), pp. 997–1029.

[242] *Lezioni di analisi* (in collab. con G. SCORZA-DRAGONI). Vol. II, pt. 1: *Serie di funzioni; Applicazioni geometriche; Integrali rettilinei; Funzioni di più variabili; Derivazione e integrazione ad esse inerenti* (Bologna, Zanichelli, 1942), 1 vol., VII + 298 pp., 24×16 cm. Ristampa 1948. 4ª ed. 1955.

[243] *Matematica e civiltà,* Scienza e tecnica, *6* (1942), pp. 535–548.

[243 *a*] *Prefazione* al volume: G. SCORZA, « Gruppi astratti », a cura di G. Scorza Dragoni e G. Zappa, pp. V–VII (Roma, Perella [poi Cremonese], 1942). [Pubblicazioni dell'Istituto Matematico della R. Università di Roma].

1943

[244] *Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica,* Commentarii mathematici helvetici, *15* (1943), pp. 238–248.

[245] *La matematica italiana nell'ultimo ventennio,* Annali delle università d'Italia, a. 4, numero speciale sul tema *Scienza e università italiane in un ventennio di regime fascista,* (1943), pp. 83–91.

[246] *Über die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durschnitte von Formen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, *15* (1943), pp. 97–119.

[247] *A proposito d'un teorema di Hartogs*, Commentarii mathematici helvetici, *15* (1943), pp. 350–352.

[248] *Geometria elementare*. Vol. I (Firenze, Vallecchi, 1943). 1 vol., 132 pp., 24×14 cm.

[249] *Algebra e analisi* (in collab. con U. BINI), vol. I (Firenze, Vallecchi, 1943), 1 vol.

[250] *Geometria piana e solida* (Firenze, Vallecchi, 1943). 1 vol., 201 pp., 24×14 cm.

[251] *Algebra elementare* (in collab. con U. BINI), vol. I (Firenze, Vallecchi, 1943). 1 vol., 126 pp., 24×14 cm.

[252] *A proposito del «De prospectiva pingendi» di Pier della Francesca*, Atti e Memorie della R. Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze, Arezzo, *27–28* (1943), 12 pp.

[253] *Sopra una proprietà topologica fondamentale delle superficie algebriche*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (2) (1943), n. 4, pp. 1–8.

1944

[254] *Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (4) *23* (1944), pp. 149–181.

1945

[255] *Matematica e matematici d'oggi*, Atti del Convegno matematico dell'8–12 novembre 1942 [presso l'Istituto Naz. di Alta Matematica], pp. 12–23 (Roma, Bardi, 1945).

[256] *Le funzioni periodiche di più variabili*, Commentarii mathematici helvetici, *18* (1945), pp. 16–29.

1946

[257] *Prospettive atomiche*, Osservatore romano, 21 aprile 1946.

[258] *Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario e di una forma di un iperspazio*, Annali di Matematica, (4) *25* (1946), pp. 3–41.

[259] *La Pontificia Accademia delle Scienze*, pp. 615–630, Vaticano (Firenze, Sansoni, 1946). Riprod. nel vol. [388], pp. 46–67.

[260] *Vincoli della materia e libertà dello spirito*, Università (Roma), fasc. fuori serie sul tema « Spiritualizzazione della natura », (1946), pp. 9–17. Riprod. nel vol. [388], pp. 351–356.

[261] *Le varietà multiple diramate e il loro teorema d'esistenza*, Memorias de Matematica del Instituto J. Juan, Madrid, *4* (1946), 17 pp. [Consejo Superior de Investigaciones Cientificas].

[262] *Annibale Comessatti* (Necrologia), Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (3), a. 1 (1946), pp. 59–61; in spagnolo, Revista matem. hispano-americana, (4) *7* (1947), n. 5, pp. 239–242.

[263] *Michele De Franchis* (Necrologia), Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (3), a. 1 (1946), pp. 62–64; in spagnolo, Revista matem. hispano-americana, (4) *7* (1947), n. 6, pp. 279–281.

1947

[264] *Materia e causalità. Energia e indeterminazione*, Scientia, *81* (1947), pp. 49–59. Anche in lingua francese, Riprod. in ital., nel vol. [388], pp. 25–45.

[265] *Funzioni quasi abeliane.* (Città del Vaticano, P. Acad. Scient., 1947). 1 vol., 327 pp., 24×17 cm. [Pontificia Academia Scientiarum: Scripta varia, *4*].

[266] *Matematica e filosofia*, Sophia (Padova), a. 15 (1947), pp. 269–279.

[267] *Teoremi di regolarità sopra una superficie algebrica*, Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, (5) *6* (1947), pp. 346–352.

[267 *a*] *Prefazione* al volume: A. GARBOLI, «Credo di un tecnico», pp. 11–13 (Roma, «Atlantica», 1947).

1948

[268] *Fondamenti di geometria algebrica.* Lezioni tenute nell'anno accademico 1946–47 (Padova, Milani, 1948). 1 vol., III + 172 pp., 25×17 cm. Litografia [Scuola Normale Superiore, Pisa: «Quaderni matematici», 2].

[269] *La scienza e le soglie del mistero*, Il cristianesimo e le scienze, *1*: Scienza e mistero, pp. 281–315 (Roma, Editrice «Studium Christi», 1948). Riprod. nel vol. [388], pp. 68–101.

[270] *Il punto di vista gruppale nei vari tipi di equivalenza sulle varietà algebriche*, Commentarii mathematici helvetici, *21* (1948), pp. 189–224.

[271] *Sul gruppo di monodromia d'uno spazio lineare multiplo diramato*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (3), a. 3 (1948), n. 1, pp. 1–3.

[272] *Introduzione alla geometria algebrica: Geometria numerativa.* Fasc. I (Roma, Docet, 1948). 1 vol., 217 pp., 24×17 cm. Litografia (ved. [279]).

[273] *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione*, Annali di Matematica, (4) *26* (1948), pp. 221–270.

1949

[274] *Archimede*, Archimede, a. 1 (1949), n. 1, pp. 3–6.

[275] *Poincaré.* Introduzione al libro omonimo, pp. 7–42 (Firenze, Casa Editrice «L'Arco», 1949).

[276] *L'Istituto di Alta Matematica*, Idea (Roma), 22 maggio 1949.

[277] *Gli assoluti della relatività*, Idea (Roma), 31 luglio 1949.

[278] *Grundlagen der abzählenden Geometrie, I* (Wolfenbüttel, 1949). 1 vol., 123 pp.

[279] *Introduzione alla geometria algebrica: Geometria numerativa.* Fasc. II (Roma Docet, 1949). 1 vol., 192 pp., 24×17 cm. Litografia. Cfr. [272].

[280] *Itinerario d'uno scienziato verso la fede*, Il Simbolo, *6*, ... *E si fece uomo*, pp. 177–190 (Assisi, «Pro Civitate Christiana» 1949). 2ª ed., 1955 (pp. 157–168). Riprod. nel vol. [388], pp. 102–118.

[281] *L'universo visto da un matematico*, Archimede, a. 1 (1949), n. 5, pp. 3–6. Ripubbl., Quaderni dell'ACI (Torino), maggio 1949, Riprod. nel vol. [388], pp. 257–263.

[282] *La géométrie algébrique italienne: sa rigueur, ses méthodes, ses problèmes*, Colloque de géométrie algébrique, Liège, 19–20–21, déc. 1949», pp. 9–55.

[283] *L'insegnamento universitario*, L'ultima (Firenze), n. 40 (1949), pp. 12–21.

[283 *a*] *Ricordo di una vita fiorente*, pp. 43–44, in L. BARTOLINI *et alii*: «Una pittrice incantevole: Ofelia Duranti Maroi». Con prefazione di E. Giovannetti (Bergamo, Istituto Italiano d'Arti Grafiche, 1949).

1950

[284] *Parole di apertura del Convegno matematico di Parma del 4 giugno 1949*, Rivista di matematica dell'Università di Parma, *1* (1950), pp. 101–104.

[285] *Caratteri e indirizzi della matematica moderna* (in collab. con F. CONFORTO), Enciclopedia delle matematiche elementari, *3* (Milano, Hoepli, 1950), pt. 2, pp. 751–813.

[286] *Fondamenti per una teoria generale dei connessi*, Acta salmaticensia, iussu Senatus Universitatis edita. Colleccióne de memórias y trabajos científicos: Ciencias: Sección de matemática, *3* (1950), 28 pp. [Univesidád de Salamanca].

[287] *Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria generale dell'eliminazione*, Mathematische Zeitschrift, *52* (1950) pp. 827–851.

[288] *Legami fra certe proprietà aritmetiche delle superficie e la teoria della base*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, (5) *9* (1950), pp. 59–69.

[289] *Memorie scelte*. Vol. I, a cura di B. SEGRE (Bologna, Zuffi, 1950). 1 vol., XX + 458, pp. 24×17 cm. (Comitato naz. per le onoranze a F. Severi).

[290] *Radioconversazione da New-York*, Archimede, a. 2 (1950), n. 5–6, pp. 162–164.

[291] *La matematica russa: le sue tradizioni e i suoi progressi recenti*, Archimede, a. 2 (1950), n. 5–6, pp. 177–182.

[291 *a*] *Dalla soglia del mistero alla soglia dell'Essere*, pp. 66–80, in G. Rossi, ed.: «Uomini incontro a Cristo», 2ª ed. (Assisi, « Pro Civitate Christiana », 1951). [Non è stato possibile controllare se l'art. sia contenuto anche nella 1ª ed., presumibilmente stampata nel 1950]. Varie ed. successive. 15ª ed. 1962, pp. 66–80.

1951

[292] *Sul concetto di numero*, Archimede, a. 3 (1951), n. 1, pp. 23–25.

[293] *La crisi del pensiero moderno*, Nuova antologia, a. 86, *451* (1951), pp. 225–244. Riprod. nel vol. [388], pp. 164–194. Cfr. anche [304].

[294] *Il valore sociale della scienza*, Ingegneria ferroviaria, *6* (1951), n. 4, pp. 257–261; Responsabilità del sapere, a. 5 (1951), n. 24, pp. 7–18.

[295] *Intuizionismo e astrattismo nella matematica contemporanea*, Atti del III Congresso dell'Unione Matematica Italiana, (1951), pp. 27–40.

[296] *Divagazioni anche didattiche sulla matematica del novecento*, Archimede, a. 3 (1951), n. 2, pp. 45–55.

[297] *Les images géométriques des ideaux de polynomes*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *232* (1951), pp. 2395–2398.

[298] *Propriétés des images geométriques des ideaux de polynomes*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *233* (1951), pp. 15–17.

[299] *Lezioni di analisi* (in collab. con G. SCORZA DRAGONI), Vol. III: *Equazioni differenziali ordinarie e sistemi; Problemi al contorno relativi; Serie trigonometriche; Applicazioni geometriche* (Bologna, Zuffi, 1951), 1 vol., VI + 255 pp., 25×16 cm.

[300] *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: Seconda memoria*, Annali di Matematica, (4) *32* (1951), pp. 1–81.

[301] *Il concetto di spazio*, Archimede, a. 3 (1951), pp. 144–146.

[302] *La donna e la matematica*, Archimede, a. 3 (1951), pp. 210–212. [Radioconversazione tenuta il 18 maggio 1951].

[303] *I fondamenti remoti e prossimi della geometria algebrica*, Rendiconti del Seminario Matematico di Torino, *10* (1951), pp. 67–95.

[304] *La matematica e la crisi del pensiero moderno*, « Comitato Cattolico Docenti Universitari: Relazioni di F. Carnelutti, F. Severi, A. Pagliaro, Roma, 1950–51 », fasc. 1, pp. 25–52 (Roma, Editrice « Studium », 1951). Riproduce sostanzialmente l'articolo [293].

[305] *Lecciones de análisis*, tomo primero (Barcelona, Editorial Labor S. A., 1951). 1 vol., 440 pp., 21×15 cm.

[306] *Ritratto di Einstein*, Ecclesia (Città del Vaticano), (1951), n. 12, pp. 625–629.

[307] *Le diverse concezioni di varietà nella geometria algebrica*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei XL, (4) *2* (1951), pp. 155–181.

[308] *Funzioni analitiche e forme differenziali*, Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana, *1* (1951), pp. 125–140.

[308 *a*] *Matematica*. [Cenno storico sugli studi matematici in Italia dalle origini ai nostri giorni, con Elenco bibliografico dal 1937 al 1950], pp. 639–652, « Il libro italiano d'oggi: Catalogo ufficiale trilingue [italiano, francese, arabo] dell'Esposizione Cinquantenaria dal 1900 ai nostri giorni, Cairo, 1951 » (Roma, Bardi, 1951).

1952

[309] *Il progresso tecnico e la civiltà*, Idea, Settimanale di cultura, n. 1 (1952).

[310] *Complementi biobliografici ai « Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche »: Seconda memoria*, Annali di Matematica, (4) *33* (1952), pp. 1–3.

[311] *Una nuova visione della geometria sopra una curva*, Acta, Pontificia Academia Scientiarum, *14* (1952), n. 13, pp. 143–152.

[312] *Guido Castelnuovo*, Idea, Settimanale di cultura, n. 19 (11 maggio 1952).

[313] *Ulteriori complementi alla teoria della base*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (2) *1* (1952), pp. 71–87.

[314] *La scienza e il pensiero moderno*, F. Selvaggi, ed.: « Valore e metodo della scienza », pp. 23–35 (Roma, Coletti, 1952). Riprod. nel vol. [388], pp. 210–229.

[315] *Les bibliothèques en tant qu'instruments de travail scientifique*, Actes du Comité International des Bibliothèques (Roma), *16* (1952), pp. 19–22.

[316] *L'uomo e il mistero dell'universo*, La scienza per i giovani, a. 1 (1951), pp. 82–85. Ripubbl. nel volume: « Dalla terra alla luna », (Torino, Ediz. Radio Italiana, 1952), nonché nel vol. [388], pp. 140–147.

[317] *Nella luce dell'Eremo*, Camaldoli, a. 6 (1951), n. 30, pp. 97–99. Riprod. nel vol. [388], pp. 305–307.

[318] *Ricordo di Guido Castelnuovo*, Archimede, a. 4 (1952), n. 3, pp. 130–131.

[319] *Un'osservazione sul limite d'applicabilità della formula di postulazione per una varietà algebrica*, Atti dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere, *9* (1952), pp. 23–28.

1953

[320] *Leonard and mathematics*, East and West (ISMEO), a. 3 (1953), n. 4, pp. 233–235.

[321] *Leonardo e la matematica*, Scientia, a. 47 (1953), n. 2, pp. 41–44. Anche in francese (Suppl., pp. 25–28).

[322] *Dante e la scienza dei suoi e dei nostri tempi*, pp. 71–92, « Il Trecento », a cura della Libera Cattedra di Storia della Civiltà Fiorentina (Firenze, Sansoni, 1953).

[323] *Pirandellismo nella scienza*, Corriere della sera, Milano, 13 marzo 1953.

[324] *La chiave dell'universo*, Corriere della sera, Milano, 18 aprile 1953.

[325] *Confidenze*, La scienza per i giovani, a. 2 (1953), n. 5–6, pp. 65–69.

[326] *La scienza tende ad escludere che la vita sia nata da sola*, Corriere della sera, Milano, 25 giugno 1953.

[327] *Scienza e religione, ieri ed oggi*, Vita e pensiero (Milano), a. 36 (1953), pp. 517–526. Riprod. nel vol. [388], pp. 119–139.

[328] *Quelques problèmes se rapportant aux fonctions analytiques de plusieurs variables*, Centre Belge de Recherches Mathématiques: Colloque de Bruxelles, (1953), pp. 9–20.

[329] *Geometria algebrica ed algebra astratta*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, *23* (1951), pp. 114–151.

1954

[330] *Sulla caratterizzazione dei corpi di funzioni quasi abeliane*, Atti del Convegno di geometria differenziale (Roma, Cremonese, 1954), pp. 21–26.

[331] *Dalla relatività all'assoluto*, Discorso, pronunciato a Camaldoli il 28 agosto 1953, «La scuola e l'uomo», Roma, gennaio 1954. Riprod. nel vol. [388], pp. 148–163.

[332] *Un grande sconosciuto*, Messaggero, Roma, 25 maggio 1954.

[333] *Per Guido Castelnuovo*, Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, (5) *13* (1954), pp. 6–9.

[334] *Leonardo, uomo, artista, scienziato*, «Leonardo: Saggi e ricerche», a cura del Comitato nazionale per le onoranze a Leonardo da Vinci, nel 5° Centenario della nascita, 1452–1952 (Roma, Poligrafico dello Stato, 1954), pp. 11–25. Riprod. nel vol. [388], pp. 276–302.

[335] *Leonardo* (Roma, Editrice «Studium», 1954), I vol., 225 pp., 17×12 cm. («Universale Studium», 36).

[336] *Some remarks on the topological characterization of algebraic surfaces*, Studies in mathematics and mechanics presented to R. von Mises, (New York, Academic Press, 1954), pp. 54–61.

[337] *In memoria di C. Ricci Curbastro*. Discorso tenuto a Lugo il 2 maggio 1954, pubblicato a cura del Liceo scientifico di Lugo, pp. 55–70.

1955

[338] *Assoluto e relativo*, Nuova antologia, a. 90, *463* (1955), pp. 291–308. Riprod. nel vol. [388], pp. 230–256.

[339] *Scoppiò 50 anni fa la «rivoluzione» di Einstein*, Corriere della sera, Milano, 20 aprile 1955.

[340] *Celebrazione di Einstein*, RAI, 19 aprile 1955.

[341] *Relatività e senso comune*, RAI, 2 maggio 1955.

[342] *Alberto Einstein*, Idea, Settimanale di cultura, 8 maggio 1955.

[343] *Sulla teoria degl'integrali semplici di 3ª specie sopra una superficie o varietà algebrica*, Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, (5) *14* (1955), pp. 551–563.

[344] *Aspetti matematici dei legami fra relatività e senso comune*, M. Pantaleo, ed.: «Cinquant'anni di relatività» (Firenze, Editrice Universitaria, 1955), pp. 313–333,

[345] *Sugli antigeneri d'una varietà algebrica*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *18* (1955), pp. 131–140.

[346] *Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze algebriche*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *18* (1955), pp. 357–361.

[347] *Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze razionali*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», (8) *18* (1955), pp. 443–451.

[348] *I fondamenti logici della relatività*, Scientia, (6), a. 49, *90* (1955), n. 71, pp. 227–282, [anche in francese, pp. 161–166].

[349] *Alberto Einstein e la sua dottrina*, Nuova antologia, a. 90, *464* (1955), pp. 163–178.

[350] *Del teorema di Riemann–Roch per curve, superficie e varietà: Le origini storiche e lo stato attuale*, Centro Internazionale Matematico Estivo, 1° Ciclo, Varenna, Villa Monastero, 29 giugno–8 luglio 1955, pp. 1–44 (Roma, Istituto Matematico della Università, 1955).

[351] *Complementi alla teoria della base*, Annali di Matematica, (4) *40* (1955), pp. 1–14.

[352] *L'eterno nel mondo*, G. Rossi, ed.: « L'eterno nel tempo », pp. 81–85 (Assisi, « Pro Civitate Christiana », 1955). 2ª ed., 1956. Riprod. nel vol. [388], pp. 324–328.

[353] *Les formes de première et de seconde espèce attachées à una variété algébrique*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *242* (1955), pp. 59–61.

[354] *Les irrégularités d'une variété algébrique et leurs liens avec les formes de première espèce*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *242* (1955), pp. 225–227.

[355] *Scienza ed arte*, Atti e Memorie dell'Accademia Petrarca di Lettere, Scienze ed Arti di Arezzo, *36*, nuova ser. (1955), 19 pp.

[356] *Le caratteristiche delle coniche nello spazio*, Atti dell'Unione Matematica Argentina, *17* (in onore di Beppo Levi) (1955), pp. 251–264.

1956

[357] *Galileo scienziato*, « Il sei–settecento », (Firenze, Sansoni, 1956), pp. 91–106.

[358] *Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà alebrica*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *20* (1956), pp. 7–16.

[359] *Il Papa e la scienza*, « Volume offerto al S. Padre per il suo 80° genetliaco », pp. 461–478 (Città del Vaticano, Poliglotta Vaticana, 1956). Riprod. nel vol. [388]. pp. 329–350.

[360] *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: III Memoria*, Annali di Matematica, (4) *41* (1956), pp. 161–199.

[361] *Uno sforzo di chiarificazione della dottrina di Einstein, ricordando l'uomo*, Quaderni dell'ACI (Torino), n. 20 (1956), pp. 41–52, Riprod. nel vol. [388], 195–209.

[362] *Valore delle verità scientifiche. I: Ricordo di Luigi Fantappiè*, Idea, Settimanale di cultura, 7 ottobre 1956. Riprod. nel vol. [388], pp. 311–316.

[363] *Valore delle verità scientifiche. II: Responsabilità presenti e future*, Idea, Settimanale di cultura, 14 ottobre 1956. Riprod. nel vol. [388], pp. 317–323.

[364] *Problèmes résolus et problèmes nouveaux dans la théorie des systèmes d'équivalence*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, *3* (1956), pp. 529–541.

[365] *Osservazioni sui sistemi gruppali d'equivalenza lineare e d'quivalenza algebrica per le ipersuperficie d'una varietà*, Abhand. aus dem. math. Sem. der Universität Hamburg, *20* (in onore di W. Blaschke) (1956), pp. 127–135.

[366] *Sul secondo principio di relatività e sopra una nozione « naturale » di tempo*, Commentationes: Pontificia Academia Scientiarum, a. 16, *16* (1956), n. 8, pp. 345–353. Riprod. nel vol. [388], pp. 264–275.

[367] *Fonctions et variétés quasi–abeliennes*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, *3* (1956), pp. 521–528.

[368] *Scienza e fede in Fantappié*, Responsabilità del sapere, a. 10, *48* (1956), pp. 315–327. Riprod. nel vol. [388], pp. 357–371.

1957

[369] *Corrado Segre*, «C. Segre: Memorie scelte», *I*, pp. 5–12 (Roma, Cremonese, 1957).

[370] *On the symbol of virtual intersection of algebraic varietes*, pp. 157–166, Algebraic geometry and topology: A Symposium in honour of S. Lefschetz (Princeton, N. J., 1957).

[371] *Réflexions et problèmes sur la topologie des variétés algébriques*, Vortrag der Vormittangssitzung am Montag den 11.10.1954, «Schriftenreihe des Institut für Mathematik, bei der Deutsche Akademie der Wissenschaften, Berlin», (1957), pp. 235–244.

[372] *Pasqua ad Assisi*, Rocca (Assisi), a. 16, n. 9 (1957). Riprod. nel vol. [388], pp. 308–310.

[373] *La matematica nella prima metà del secolo XX*, Scientia, (6), a. 51, *92* (1957), n. 537, pp. 20–26 [anche in francese, pp. 11–17].

[374] *Les irregularités des variétés algébriques et les systémes adjoints*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *244* (1957), pp. 2333–2336.

[375] *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*. Vol. II (Roma, Cremonese, 1957). 1 vol., IV + 464 pp., 25×17 cm. (Il vol. I è costituito dall'opera [234]).

[376] *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: Ulteriore contributo alle teorie delle irregolarità*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei XL, (4) *8* (1957), pp. 89–97.

[377] *Commemorazione di F. Enriques*, Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, (5) *16* (1957), pp. 3–8.

[378] *Commemorazione di L. Fantappiè*, Rendiconti di matematica e delle sue Applicazioni, (5) *16* (1957), pp. 161–169.

[379] *Alcune osservazioni sopra la caratterizzazione topologica delle superficie algebriche*, Rendiconti di matematica e delle sue Applicazioni, (5) *16* (1957), pp. 161–169.

1958

[380] *Il teorema di Riemann–Roch per curve, superficie e varietà: questioni collegate* (Berlin, Springer, 1958). 1 vol., VIII + 131 pp., 23×15 cm. [«Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzegbiete...», Neue Folge, Hf. 17].

[381] *Lezioni sulle funzioni analitiche di più variabili complesse*, tenute nel 1956–57 all'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma (Padova, Milani, 1958). 1 vol., XIV + 255 pp., 25×17 cm.

[382] *Dal mistero alla luce*, Rocca (Assisi), a. 17, (1958), n. 23, p. 9. Riprod. nel vol. [388], pp. 372–373.

1959

[383] *In verità ti dico: oggi sarai meco in Paradiso*, Rocca (Assisi), a. 18, (1959), n. 6, p. 16.

[384] *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*. Vol. III: *Sviluppo delle teorie degli integrali semplici e multipli, sopra una superficie o varietà e delle teorie collegate*, (Roma, Cremonese, 1959). 1 vol., VIII + 464 pp., 25×17 cm.

[385] *La tecnica e il latino*, Corriere d'informazione, Milano, 14–15 aprile 1959.

[386] *Nuove relazioni fra il genere aritmetico d'una ipersuperficie generale A tracciata sopra una varietà algebrica e i generi aritmetici delle varietà caratteristiche di A*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (*8*) *26* (1959), pp. 3–5.

[387] *Voli nello spazio: Gioventù, vecchiaia,* Il tempo, 2 settembre 1959.

[388] *Dalla scienza alla fede* (Assisi, « Pro Civitate Christiana », 1959). 1 vol., 375 pp., 19×13 cm. Ristampe succ. (3ª ed., 1962).

[389] *La Pontificia Accademia delle Scienze e Padre Agostino Gemelli,* Vita e pensiero, a. 42 (1959), pp. 631–645.

[390] *Sulle irregolarità delle varietà algebriche, Nota I,* Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *27* (1959), pp. 3–13.

[391] *Materia e antimateria,* Ingegneria ferroviaria, *14* (1959), n. 11, pp. 963–965.

[392] *Sulle irregolarità delle varietà algebriche, Nota II,* Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *27* (1959), pp. 149–154.

[393] *Una sintesi dei concetti fondamentali di algebra astratta,* La scuola in azione, n. 12 (1959), pp. 9–17.

[393 *a*] *Prefazione* al volume: L. FANTAPPIÉ, «Lezioni su i gruppi topologici», a cura di F. Succi, pp. I–II (Roma, Veschi, [1959]), Istituto Nazionale di Alta Matematica.

1960

[394] *Sur l'irrégularité des variétés algébriques,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *250* (1960), n. 4, pp. 635–638.

[395] *Sur un point de la théorie des irrégularités des variétés algébriques,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *250* (1960), n. 10, p. 1759.

[396] *Materia, antimateria, materia pura,* Ingegneria ferroviaria, *15* (1960), n. 3, pp. 185–187.

[397] *Fondamenti della Geometria sulle varietà algebriche. VI Contributo: Ulteriori proprietà fondamentali delle irregolarità,* Annali di Matematica, (4) *49* (1960), pp. 283–298.

[398] *Sopra una relazione fondamentale fra taluni, importanti caratteri di una varietà algebrica,* Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *28* (1960), pp. 527–531.

[399] *Verso una nuova visione del mondo fisico,* Responsabilità del sapere, *53* (1960), pp. 7–12.

[400] *Nuove relazioni fra il genere aritmetico di un'ipersuperficie generica elementare A, tracciata sopra una varietà algebrica V_d e i generi aritmetici delle varietà caratteristiche di $|A|$,* Annali di Matematica, (4) *50* (1960), pp. 419–420.

1961

[401] *Sulle varietà totalmente regolari,* Annali di Matematica, (4) *53* (1961), pp. 1–4.

[402] *Dalla materia pura alle particelle del principio di scambio nel cronotopo* (Nota riassuntiva), Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei XL, (4) *12* (1961), pp. 3–10.

[403] *Une démonstration dans le domaine de la géométrie algébrique classique de la relation de Severi–Kodaira,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, *40* (1961), pp. 189–195.

1963

[404] *Aspetti e scambi della materia* (in collab. con F. PANNARIA), Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *6* (1963), sez. II, pp. 121–137.

MEMORIE E NOTE

I.

RICERCHE SULLE CONICHE SECANTI DELLE CURVE GOBBE (*)

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *35* (1900), pp. 526–541 (**).

II.

SOPRA LE CONICHE CHE TOCCANO E SECANO UNA O PIÙ CURVE GOBBE

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *36* (1900), pp. 74–93 (***).

Le due Note porgono l'occasione di qualche riflessione complementare. Esse contengono le espressioni simboliche delle condizioni (delle dimensioni da 1 a 8) affinché una conica si appoggi in uno o più punti (fino ad 8 distinti) ad una curva sghemba C di ordine n e di rango r (priva di punti multipli), eventualmente avendo in qualcuno dei punti stessi un contatto semplice con C (1).

La prima delle due Note riguarda i semplici appoggi, la seconda comprende anche il caso dei contatti. Le espressioni sono date in funzione delle caratteristiche semplici μ, ν, ϱ, considerate da Schubert, per la famiglia (irriducibile) V, ∞^8, contenente le coniche (irriducibili) dello spazio (alla quale appartengono come elementi di accumulazione le linee *piane* di 2° ordine riducibili): μ è la condizione, di dimensione 1 o semplice, perché una conica (dello spazio) abbia il suo piano passante per un punto dato; ν la

(*) In luogo di questa Nota e della successiva viene qui riprodotto il testo redatto dall'Autore a commento delle Note stesse, come apparso nel volume: F. SEVERI, *Memorie scelte*, vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, pp. 7–10 (N.d.R.).

(**) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 27 maggio 1900.

(***) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 18 novembre 1900.

(1) Molti dei numeri che si deducono dalle espressioni delle condizioni inerenti a semplici appoggi delle coniche sulla data curva, furono dati, quasi contemporaneamente, senza dimostrazione, da L. BERZOLARI, *Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere, (2) *33* (1900), pp. 664–674. e pp. 809–821. Le formule di Berzolari esprimono quei numeri in funzione di n, h (h numero dei punti doppi apparenti di C), invece che n, r. Altre notizie sul problema in questione e sulla sua estensione agli iperspazi trovansi nell'articolo *Géométrie énumérative* di ZEUTHEN e PIERI nella « Encyclopédie des Sciences mathématiques » (Paris, Gauthier-Villars, 1915, pag. 278).

condizione semplice perché una conica si appoggi ad una retta data; ϱ la condizione semplice perché una conica tocchi un piano dato. Nelle condizioni di semplice appoggio intervengono soltanto le caratteristiche μ , ν.

Le due Note vanno inquadrate nello stadio di sviluppo della geometria numerativa di mezzo secolo fa. Di fronte alle esigenze critiche moderne, gli strumenti usati hanno soltanto valore euristico, per quanto (secondo l'opinione di chi scrive) i risultati sieno sicurissimi.

Occorrerebbe invero:

a) Precisare che μ , ν , ϱ sono caratteristiche sufficienti per esprimere (secondo formule date da Schubert) le condizioni elementari che si usano nelle presenti ricerche, affinché una conica (dello spazio) passi per un punto dato (condizione doppia) o perché tocchi una data retta (condizione doppia) o perché tocchi un dato piano in un dato punto (condizione tripla). La determinazione delle caratteristiche si riduce ad un « problema della base » entro la varietà V; problema che diviene particolarmente delicato nel caso di varietà contenenti elementi degeneri (com'è appunto la V) (2).

b) Una volta stabilita la piena validità delle formule di Schubert cui si allude, occorrerebbe dimostrare la legittimità dell'applicazione del metodo funzionale (imaginato, com'è noto, da Cayley per la determinazione di numeri inerenti a rette secanti d'una curva algebrica sghemba).

Qui si suppone che ognuna delle condizioni cercate sia funzione soltanto dei caratteri proiettivi n , r di C e che la formula incognita resti valida quando si sostituisca a C una curva $C + C'$ spezzata in due componenti irriducibili (prive di punti multipli e di punti comuni) di caratteri n , r ; n', r'. Detta $\varphi(n , r)$ l'espressione richiesta della condizione (pura) di cui trattasi, che abbia la dimensione k, si viene così a scrivere una relazione funzionale simbolica del tipo:

$$(1) \qquad \varphi(n + n', r + r') = \varphi(n , r) + \varphi(n', r') + f(n , r ; n', r'),$$

la quale può riguardarsi come un'equazione fra numeri, supponendo mentalmente moltiplicati tutti i suoi termini per una qualunque condizione algebrica (pura) α, di dimensione $8 - k$. S'intende che la funzione f è già nota mercè l'applicazione di formule precedenti.

L'integrazione della (1) porge una φ con due costanti arbitrarie, che si determinano applicando la φ trovata a due curve particolari (di dati n , r opportunamente fissati) aventi ordini così bassi, che risulti per esse $\alpha\varphi(n , r) = 0$ (qualunque sia α). Così si ottengono due equazioni lineari, che permettono il calcolo delle due costanti arbitrarie.

(2) Si vedano a tal proposito le memorie di F. SEVERI: *Sui fondamenti della Geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche*, Atti R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed arti, 75 (1916), pp. 1121–1162, e *I fondamenti della geometria numerativa*, Ann. di Mat., (4) 19 (1940), pp. 153–242.

In verità, le formule esprimenti le condizioni perché una conica bisechi o trisechi C non sono ottenute col metodo funzionale, ma con lo spezzamento di C in un sistema connesso di n rette, avente $\frac{1}{2}r$ punti di connessione semplice (cioè di genere $p = \frac{1}{2}r - n + 1$ uguale al genere di C). Questo spezzamento non è senz'altro utilizzabile per altre condizioni di semplici incontri, di dimensione $k > 3$ (e meno che mai pel calcolo di condizioni ove intervengano contatti), perché, detta β una tal condizione, il prodotto $\alpha\beta$ inerente ad una C spezzata in quel sistema di rette resta soddisfatto, qualunque sia α, da infinite coniche.

Non basta però per l'applicazione del metodo il solo principio della conservazione del numero. Intanto, per l'applicazione rigorosa di tale principio, occorre sapere [3]:

α) che le condizioni di cui si tratta sono pure o irriducibili (e questo è facile a dimostrarsi);

β) che C può variare nella propria famiglia (irriducibile) fino a spezzarsi nel modo voluto, giacché l'applicazione del principio richiede che la particolarizzazione si riferisca ad un caso limite conseguibile sopra una varietà irriducibile.

Ma ciò non basta; e quel che esorbita dall'applicazione del principio della conservazione, è l'ipotesi implicita:

γ) che esista una formula esprimente ognuna delle condizioni cercate, la quale sia valevole per ogni curva di caratteri n, r, priva di punti multipli, irriducibile o spezzata in due parti *sconnesse*.

Ed è l'ipotesi che la curva spezzata sia sconnessa (essenziale per l'applicazione del metodo funzionale nella forma indicata), che richiede qualcosa di più della conservazione del numero, in quanto una curva sconnessa non può mai esser limite d'una curva irriducibile.

La questione α) fu oggetto (appunto in conseguenza delle ricerche di cui parliamo) d'un concorso bandito nel 1901 dall'Accademia danese delle Scienze, per iniziativa di Zeuthen; ma il concorso andò deserto, e alla α) fu data una risposta generale soltanto nel 1915 in due Note di F. Severi [4] e poi, più ampiamente, nell'Anhang G delle « Vorlesungen ueber algebraische Geometrie » dello stesso Autore [5].

(3) Si veda il § 1, n. 3 della prima Memoria citata in (2) ed i nn. 14–18 della seconda Memoria anche ivi citata.

(4) *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann* (Note I e II), Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 24_1 (1915), pp. 877–888 e pp. 1011–1020.

(5) Leipzig, Teubner, 1921; pag. 353. Una risposta per le curve di genere $p \leq 2$, e con metodo del tutto diverso, era stata data prima da BRILL (Math. Annalen, 1907).

Nella seconda di quelle Note lo spezzamento, di cui è provata la legittimità, si applica a stabilire (giustificandolo su qualche esempio) un principio generale, involgente una risposta affermativa all'ipotesi γ).

Lo stesso principio può ottenersi rispondendo (e lo scrivente pensa che la risposta sia affermativa) alla questione seguente:

È vero che ogni serie lineare covariante di una data serie lineare sopra una curva a moduli generali è linearmente legata, con coefficienti interi, a questa serie e alla serie canonica? È vero che la proprietà analoga vale, nei riguardi delle serie neutre, anche sopra una curva riducibile sconnessa o comunque connessa?

III.

I GRUPPI NEUTRI CON ELEMENTI MULTIPLI, IN UN'INVOLUZIONE SOPRA UN ENTE RAZIONALE (*)

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5) 91 (1900), pp. 379–381 (**).

Sia, sopra una curva razionale C, una serie lineare g_n^r. Un gruppo di $\nu = \sum_{i=1}^{t} \nu_i$ punti di C (dove le ν_i sono interi ≥ 1, che supponiamo disposti in ordine non crescente), il quale presenti $\nu - q$ invece di ν condizioni, ai gruppi della serie che debban contenerlo, dicesi *neutro* di specie q. La breve Nota dà il numero N di questi gruppi quando, essendo soddisfatte le condizioni:

$$\nu(r-k) - t = (k+1)(r-k) \quad , \quad n \geq \nu + r - k - 1 \, , \qquad (k = \nu - q - 1),$$

N è finito. Si ha precisamente:

$$N = \frac{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}{\alpha!\,\beta! \cdots \delta!}\, l! \binom{t}{l} \frac{[n-k-1]\,[n-k-2] \cdots [n-k-q]}{[r-k+q-1]\,[r-k+q-2] \cdots [r-k]} \, ,$$

ove il simbolo $[u]$ denota per semplicità tipografica $\binom{u}{r-k}$; l denota il numero delle ν diverse da 1; α il numero di quelle uguali a ν_1; β il numero di quelle uguali a $\nu_{\alpha+1}, \cdots$, δ il numero di quelle uguali a ν_l.

Il risultato è ottenuto con una semplice applicazione del principio di corrispondenza di Chasles. In esso restano compendiati molti particolari dati prima frammentariamente da altri Autori. Quando le ν son tutte uguali ad 1, sicché trattasi di gruppi neutri senza punti multipli, il problema coincide con quello del numero degli spazi plurisecanti di una curva razionale, assegnato per induzione da F. Meyer (1883) e da A. Tanturri (1900). Tale risultato è presupposto nella Nota.

(*) In luogo della Nota originale viene qui riprodotto il testo redatto dall'Autore a commento della Nota stessa, apparso nel volume: F. SEVERI, *Memorie scelte*, vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, p. 11 (N.d.R.).

(**) Nota presentata dal Socio Corrispondente C. Segre nella seduta del 17 giugno 1900.

IV.

LE COINCIDENZE DI UNA SERIE ALGEBRICA $\infty^{(k+1)(r-k)}$ DI COPPIE DI SPAZI A k DIMENSIONI, IMMERSI NELLO SPAZIO AD r DIMENSIONI (*)

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5) 9_2 (1900), pp. 321–326 (**).

Indicheremo, come spesso si usa, con $[k]$ uno spazio lineare di punti a k dimensioni, con $[\alpha_0 , \alpha_1 , \cdots , \alpha_k]$ la *forma fondamentale* costituita dai $[k]$ che hanno con un dato $[\alpha_0]$ un punto a comune, con un dato $[\alpha_1]$ una retta, $\cdots$, con un dato $[\alpha_{k-1}]$ un $[k-1]$, e che giacciono in un dato $[\alpha_k]$, essendo $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq r$, r denotando la dimensione dello spazio ambiente, ed essendo sempre lo spazio $[\alpha_i]$ immerso in $[\alpha_{i+1}]$. La condizione a cui si assoggetta un $[k]$ imponendogli di giacere in una forma $[\alpha_0 , \alpha_1 , \cdots , \alpha_k]$, la indicheremo con $(\alpha_0 , \alpha_1 , \cdots , \alpha_k)$: essa è di dimensione:

$$d = (k+1)r - \frac{1}{2}k(k+1) - \sum_0^k \alpha_i \text{ (1)}.$$

1. Dimostriamo che:

Se in un sistema $\infty^{(k+1)(r-k)}$ algebrico di coppie S , S' di $[k]$ si trovano un numero finito di coincidenze, questo numero è espresso da

$$x = \sum (\alpha_0 , \alpha_1 , \cdots , \alpha_k)(r - \alpha_k , \cdots , r - \alpha_0)', \tag{1}$$

ove il simbolo $(\alpha_0 , \alpha_1 , \cdots , \alpha_k)(r - \alpha_k , r - \alpha_{k-1} , \cdots , r - \alpha_0)'$ denota il numero delle coppie il cui spazio S appartiene alla forma $[\alpha_0 , \alpha_1 , \cdots , \alpha_k]$, mentre lo spazio S' corrispondente appartiene alla forma coniugata $[r - \alpha_k , \cdots , r - \alpha_0]$, e il sommatorio è esteso a tutti i possibili prodotti del tipo di quello scritto.

Suppongasi la (1) valida in $[r-1]$ e in $[r-2]$. Nella varietà data V di coppie di $[k]$ separiamo una varietà ∞^1, v, costituita dalle coppie incidenti secondo $[k-1]$ di un dato iperpiano π, e ognuna delle quali è contenuta in un $[k+1]$ insieme ad un punto dato O. Fissiamo quindi in $[r]$ un fascio

(*) Ristampato in F. SEVERI, *Memorie scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, pp. 13–18, con «Osservazioni complementari» in fine del lavoro, aggiunte dall'Autore in quella occasione (N. d. R.).

(**) Nota presentata dal Socio Corrispondente C. Segre e pervenuta all'Accademia prima del 2 dicembre 1900.

(1) Queste notazioni sono state introdotte da Schubert, a cui è pure dovuto il concetto di *forma fondamentale*, nel senso più generale.

di $[r-k-1]$ (entro un dato $[r-k]$), e chiamiamo omologhi due $[r-k-1]$ del fascio quando ad uno determinato di essi appoggiasi uno spazio S e all'altro uno spazio S' con quello accoppiato nella varietà v. In virtù del principio di corrispondenza di Chasles, avremo $y+y'$ coincidenze, y denotando il numero delle coppie della ∞^1 che hanno lo spazio S appoggiato a un dato $[r-k-1]$, e y' denotando il numero analogo con lo scambio di S in S'. Tali coincidenze si presentano:

a) Negli spazî $[r-k-1]$ del dato fascio a cui si appoggiano gli x spazî $[k]$ che noi ricerchiamo.

b) Nei t spazî $[r-k-1]$ che passano per i punti d'intersezione del dato $[r-k]$, con la varietà dei $[k-1]$ secondo cui si intersecano le coppie della varietà v.

c) Nei z spazî $[r-k-1]$ che congiungono il sostegno del fascio con le traccie sul dato $[r-k]$ dei $[k+1]$ appoggiati al sostegno suddetto, e ognun dei quali congiunge due spazî S, S' di v.

Dunque:

$$x = y + y' - t - z. \tag{2}$$

La y esprime il numero delle coppie S, S' incidenti secondo $[k-1]$ di π, i cui spazi congiungenti passano per O, e i cui spazî S appoggiansi a un dato $[r-k-1]$, che chiamiamo ω. Profittando della conservazione del numero, suppongasi ω in π. Se lo spazio S di una coppia che soddisfaccia alle condizioni richieste, non giace in π, dovrà lo spazio intersezione relativo a quella coppia appoggiarsi ad ω in un punto, e così noi otterremo t coppie; che se poi S giace in π, allora incontra di necessità ω in un punto, diguisaché così otterremo tante coppie S, S' quante sono quelle che sono incidenti secondo $[k-1]$, il cui spazio S giace in π, e il cui spazio congiungente passa per O. E quest'ultimo numero lo otteniamo facendo corrispondere due $[k]$ s, s' di π, quando s' è proiezione da O di uno spazio S' che insieme ad s fa parte della varietà v.

Mentre s descrive la forma

$$[a_0, a_1, \cdots, a_k] \quad , \quad 0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r-1,$$

lo spazio $S\,(\equiv s)$ descrive in $[r]$ la medesima forma, e mentre s' descrive la forma

$$[r-1-a_k, \cdots, r-1-a_0],$$

coniugata della precedente in $[r-1]$, lo spazio S' descrive la forma

$$[r-a_k, \cdots, r-a_0],$$

coniugata in $[r]$ di quella descritta da S, e che ottiensi dalla forma descritta da s' mediante proiezione da O. Siccome abbiamo supposto che la (1) fosse vera in $[r-1]$, avremo che la corrispondenza ultimamente considerata è

dotata di:

$$\sum (a_0 , a_1 , \cdots , a_k) (r - 1 - a_k , \cdots , r - 1 - a_0)' =$$
$$= \sum (a_0 , a_1 , \cdots , a_k) (r - a_k , \cdots , r - a_0)'$$
$$(0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r - 1)$$

coincidenze [2]. Quindi:

$$y = t + \sum (a_0 , \cdots , a_k) (r - a_k , \cdots , r - a_0)' \quad , \quad 0 \leq a_0 < \cdots < a_k \leq r - 1,$$

e analogamente:

$$y' = t + \sum (a_0 , \cdots , a_k)' (r - a_k , \cdots , r - a_0) \quad , \quad 0 \leq a_0 < \cdots < a_k \leq r - 1.$$

Ed allora la (2) dà:

$$(3) \qquad x = \sum (a_0 , \cdots , a_k) (r - a_k , \cdots , r - a_0)' +$$
$$+ \sum (a_0 , \cdots , a_k)' (r - a_k , \cdots , r - a_0) + t - z$$
$$(0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r - 1).$$

Il numero t indica quante coppie S , S' incidenti secondo $[k - 1]$ di π, hanno lo spazio congiungente passante per O, e lo spazio intersezione appoggiato a un dato $[r - k - 1]$, e sia ω, immerso in π. Assumiamo il punto O in ω. Se il $[k - 1]$ intersezione di una coppia che soddisfaccia alle condizioni richieste, non passa per O, incontra ω in un punto diverso da O; e in tal modo si hanno u coppie S , S' incidenti secondo $[k - 1]$ di π, ognuno dei quali appoggiasi a un dato $[r - k - 1]$ di π, in guisa che lo spazio $[k + 1]$ congiungente della medesima coppia passi per un punto dato nello spazio $[r - k - 1]$ suddetto; se poi il $[k - 1]$ intersezione di una coppia S , S' passa per O, sono senz'altro soddisfatte tutte le condizioni domandate.

Il numero τ delle coppie S , S' incidenti secondo $[k - 1]$ di π, i quali passano per un dato punto O ivi, può determinarsi mediante la corrispondenza fra gli $\infty^{(k+1)(r-k)}$ spazî Λ , Λ', a $k - 2$ dimensioni, che si ottengono come proiezioni rispettive da O in un dato $[r - 2]$ di π, degli spazî S , S' accoppiati in V e passanti per O.

Mentre Λ descrive in $[r - 2]$ la forma

$$[b_0 , b_1 , \cdots , b_{k-2}] , \quad 0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_{k-2} \leq r - 2,$$

lo spazio S, da cui Λ proviene, descrive in $[r]$ la forma

$$[0 , b_0 + 1 , b_1 + 1 , \cdots , b_{k-2} + 1 , r].$$

(2) S'intende che il prodotto simbolico che comparisce nel primo membro è riferito alla varietà delle coppie s, s', mentre quello che comparisce nel secondo è riferito alla varietà delle S, S'.

E così mentre A' descrive la forma

$$[r-2-b_{k-2},\cdots,r-2-b_0],$$

coniugata di quella descritta da A, lo spazio S' corrispondente descrive la forma

$$[0,r-1-b_{k-2},\cdots,r-1-b_0,r],$$

coniugata di quella descritta da S. Se poniamo $b_i+1=a_{i+1}$, avremo, in virtù della (1), per ipotesi valida in $[r-2]$,

$$\tau=\sum(0,a_1,\cdots,a_{k-1},r)(0,r-a_{k-1},\cdots,r-a_1,r)',$$

$$1\leq a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}\leq r-1.$$

Onde

$$t=u+\sum(0,a_1,\cdots,a_{k-1},r)(0,r-a_{k-1},\cdots,r-a_1,r)',$$

$$1\leq a_1<\cdots<a_{k-1}\leq r-1.$$

Per trovare un'espressione del numero z delle coppie S,S' incidenti secondo $[k-1]$ di π, i cui $[k+1]$ congiungenti passano per O, e si appoggiano a un dato $[r-k-2]$, σ, si supponga lo spazio σ e il punto O in π (senza, beninteso, che O giaccia in σ). Se né lo spazio S, né lo spazio S' di una delle coppie cercate, giacciono in π, il $[k-1]$ loro intersezione appoggiasi allo spazio $\omega\,(\equiv\sigma O)$ in un punto, e il $[k+1]$ che li congiunge passa per O; onde in tal modo abbiamo u coppie. Se poi lo spazio intersezione di una delle coppie domandate non si appoggia ad ω, gli spazî S,S' di quella coppia giacciono ambedue in π, ed allora richiedendo solo che lo spazio congiungente passi per O, è soddisfatta la rimanente condizione, che cioè tale spazio si appoggi a σ.

Per cui noi dovremo ora calcolare il numero ζ delle coppie S,S' che giacciono in π, sono incidenti secondo $[k-1]$, ed hanno lo spazio congiungente passante per O. E questo numero possiamo calcolarlo facendo corrispondere due $[k]$ di π, e siano Γ e Γ', quando proiettano rispettivamente da O sopra un dato $[r-2]$ di π, gli spazî S,S' accoppiati in V e giacenti entrambi in π.

Siccome quando Γ si muove nella forma

$$[b_0,b_1,\cdots,b_k],\qquad 0\leq b_0<\cdots<b_k\leq r-2,$$

lo spazio S descrive la forma

$$[b_0+1,b_1+1,\cdots,b_k+1],$$

e quando Γ' si muove nella forma

$$[r-2-b_k,\cdots,r-2-b_0],$$

lo spazio S' si muove nella forma

$$[r-1-b_k,\cdots,r-1-b_0],$$

ponendo $b_i + 1 = a_i$, sempre perché la (1) s'è supposta vera in $[r-2]$, avremo

$$\zeta = \sum (a_0, \cdots, a_k)\,(r - a_k, \cdots, r - a_0)', \qquad 1 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r-1,$$

e quindi:

$$z = u + \sum (a_0, \cdots, a_k)\,(r - a_k, \cdots, r - a_0)', \qquad 1 \leq a_0 < \cdots < a_k \leq r-1.$$

Dalla (3) segue:

$$x = \sum (a_0, \cdots, a_k)\,(r - a_k, \cdots, r - a_0)' + \\ + \sum (a_0, \cdots, a_k)'\,(r - a_k, \cdots, r - a_0) + \tau - \zeta,$$

e siccome ζ contiene tutti i prodotti simbolici comuni ai due sommatori di questa formola, mentre τ contiene quei termini che pur comparendo nel secondo membro della (1), non compariscono in nessuno dei sommatori della formola ora scritta, riducendo si ha precisamente per x l'espressione fornita dalla (1). Dal momento che la (1) medesima è valida nel piano [3] e nello spazio ordinario [4], sarà vera sempre.

2. Della (1) erano noti finora due casi particolari: e cioè il caso di $k = 0$, e il caso di $k = 1$ (e quindi, dualmente, il caso di $k = r-1$ e di $k = r-2$) [5].

Come applicazione immediata della (1) si può ritrovare un notevole teorema, dovuto a Schubert, sul numero dei $[k]$ comuni a due sistemi convenientemente infiniti [6]. Se in $[r]$ si ha un sistema ∞^h di $[k]$ e un sistema $\infty^{h'}$ pure di $[k]$, ed è $h + h' = (k+1)(r-k)$, i due termini hanno (in generale) un numero finito di spazî a comune, espresso dalla formola:

$$x = \sum (a_0, a_1, \cdots, a_k)\,(r - a_k, \cdots, r - a_0)'$$

il simbolo $(a_0, \cdots, a_k)$ riferendosi ai $[k]$ del sistema ∞^h e l'altro simbolo ai $[k]$ del sistema $\infty^{h'}$.

Basta, per ottenere questa proposizione, accoppiare ogni $[k]$ del sistema ∞^h ad ogni $[k]$ del sistema $\infty^{h'}$, e applicare la (1) a questa serie $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di $[k]$.

(3) Cfr. SALMON, *Geometry of three dimensions* (1865, pag. 511) e H. G. ZEUTHEN, *Sur les principes de correspondance du plan et de l'espace*, Comptes Rendus, *78* (1874), p. 1553.

(4) Cfr. SCHUBERT, *Beiträge zur abzählenden Geometrie*, Mathematische Annalen, *10* (1876), pp. 1–116 e *Kalkül der abz. Geometrie*, Leipzig, 1879.

(5) Per il caso di $k = 0$, cfr. un frammento nelle *Memorie di Geometria del* CAPORALI, intitolato: *Sulla teoria degli spazî a più dimensioni*; una Nota del prof. M. PIERI, *Sul principio di corrispondenza, in uno spazio lunare qualunque a n dimensioni*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (4) *3*$_1$ (1887), pp. 196–199 e un'altra Nota del medesimo sulle *Formole di coincidenza per le serie algebriche* ∞^u *di coppie di punti dello spazio a n dimensioni*, *5* (1891) pp. 252–268. Per il caso di $k = 1$, cfr. M. PIERI, *Sulla corrispondenza algebrica fra due spazî rigati* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *25* (1889) pp. 365–371.

(6) Cfr. SCHUBERT, *Lösung der Charakteristiken-Problems*, ecc. Mittheilungen der Math. Gesell. in Hamburg, *1* (1886), p. 134.

OSSERVAZIONI COMPLEMENTARI

Le poche applicazioni che in questo lavoro si fanno della conservazione del numero, son legittime, perché riferite a condizioni che si riconoscono agevolmente irriducibili.

La formula dimostrata contiene in particolare il teorema di Bézout sulla grassmanniana $W_s\,[s = (k+1)(r-k)]$ dei $[k]$ di $[r]$ e quindi (si veda il n. 30 della Memoria dell'Autore: *I fondamenti della geometria numerativa*, Annali di Matematica, (4) *19* (1940), pp. 153–242 (***)) il teorema della base (intermediaria e minima nello stesso tempo) per le varietà (pure) delle diverse dimensioni tracciate su W_s. Viceversa, se la base delle varietà di dimensione data (qualunque) su W_s, è per altra via conosciuta (si veda il n. 6 della Memoria testé citata per i rinvii bibliografici) se ne deduce la base delle varietà ∞^s sul prodotto $W_s \times W'_s$ (W'_s essendo una copia di W_s) epperò il teorema di Bézout ivi. L'applicazione poi di quest'ultimo teorema all'intersezione virtuale (T, Z) dell'imagine T dal dato sistema di coppie S, S' e della imagine Z dell'identità (la quale non è che la somma delle varietà costituenti la base di dimensione s su $W_s \times W'_s$), fornisce il numero virtuale $[T, Z]$, cioè la formula dimostrata nel precedente lavoro; la quale viene così ad acquistare più ampia portata.

(***) La Memoria sarà ristampata nel volume IV di queste «Opere»; N.d.R.

V.

SOPRA ALCUNE SINGOLARITÀ DELLE CURVE DI UN IPERSPAZIO (*)

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *50* (1901), pp. 81–114 (**).

È questa la dissertazione di laurea, discussa da F. Severi il 30 giugno 1900, dinanzi alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino.

1. Si riproduce – come riassunto della Memoria – la relazione colla quale Corrado Segre presentò il lavoro all'Accademia:

«Alle note formole del Cayley, che stabiliscono dei legami relativamente semplici fra i primi caratteri di una curva algebrica dello spazio ordinario, fan seguito una lunga serie di formole, più complesse, dovute per molta parte a Zeuthen, colle quali si determinano altri caratteri della curva, relativi per esempio alle rette che hanno con questa due o più incontri, o contatti. Similmente per una curva di un iperspazio S_n, dopo le formole di Veronese e quelle che ne derivano più immediatamente, son da ricercare altre formole che diano i caratteri analoghi a quelli ora accennati: per esempio, una che esprima l'ordine della varietà costituita da quegli S_k che hanno colla curva incontri ν_1–punto, ν_2–punto, $\cdots$, ove $\nu_1, \nu_2, \cdots$ son numeri dati. Pel caso che gl'incontri sian tutti *semplici* le ricerche più recenti in proposito son dovute al sig. A. Tanturri, e si riferiscono alle curve razionali ed ellittiche. Invece il signor Severi nella Memoria attuale tratta, per curve di genere qualunque, vari problemi speciali relativi a casi in cui si hanno incontri *multipli*. Così nella 1ª parte egli determina gli ordini di alcune rigate costituite da particolari corde della cruva (giacenti in iperpiani osculatori, ecc.); e il numero delle corde, ognuna delle quali sia negl'iperpiani osculatori dei propri estremi. E nella 2ª parte calcola: il numero degli S_{n-2} che hanno colla curva due contatti di dati ordini, e di quelli S_{n-2} che son tangenti in un punto ed hanno colla curva $2n - 5$ ulteriori incontri; il numero degli S_{n-3} con due dati contatti ed un incontro semplice; per $n = 2r + 1$, il numero degli S_r tangenti che hanno r ulteriori incontri [e anche l'ordine della varietà M_{r+1} degli S_r $(r + 2)$–secanti]. In particolare per le curve degli spazî a 4 e a 5

(*) In luogo della Memoria originale viene qui riprodotto il testo redatto dall'Autore a commento della Memoria stessa, apparso nel volume: F. SEVERI, *Memorie scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950; pp. 3–5 (N.d.R.).

(**) Memoria presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 13 gennaio 1901.

dimensioni vengono determinati tutti quanti i numeri relativi a spazî con dati contatti.

Meritano menzione anche gli strumenti adoperati dal signor Severi: i quali consistono spesso in ingegnose applicazioni del principio di corrispondenza sulla curva di genere p; e invece, per talune questioni relative allo S_5, nel metodo funzionale, già usato dal Cayley nel caso più semplice delle curve di S_3 e qui per spazî superiori agevolato dall'A. per mezzo dell'integrazione preliminare di un'ampia classe di equazioni funzionali che si presentano in varie ricerche di geometria numerativa [1].

L'importanza del lavoro del Severi, non solo per se stesso, ma anche come avviamento alla risoluzione delle questioni più generali sugli spazî aventi incontri e contatti vari colle curve algebriche, c'induce a proporne l'accoglimento nel volume delle Memorie ».

E. D'OVIDIO
C. SEGRE, *Relatore*

2. Aggiungerò, alla relazione del primo mio grande Maestro, alla cui memoria si eleva riverente il mio pensiero, che il metodo di determinare la molteplicità d'una coincidenza d'una corrispondenza sopra una curva algebrica, particolarizzando opportunamente la curva stessa, in base al carattere infinitesimale di quella molteplicità, è qui usato forse per la prima volta.

3. L'equazione funzionale integrata nella presente Memoria, è la seguente:

$$\varphi(x_1 + x_1', x_2 + x_2', \cdots, x_n + x_n') =$$
$$= \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \varphi(x_1', x_2', \cdots, x_n') + f(x_1, \cdots, x_n ; x_1', \cdots, x_n'),$$

dove f è data e φ è la funzione incognita.

Tale è il tipo generale di equazioni che si presentano in ogni problema numerativo trattato col metodo funzionale. L'esistenza dell'integrale φ è in tal caso assicurata a priori, quando le x sono numeri interi positivi. Esso vien dato dalla formula

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{x_k - 1} f(0, \cdots, 0, 1_k, 0, \cdots, 0 ; 0, \cdots, 0, x_k - i, 0, \cdots, 0) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{n} f(0, \cdots, 0, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n ; 0, \cdots, 0, x_{i-1}, 0, \cdots, 0).$$

Le c son costanti arbitrarie e il simbolo 1_k significa che si è posto $x_k = 1$ [2].

(1) Di quest'integrazione l'A. s'è pure servito, pei problemi delle coniche secanti o tangenti a curve gobbe, nelle due Note pubblicate in questi Atti nel 1900.

(2) Un discepolo rumeno di F. Severi, G. GALBURA (Acta, Pontificia Academia Scientiarum, Anno V, vol. V, 1941) ha considerato il problema dell'integrazione dell'equazione $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) + f(x, y)$ nel campo reale, sotto ipotesi abbastanza ampie per φ e per f; ed in queste ipotesi ha assegnato l'integrale generale, che si esprime naturalmente per mezzo d'un integrale doppio. La formola di Galbura riducesi alla forma ricordata nel testo, nel campo dei numeri interi.

VI.

INTORNO AI PUNTI DOPPI IMPROPRII DI UNA SUPERFICIE GENERALE DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI, E AI SUOI PUNTI TRIPLI APPARENTI (*)

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *15* (1901), pp. 33–51.

1. Nello spazio a quattro dimensioni S_4 abbiasi una superficie F irriducibile, la quale si proietti da un punto sopra uno spazio (ora e nel seguito si sottintenda « ordinario »), in una superficie dotata di sole singolarità ordinarie (cioè una linea doppia con un numero finito di punti tripli). Diremo che F è una *superficie generale* dello spazio S_4.

È noto che F può pensarsi come proiezione di una superficie Φ di uno spazio S_r $(r > 4)$, di ordine abbastanza grande, priva di punti multipli, la proiezione essendo fatta da un S_{r-5} generico, che, eventualmente, abbia comuni con Φ un certo numero di punti (1). Al centro di proiezione S_{r-5} si appoggiano (fuori dei punti comuni ad esso e a Φ, se ve ne sono) alcune corde di Φ in numero finito; dimodoché, in corrispondenza, la superficie F avrà punti doppi. E per la definizione della F, questi punti doppi, quando si proietti la F sopra uno spazio, dovranno proiettarsi in punti della linea doppia, esistente sopra la superficie proiezione. Ne segue che una sezione spaziale di F per uno di quei punti doppi avrà il medesimo genere che una sezione spaziale generica: per questa ragione chiameremo *punti doppi impropri* i punti doppi esistenti su F. Dunque:

Una superficie generale dello spazio S_4 ammette un numero finito di punti doppi impropri (2).

(*) Ristampato in F. SEVERI, *Memorie scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, pp. 19–38, con la Nota (**) a piè di p. 21 e le « Osservazioni complementari » in fine del lavoro, aggiunte dall'Autore in quella occasione (N. d. R.).

(1) Cfr. DEL PEZZO, *Estensione di un teorema di Noether*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *2* (1888), pp. 139–144. Cfr. pure: C. SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (2) *26* (1896), pp. 1–53; oppure Opere Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma (1957), pp. 327–379. nn. 26 e segg.; B. LEVI, *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *33* (1897), pp. 66–86.

(2) Al n. 8 della « *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* » (Memorie della Società del XL, (3) *10* (1896), pp. 1–81), il prof. Enriques ha introdotto le denominazioni di *curve fondamentali proprie e improprie* rispetto ad un sistema lineare di curve tracciate

2. Sorge anzitutto il problema di determinare quanti sono questi punti doppi improprî.

Diciamo n l'ordine di F, a il rango di una sua sezione spaziale, j il numero delle tangenti (o dei piani tangenti) di F per un dato punto generico O, d il numero incognito dei punti doppi di F.

Il cono Γ delle corde di F per O, seca la superficie in una curva γ di ordine $n(n-1)-a$ (come rilevasi secando con uno spazio per O), la quale possiede d nodi nei punti doppi improprî di F, ed ha j delle sue tangenti passanti pel punto O. Su questa curva le generatrici di Γ segnano un'involuzione quadratica. Orbene, assunto un piano π, accoppiamo due spazî Σ, Σ' del fascio (π) quando proiettano due punti accoppiati in quest'involuzione. Si avrà nel fascio (π) una corrispondenza involutoria, il cui indice si ottiene cercando il numero delle generatrici di Γ appoggiate ad una sezione spaziale di F, ed è quindi espresso dall'ordine di γ.

Le coincidenze della corrispondenza hanno luogo:

1° Negli spazî di (π) ognuno dei quali contiene il punto di contatto di una tangente di F per O, da contarsi ciascuno una volta.

2° Negli $\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}a$ spazî di (π) che contengono ciascuno una generatrice del cono Γ, da contarsi ognuno due volte.

3° Negli spazî di (π) che proiettano i d punti doppi di F, da contarsi ciascuno due volte.

Quindi avremo la relazione:

$$2d + j = n(n-1) - a,$$

donde:

$$(1) \qquad d = \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}j \quad (3).$$

sopra una superficie algebrica. Una curva fondamentale dicesi propria o impropria secondochè il sistema residuo di essa rispetto al sistema dato è di genere minore oppure uguale al genere del sistema medesimo. E il prof. Enriques comprende nella denominazione di curve fondamentali anche i punti dell'ente algebrico, che non siano base per il sistema che si considera. Seguendo questa terminologia i punti doppi della nostra F sarebbero curve fondamentali improprie, rispetto al sistema delle sezioni spaziali di F. Noi abbiamo preferito, mantenendo l'attributo « improprio », di adottare la denominazione del testo, giacchè ci vogliamo occupare dei punti doppi di F dal punto di vista proiettivo.

(3) Per una rigata risulta $a = 2(n + p - 1)$ (Cfr. LÜROTH, *Zur Theorie der windschiefen Flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 67 (1867), pp. 130-152 ved. a pag. 139; vedi pure: H. SCHUBERT, *Bemerkung zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche*, Mathematische Annalen, 17 (1880), pp. 575-576). Quindi la formola (1) del testo dà:

$$d = \binom{n-2}{2} - 3p.$$

Cfr. A. TANTURRI, *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di* ∞^1 *spazi*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 35 (1900), pp. 427-442.

3. Se proiettiamo F sopra uno spazio otteniamo ivi una superficie F' di ordine n, rango a, dotata di una linea doppia di ordine b e rango q, e sulla linea doppia si troveranno t punti tripli che provengono dalle trisecanti di F per il centro di proiezione (*punti tripli apparenti* di F) e j *punti cuspidali* (*pinch-points*, secondo la denominazione primitiva di Cayley), nelle traccie sopra F' delle tangenti di F passanti per il centro di proiezione.

Introduciamo ancora la classe ϱ della sviluppabile dei piani tangenti alla superficie proiezione nei punti della sua linea doppia, il numero χ delle generatrici stazionarie del cono circoscritto alla F' da un punto del suo spazio, e la classe n' di F', la quale uguaglia il numero degli spazî di un fascio, che sono tangenti ad F.

I numeri definiti son legati dalle relazioni:

$$\begin{aligned} a(n-2) &= \chi + \varrho , \\ b(n-2) &= \varrho + 3t , \\ n' + 2j &= a + \chi , \\ 2\varrho - 2q &= j , \\ n(n-1) &= a + 2b \quad (4) . \end{aligned}$$

Eliminando fra le prime tre e l'ultima b , ϱ , χ si ottiene:

$$j = \frac{1}{4}[a(3n-4) - n(n-1)(n-2) + 6t - 2n'] ;$$

e, dopo, per mezzo della quarta si rileva:

$$q = \frac{1}{8}[5n(n-1)(n-2) - (7n-12)a - 30t + 2n'] .$$

Onde:

Una superficie di S_4, *di ordine* n, *che ha il rango di una sua sezione spaziale uguale ad* a, *che è dotata di* t *punti tripli apparenti, e tale che in un fascio di spazî ve ne sono* n' *ad essa tangenti, si proietta in uno spazio* S_3 *secondo una superficie dotata di una linea doppia dell'ordine* $\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}a$ *e di rango*:

$$\frac{1}{8}[5n(n-1)(n-2) - (7n-12)a - 30t + 2n') ,$$

(4) Cfr. SALMON-FIEDLER, *Anal. Geom. d. Raumes* (t. II, pagg. 650 e 673 della 3ª ed.). Cfr. pure: H. G. ZEUTHEN, *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques*, Mathematische Annalen, 10 (1876), pp. 446–546. Abbiamo usato le medesime notazioni adottate da questi Autori, perché sia immediato il raffronto. Le relazioni del testo discendono da quelle contenute p. e. nella Memoria di Zeuthen, uguagliando a zero quelle singolarità, che, nelle nostre ipotesi, debbono riguardarsi legittimamente come straordinarie.

e in questa linea si trovano:

$$\frac{1}{4}[a(3n-4)-n(n-1)(n-2)+6t-2n']$$

punti cuspidali (5).

4. Per mezzo delle formole del n° precedente, sostituendo nella (1) del n° 2, si ottiene:

$$d=\frac{1}{8}[n(n-1)(n+2)-3na-6t+2n'].$$

Sorge ora spontanea questa domanda: Il carattere t che comparisce nelle espressioni di j e di q, e, conseguentemente, nella espressione di d, è veramente essenziale, oppure si possono quelle formole trasformare in altre che esprimano j, q, d in funzione soltanto di n, a, n'?

Perché ciò fosse bisognerebbe che per una superficie F' dello S_3, dotata di sole singolarità ordinarie, il numero t si potesse esprimere in funzione di n, a, n'. Se una tale espressione di t esistesse, essa dovrebbe soddisfare a queste due condizioni:

1° Per una superficie spezzata in una superficie d'ordine n, rango a, classe n', e in un'altra superficie d'ordine n_1, rango a_1, classe n_1', essa funzione dovrebbe essere uguale alla somma del numero dei punti tripli della prima superficie, col numero dei punti tripli della seconda, e coi numeri che esprimono quanti sono i punti comuni alla curva doppia di una delle due superficie e all'altra.

2° Per le superficie generali del loro ordine essa dovrebbe annullarsi.

La prima condizione si traduce in un'equazione funzionale a cui dovrebbe soddisfare quell'espressione di t, e, dopo aver integrato quest'equazione (6), la seconda condizione ci permetterebbe di determinare le 3 costanti che compaiono nell'integrale.

Ebbene, così operando si trova la funzione:

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{6}a(3n-4)+\frac{1}{3}n',$$

la quale non può essere uguale al numero t, perché, come rilevasi dalle formole del n° 3, bisognerebbe fosse $j=0$.

Dunque i numeri n, a, n', t sono tutti essenziali per caratterizzare una superficie generale dello spazio S_4.

(5) Le formole che a questo proposito si trovano al n. 8 del frammento postumo del CAPORALI, *Sullo spazio di quattro dimensioni*, Memorie di Geometria, Pellerano, 1888, non sono giuste. E si capisce che il Caporali dedusse quelle formole dalle relazioni da noi riportate nel testo, nell'ipotesi che j fosse nullo; ipotesi che non è legittima per una superficie immersa nello S_4.

(6) Per integrarla si potrà profittare del teorema da me dimostrato al n. 21 della Memoria: *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) 50 (1901), pp. 81–114.

5. Poiché i punti doppi improprî di F, allorquando si proietta F sopra uno spazio, si proiettano in punti della linea doppia della superficie proiezione, saranno *biplanari*. Noi diremo che un punto doppio improprio di F è di *prima specie* quando i due piani tangenti ad F in esso punto non giacciono in un S_3; e diremo invece che è di *seconda specie* quando i due piani tangenti in esso giacciono in un S_3.

Esistono effettivamente punti doppi improprî delle due specie. Supponiamo per esempio che la superficie F^n non sia normale nello spazio S_4, ossia che esista nello spazio S_5 una superficie Φ^n di cui F^n è proiezione. Un punto doppio D di F proviene da due punti semplici D_1 e D_2 di Φ allineati col centro di proiezione O: i due piani tangenti ad F in D sono le proiezioni dei piani tangenti a Φ in D_1 e D_2 e, secondoché i piani tangenti ad F in D hanno un punto od una retta comune, i due S_3 che da O proiettano i piani tangenti a Φ in D_1 e D_2 avranno una retta od un piano comune. In quest'ultimo caso i due S_3 son congiunti da un S_4, il quale conterrà i due piani tangenti a Φ in D_1 e D_2; e dunque questi due piani avranno un punto comune. Ora, all'infuori della *superficie del* Veronese, nello S_5 non esiste una superficie i cui piani tangenti s'incontrino a due a due [7], e quindi per un punto generico dello spazio non passano corde di una superficie Φ dello S_5, tali che i due piani tangenti nei punti d'appoggio s'incontrino (e questo lo si può affermare anche senza escludere la superficie del Veronese, giacché per un punto generico dello S_5 non passano corde di essa). Ne viene che, se F è proiezione generica di Φ, i suoi punti doppi improprî sarannno tutti di prima specie; mentre se il centro di proiezione O giace su una corda di Φ tale che i due piani tangenti nei punti d'appoggio s'incontrino (e di tali corde ne esistono per una superficie dello S_5), F avrà in corrispondenza un punto doppio improprio di 2ª specie.

Ma il ragionamento precedente prova (almeno per le superficie che non sono normali nello S_4) che:

Una superficie generale dello S_4, la quale possegga punti doppi improprî di 2ª specie, si può sempre trasformare biunivocamente in un'altra superficie dello S_4 con soli punti doppi di 1ª specie, la quale abbia gli stessi caratteri n, a, n', t che competono alla superficie primitiva.

6. Uno spazio generico passante per uno dei piani tangenti ad F^n in un punto doppio improprio P taglia la superficie secondo una curva f con un punto triplo in P: dei tre rami lineari di questa curva uscenti da P, due toccano il piano tangente a F^n per il quale si è condotto lo spazio secante, e l'altro ramo tocca l'altro piano tangente a F^n in P. Quindi un altro S_3 generico condotto per lo stesso piano tangente, toccherà due rami di f per P e passerà soltanto per l'origine dell'altro ramo, o lo toccherà, secondoché P è di 1ª o di 2ª specie. Onde:

(7) Cfr. P. DEL PEZZO, *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di n + 1 dimensioni*, Rendiconti dell'Acc. di Sc. Fisiche e Mat. di Napoli, (9) *24* (1885), pp. 212–216.

Un piano tangente ad F^n in un punto doppio improprio di 1ª specie la seca ulteriormente in $n-5$ punti; e un piano tangente in un punto doppio improprio di 2ª specie, in $n-6$ punti.

7. Le considerazioni che svolgeremo in questo numero, stabiliranno una differenza essenziale fra i punti doppi improprî di una superficie F dello S_4 (la cui sezione spaziale generica sia d'ordine n, rango a, genere p) e i *punti doppi proprî*, eventualmente esistenti su di essa, chiamando così quei punti doppi che nella proiezione generica di F sopra uno spazio dànno origine a punti doppi isolati.

È chiaro che una sezione spaziale generica di F per un punto doppio proprio ha il genere inferiore di un'unità al genere di una sezione spaziale generica, e viceversa se un punto doppio di F gode di questa proprietà, sarà un punto doppio proprio (e in ciò appunto sta la ragione di quest'ultimo attributo: vedi la nota alla fine del n° 1).

È appena necessario avvertire che una F dello S_4 può effettivamente possedere punti doppi proprî: così se F è completa intersezione di due forme che si tocchino in un punto, sarà questo un punto doppio proprio per la F.

Sia P un punto doppio proprio della superficie F, che, secondo la nostra definizione, non sarà dunque una superficie generale dello S_4. Da un punto *generico* O dello spazio ambiente esce un cono di corde della F, il quale non contiene la retta OP. Per questo fatto la OP non potrà appartenere alla varietà delle ∞^4 corde di F; né quindi potrà la congiungente di due punti di F, che si approssimano a P con una legge qualsiasi, tendere alla OP.

Per una retta generica r dello S_4 conduciamo uno spazio, e diciamo f la sezione di F con esso. Ad r si appoggiamo $a\ [= 2(n+p-1)]$ tangenti di f, e se f viene a passare per P, e quindi il suo genere riducesi a $p-1$, di tangenti propriamente dette alla r se ne appoggeranno soltanto $a-2\ [= 2(n+p-2)]$, appunto perché dalla sviluppabile osculatrice di f, quando questa passa per P, si stacca, contato doppiamente, il fascio di rette avente per centro P e per sostegno il piano delle due tangenti ad f in P. Anzi, fra le rette che escono dal punto P, le sole, che appartengono alla varietà delle corde di f, sono le rette del fascio nominato [*corde improprie* di f (8)]; dimodoché nello S_3 condotto per r noi troviamo una sola retta s appoggiata ad r, che possa riguardarsi come limite della congiungente due punti di F che si avvicinino con una legge conveniente a P. Al variare dello S_3 attorno al piano Pr, se variasse la retta s, è chiaro che varierebbe con continuità e, quando lo S_3 avesse descritto il fascio, il punto d'appoggio di quella retta su r avrebbe descritto la r stessa; e quindi per un punto generico di r, che è poi un punto generico dello S_4, passerebbe sempre qualche retta secante la superficie F in due punti infinitamente vicini a P, il che, come abbiamo visto, non può accadere. Dunque la retta s che noi abbiamo ottenuta mediante

(8) Cfr. B. LEVI, *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*, Memorie della R. Accademia di Torino, (2) *48* (1898), pp. 83–142.

un particolare S_3 per il piano Pr, non è affatto vincolata alla posizione di questo S_3 nel fascio (Pr); ossia alla r si appoggia una sola retta uscente da P e appartenente alla varietà delle corde di F.

Ne discende che le rette che escono da P e appartengono alla varietà suddetta, stanno in uno S_3; e si noti che fra quelle rette si trovano pure le tangenti (effettive) della F nel punto doppio P.

Se P anziché denotare un punto doppio proprio di F, ne denota un punto doppio improprio, la retta OP, che congiunge P con un punto generico O dello S_4, è il limite di qualche corda di F che varia con una conveniente legge in guisa che i suoi punti d'appoggio tendano entrambi a P. Difatti la sezione spaziale di F prodotta da uno S_3 generico per O, possiede $\binom{n-1}{2} - p$ corde pel punto O, ma quando quello S_3 si avvicina con legge arbitraria al punto P, delle corde passanti per O una tende alla OP, in modo che al limite vi sono soltanto $\binom{n-1}{2} - p - 1$ corde della sezione, passanti per il punto O, all'infuori della OP stessa.

Concludendo possiamo dire che:

Da un punto doppio proprio di una superficie F dello S_4 escono solo ∞^2 rette appartenenti alla varietà delle corde di F, e giacciono tutte in uno S_3, in cui è immerso l'insieme delle tangenti a F in quel punto doppio (e questo insieme sarà dunque un cono quadrico, eventualmente spezzato); mentre tutte le ∞^3 rette uscenti da un punto doppio improprio della F, appartengono alla varietà delle sue corde.

Da quanto precede risulta una nuova definizione dei punti doppi improprî di una superficie F immersa nello S_4. Si riuniscano a coppie in tutti i modi possibili i punti di F; avremo così nello S_4 una ∞^4 di coppie di punti, la quale possiederà un numero finito di *coincidenze perfette* o *isolate* [9], tali cioè che ogni retta della iperstella avente per centro uno dei punti ove avviene una di queste coincidenze, sia una *retta principale* (che contiene due punti infinitamente prossimi della F). Ebbene, queste coincidenze perfette sono i punti doppi improprî della F. La superficie è luogo di coincidenze imperfette: le rette principali relative ad un punto generico di F sono le ∞^1 tangenti ad essa in quel punto; le rette principali relative ad un punto doppio proprio, eventualmente esistente su F, sono le ∞^2 rette uscenti da quel punto e giacenti nello S_3 in cui è immerso il cono quadrico tangente ad F in esso.

8. Se la superficie F è proiezione di una superficie Φ dello stesso ordine, appartenente allo S_5, si può dire che il numero d dei punti doppi improprî di F esprime il numero dei *punti doppi apparenti* di Φ.

(9) Cfr. M. PIERI, *Formole di coincidenza per le serie algebriche ∞^n di coppie di punti dello spazio a n dimensioni*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 5 (1891), pp. 252–268.

Nello S_5 esiste qualche superficie Φ che è priva di punti doppi apparenti: per esempio la superficie del Veronese. Per un punto dello spazio non passa nessuna sua corda, perché le corde di essa superficie sono distribuite sopra gli ∞^2 piani delle sue coniche. Questo fatto non ha riscontro con un fatto analogo per le curve dello S_3, giacché ivi non può immaginarsi un sistema ∞^2 di rette, che non stiano tutte in un piano, senza che i punti di quelle rette riempiano lo spazio.

Oltre alla superficie del Veronese, nello S_5, esistono altre superficie che siano prive di punti doppi apparenti?

Sia Φ una tal superficie: denotiamo con V la varietà delle sue ∞^4 corde, la quale, come luogo di punti, sarà almeno una M_3, e se vogliamo che per un punto generico dello S_5 non passi nessuna corda di Φ occorrerà e basterà che la V sia, come luogo di punti, al più una M_4.

Se la V è una M_3, siccome per un punto di V giacere sopra una corda data di Φ è in tal caso condizione doppia, sarà pure condizione doppia per una corda di Φ passare per un punto dato di V, dimodoché per un tal punto passeranno ∞^2 corde di Φ. Sia φ la curva sezione di Φ con un S_4 generico: per un punto di una corda di φ passeranno ∞^1 altre corde della φ stessa, e quindi φ sarà una curva piana. Ciò è assurdo, giacché si è supposto la Φ immersa nello S_5. Onde la V non può essere una M_3.

Se la V è una M_4, per un punto di V giacere sopra una corda data di Φ è condizione tripla, e quindi è anche condizione tripla per una corda di Φ passare per un punto dato di V. Dunque per un punto di V passano ∞^1 corde della Φ, e costituiscono un cono Γ. Seghiamo questo cono e Φ con un S_4 passante per una generatrice di Γ; la sezione φ di Φ dovendo essere immersa in quello S_4 (perchè altrimenti la Φ medesima non sarebbe immersa nello S_5), ad una sua corda generica, in un punto dato, non si potranno appoggiare altre corde. Quindi quello S_4 con cui si è secato non conterrà altre generatrici del cono Γ, il quale sarà perciò un fascio di raggi. È allora evidente che il piano di Γ conterrà tutta una curva di Φ, la quale curva sarà almeno del 2° ordine; e dunque ogni retta del piano di Γ sarà corda di Φ. La V si ottiene perciò facendo variare un piano rigato in una certa ∞^2. Ma risulta di più che le curve comuni ai piani di questa ∞^2 e alla Φ, non potranno essere che coniche, poiché altrimenti ogni corda di Φ sarebbe plurisecante.

E di più per una corda di Φ non potrà passare che un piano della ∞^2, perché se così non fosse per un punto generico di quella corda, che è un punto generico di V, passerebbero almeno due fasci di corde della Φ, il che abbiamo veduto non può accadere.

Dunque la Φ contiene un sistema doppiamente infinito di coniche e per due punti della superficie passa una sola conica del sistema: ciò basta per farci concludere che la Φ è [un cono o] la superficie del 4° ordine del Veronese, normale nello S_5 (**).

(**) Questa conclusione si applica soltanto alle superficie Φ *non coniche:* cfr. la nota (9) della Memoria VIII [del presente volume]; cfr. pure le Oss. Compl. poste alla fine di questo lavoro.

La sola superficie immersa nello spazio a cinque dimensioni, priva di punti doppi apparenti, è la superficie del Veronese.

9. Ed ora, proseguendo nello stesso ordine di idee, ricerchiamo quali sono le superficie immerse nello S_5 e dotate di un sol punto doppio apparente: esse saranno, in certa guisa, le analoghe della curva del 3° ordine dello S_3.

Sia Φ una superficie dello S_5 dotata di un sol punto doppio apparente; n e p siano rispettivamente l'ordine e il genere di una sezione iperpiana generica.

Le corde di Φ formano un sistema ∞^4, Σ, del primo ordine, che è necessariamente privo di una M_4 focale [10]. I punti di Φ sono singolari per Σ, giacché per ogni punto di Φ passano ∞^2 rette del sistema; ed anzi i punti d'appoggio su Φ di una corda della superficie stessa, contano tra i fochi esistenti su quella corda ciascuno due volte. Siccome sopra una retta appartenente al sistema Σ, se vi sono più di 4 fochi, essa è luogo di fochi, e d'altronde per Σ ogni foco è punto singolare, ne segue che se una corda di Φ, fuori dei punti d'appoggio, incontra altre corde della Φ stessa, per ogni punto di essa corda ne passano infinite altre. Non potrà dunque una corda generica di Φ incontrare altre corde all'infuori di quelle che escono da' suoi punti d'appoggio. E quindi una sezione iperpiana generica di Φ sarà proiettata da una sua corda sopra un piano, in un curva priva di punti doppi. Dovrà perciò essere:

$$\binom{n-3}{2} - p = 0. \tag{1}$$

La sezione iperpiana generica di Φ dovrà essere immersa in uno S_4 (chè altrimenti Φ non sarebbe immersa nello S_5), epperciò il suo genere p non potrà superare il limite superiore che spetta al genere di una curva d'ordine n dello S_4 [11]. Se

$$n \equiv 0 \pmod 3, \text{ oppure } n \equiv 2 \pmod 3, \text{ è: } p \leq \frac{(n-2)(n-3)}{6}, \text{ e se}$$

$$n \equiv 1 \pmod 3, \text{ è: } p \leq \frac{(n-1)(n-4)}{6}.$$

Nei primi due casi in virtù della (1) si dovrà avere:

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2} \leq \frac{(n-2)(n-3)}{6},$$

(10) Cfr. C. SEGRE, *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazî superiori*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *2* (1888), pp. 148–149.

(11) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *24* (1889), pp. 346–373; od anche G. CASTELNUOVO, *Memorie scelte*, Zanichelli, Bologna, 1937; pp. 19–44.

nell'ultimo caso:

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2} \leq \frac{(n-1)(n-4)}{6} \; ;$$

e in ogni caso si trova che n non può superare il 5.

Per $n = 3$ non esiste nello S_5 nessuna superficie (irriducibile).

Per $n = 4$ abbiamo due superficie nello S_5: la superficie del Veronese, che è priva di punti doppi apparenti, e quindi è da scartarsi; e la rigata razionale normale, per cui resta soddisfatta la (1).

Per $n = 5$ due superficie esistono nello S_5; e cioè una a sezioni iperpiane razionali (necessariamente rigata, per il teorema di Picard), e normale nello S_6; e una a sezioni iperpiane ellittiche non rigata, normale nello S_5, e che, per un noto teorema di Del Pezzo [12], è rappresentabile in un piano col sistema delle cubiche passanti per 4 punti. La prima di queste due superficie non soddisfa alla (1), e quindi è da scartarsi; la seconda soddisfa alla (1).

Concludendo:

Le sole superficie immerse nello spazio a cinque dimensioni dotate di un punto doppio apparente, sono la rigata del 4° *ordine razionale normale e la superficie del* 5° *ordine normale, che è rappresentabile sul piano dal sistema delle cubiche per* 4 *punti dati* [13].

10. Una superficie F immersa nello spazio S_4 ha per analogo del numero dei punti doppi apparenti di una superficie dello S_5, il numero dei punti tripli apparenti, ossia il numero delle trisecanti di F per un punto dello S_4.

E si presenta anche in relazione ai punti tripli apparenti, il problema di ricercare se esistono superficie immerse nello S_4, le quali siano prive di punti tripli apparenti.

Per rispondere a questa questione sarà utile dimostrare il seguente Lemma:

Nello S_4 *ogni forma* [14] *che contenga un sistema* ∞^3 *di rette o è una quadrica o è il luogo di un sistema semplicemente infinito di piani.*

Dicasi infatti V una forma che contenga una ∞^3 di rette, di guisa che per un punto di essa passano ∞^1 rette del sistema ∞^3, e formano un cono Γ.

(12) Cfr. P. DEL PEZZO, *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1 (1887), pp. 241–271. Cfr. pure: C. SEGRE, *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1 (1887), pp. 217–221, oppure Opere, vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1957, pp. 105–109.

(13) Si poteva affermare *ab initio* che le superficie immerse nello S_5 e dotate di 1 punto doppio apparente, sono normali. Infatti, se Φ è una superficie, che noi consideriamo nell'ambiente a r dimensioni, la quale si proietta da un generico S_{r-5} sopra un S_4 secondo una superficie con un punto doppio improprio, la varietà delle sue corde come luogo di punti sarà una M_5 del 1° ordine, ossia uno S_5. Sarà dunque la Φ immersa nello S_5.

(14) Varietà a 3 dimensioni, come luogo di punti.

Secando con uno S_3 per una generatrice di questo cono, avremo come sezione di V una rigata v, e se questa rigata non è una quadrica, e quindi se V non è una quadrica, per un punto generico di v non passerà che una generatrice della rigata stessa. Ne segue che lo S_3 tracciato non conterrà altre generatrici di Γ, all'infuori di quella per cui si è condotto, e quindi Γ sarà un fascio di raggi. E il piano di questo fascio apparterrà evidentemente a V; quindi questa varietà conterrà una semplice infinità di piani analoghi al piano di Γ: per ogni punto di V ne passerà uno. Se poi V è una quadrica, il cono Γ sarà un cono quadrico, o anche un fascio di raggi (ed allora la V sarà necessariamente un cono), secondoché il sistema ∞^3 di rette che si considera sopra V dà per sezione con un generico S_3 una schiera rigata, o le due schiere di una quadrica.

11. Se una superficie F dello S_4 ammette trisecanti, esse saranno in numero ∞^3, e affinché per un punto dello spazio non ne passi nessuna occorrerà e basterà che la varietà V delle trisecanti di F, sia, come luogo di punti, una M_3. Dovrà quindi la varietà V essere una quadrica o una varietà ∞^1 di piani (per il Lemma del n° precedente). Nel caso che la V contenga una ∞^1 di piani, ogni piano di questa varietà conterrà una curva di F, la quale curva sarà almeno del 3° ordine; e non è necessario avvertire che l'ordine delle curve che i piani di V hanno comuni con F, non può eguagliare l'ordine di F, poiché altrimenti la superficie stessa sarebbe immersa in uno S_3. Dunque:

Se una superficie dello S_4 non ha punti tripli apparenti, o è contenuta in una quadrica, o su essa sono tracciate ∞^1 curve piane di ordine almeno uguale a 3.

Se una superficie F giace sopra una forma quadrica, la varietà V delle trisecanti di F è necessariamente la quadrica stessa, e quindi per un punto dello spazio non passa nessuna trisecante di F. Se si pensa poi che sopra una forma quadrica dello S_4 che sia un cono (di prima specie) giacciono superficie di tutti gli ordini, se ne trarrà che:

Nello S_4 esistono superficie di tutti gli ordini che sono prive di punti tripli apparenti.

12. Le superficie dei primi 5 ordini immerse nello spazio S_4 e prive di punti tripli apparenti, sono le seguenti superficie note:

a) La rigata cubica dello S_4. Non ammette trisecanti (all'infuori delle sue generatrici), né punti doppi improprî; ed è normale nello S_4.

b) La *superficie di* Segre intersezione completa di due forme quadriche. Non ammette trisecanti (all'infuori delle 16 rette che contiene), né punti doppi improprî; ed è normale nello S_4.

c) La rigata del quarto ordine razionale (proiezione della rigata razionale normale dello S_5). Ammette trisecanti, le quali sono distribuite sui piani di uno dei due sistemi contenuti nel cono quadrico che la proietta dall'unico

punto doppio improprio ch'essa possiede. I piani di questo sistema tagliano la superficie secondo cubiche che hanno, nel punto doppio di essa, un punto doppio. I piani dell'altro sistema contengono le generatrici della rigata.

d) La rigata del quinto ordine ellittica, normale nello S_4. Le sue trisecanti sono distribuite in ∞^1 piani che tagliano la superficie secondo cubiche. Ad una retta dello S_4 si appoggiano cinque di quei piani. La superficie non ammette punti doppi impropri.

e) La superficie F^5 non rigata a sezioni spaziali del genere 2. Questa F^5 è normale nello S_4, e per un noto teorema (di Enriques) è razionale. Le sue trisecanti sono distribuite nei piani di uno dei due sistemi contenuti in un cono quadrico (di prima specie) che passa per F. I piani di questo sistema tagliano F secondo cubiche; i piani dell'altro sistema tagliano F secondo coniche (è il fascio di coniche che, per un teorema pure dovuto ad Enriques, deve esser contenuto nella F). La superficie è priva di punti doppi impropri. Proiettandosi nello spazio ordinario la F dà luogo alla superficie razionale del quinto ordine (dotata di una quartica gobba di 1ª specie come linea doppia) che fu studiata dal Clebsch mediante la rappresentazione piana.

13. Il problema di determinare le superficie immerse nello spazio S_4, che son dotate di *un* punto triplo apparente, occupò il sig. Ascione in una Nota pubblicata nei Rendiconti dei Lincei (15). Ma riteniamo opportuno ritornare sopra la questione trattata dal sig. Ascione, poiché il risultato da questi ottenuto ha bisogno di esser completato. Accenneremo brevemente al metodo del sig. Ascione.

Profittando delle prime proposizioni sui sistemi ∞^{r-1} di rette immersi nello S_r, stabilite dal prof. Segre nella Nota citata al nº 9, si scrive facilmente la relazione:

$$u + 1 = 3v, \tag{1}$$

che lega l'ordine u della rigata delle trisecanti di una sezione spaziale generica della superficie F^n (dotata di un sol punto triplo apparente) e la moltiplicità v della sezione di F rispetto alla rigata suddetta. Inoltre, osservando che le rigate delle trisecanti di due sezioni spaziali generiche di F s'incontrano in u^2 punti, dei quali n giacciono sulla F e sono per le due rigate multipli secondo v, segue che:

$$u^2 - v^2 n \geq 0 ,$$

la quale, confrontata con la (1), dà luogo alla relazione:

$$(9 - n) u^2 - (2u + 1) n \geq 0 ,$$

donde si trae:

$$n < 9 .$$

(15) Cfr. ASCIONE, *Sul complesso di 1º ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un* S_4, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 61 (1897), pp. 162–169.

Siccome è evidentemente $n > 3$, basterà esaminare le superficie il cui ordine è compreso fra 3 e 9 (gli estremi esclusi), scartando quelle che non soddisfano al nostro problema. Il criterio di esclusione più importante usato dal sig. Ascione dipende dal fatto, affermato al n° 2 della sua Nota, che cioè, le sezioni spaziali delle F^n che si ricercano, non possono avere quadrisecanti. Ora questo fatto non sussiste; giacché non c'è incompatibilità fra l'ipotesi che il sistema delle trisecanti di F^n sia del primo ordine, e l'ipotesi che la sezione spaziale generica di F^n possegga quadrisecanti; mentre sarebbe incompatibile con la prima ipotesi l'altra che *ogni* trisecante di F incontrasse fuori de' suoi punti d'appoggio un'altra trisecante; ed è anzi quest'ultima osservazione che, implicitamente, giova al sig. Ascione per scrivere la (1).

Il sig. Ascione dimostra pure, servendosi di un'opportuna trasformazione Cremoniana tra due spazî, che la differenza $u^2 - v^2 n$ rappresenta il numero delle cubiche piane esistenti sulla F^n dotata di un sol punto triplo apparente.

Per una tale F^n, della quale si sappia inoltre che la sua sezione spaziale non ammette 4–secanti, si può vedere in altro modo che il numero $u^2 - v^2 n$ uguaglia il numero delle cubiche piane di F, osservando che se le rigate delle trisecanti di due sezioni spaziali generiche di F si incontrano, fuori di F, in $u^2 - v^2 n$ punti, uno di questi sarà foco per il sistema delle trisecanti di F (perché per esso passa più di una trisecante) e quindi per esso punto ne passeranno ∞^1. Una qualunque trisecante per quel punto sarà luogo di fochi, e quindi ad essa si appoggeranno ∞^2 trisecanti; per ogni suo punto ne passeranno ∞^1, e ogni trisecante a essa appoggiata, a meno che non la incontri in un punto di F, sarà essa pure luogo di fochi. Onde avremo, corrispondentemente a quel punto comune alle due rigate, ∞^2 rette singolari del sistema ∞^3, e siccome ad ognuna di esse se ne appoggiano ∞^1, i loro punti riempiranno una superficie che, contenendo ∞^2 rette, non potrà essere che un piano (giacché si riscontra subito che non può essere un insieme di piani). Questo piano taglierà F secondo una cubica, perché F non ha, per ipotesi, quadrisecanti.

Che se poi F possiede quadrisecanti (propriamente dette, cioè diverse da rette eventualmente esistenti su F), ogni quadrisecante sarà luogo di fochi, e quindi ad essa si appoggeranno ∞^2 rette trisecanti (almeno) la F; e una generica fra queste ∞^2 sarà pure luogo di fochi. Per ogni quadrisecante di F abbiamo dunque un insieme ∞^2 di rette tali che per un punto di una di esse ne passano ∞^1 altre; queste rette staranno dunque in un piano, il quale avrà con F una curva comune, e siccome la 4–secante da cui siamo partiti, non è parte di questa curva, e ne contiene 4 punti, si tratterà di una quartica piana. E dunque ogni trisecante di F appoggiata ad una quadrisecante in un punto esterno ad F, è essa stessa quadrisecante. Possiamo dire che, se F *possiede quadrisecanti, esse sono distribuite in un numero finito di piani che tagliano F secondo quartiche.* In tal caso il numero $u^2 - v^2 n$ non potrà esser nullo, ed anzi ogni piano di quadrisecanti poterà a quel numero un contri-

buto di 16 unità, perché per la rigata delle trisecanti di una sezione spaziale di F, un punto generico di una 4–secante è quadruplo.

Ciò premesso, per trovare le superficie che ricerchiamo procederemo nel modo seguente.

La (1) quando si tenga presente la formola (di Cayley) che dà l'ordine della rigata delle trisecanti della sezione spaziale di F^n, e quando si osservi che $v = \binom{n-2}{2} - p$, ove p è il genere della sezione suddetta, diviene:

$$2\binom{n-1}{3} - (n-2)\,p + 1 = 3\binom{n-2}{2} - 3\,p\,.$$

Per $n = 8$, $n = 7$, questa relazione darebbe per p valori fratti. Invece per $n = 6$ essa dà:

$$p = 3\,.$$

Alla soluzione corrisponde la superficie F^6 del Veronese, generabile con quattro reti projettive di spazi, la quale contiene 10 cubiche piane (perché $u^2 - v^2\,n = 10$), ognuna delle quali si appoggia a 9 delle 10 rette della superficie (Bordiga).

Per $n = 5$ la relazione (1) diviene un'identità in p, e ciò corrisponde al fatto che per $n = 5$ si hanno due superficie soddisfacenti al nostro problema, e cioè una F^5 a sezioni ellittiche non rigata, la quale contiene 5 cubiche piane, e una F^5 razionale, rigata, che è proiezione della rigata razionale normale dello S_6 (16).

(16) Possiamo con facilità dedurre dalle considerazioni svolte nel testo alcune proprietà interessanti di questa rigata. Anzitutto, siccome la sua sezione spaziale ha una quadrisecante, essa ammetterà un sol piano di quadrisecanti, ossia su essa sarà tracciata una sola quartica piana, che sarà direttrice semplice di F. La F possiede 3 punti doppi improprî (come risulta dalla formola del n° 2), e ognuna delle rette del triangolo di questi punti è quadrisecante di F; onde il piano dei 3 punti doppi impropri di F, sarà il piano delle sue quadrisecanti, e siccome una retta nel piano delle 4–secanti e passante per un punto doppio di F, la incontra ulteriormente in 2 punti, i punti doppi di F lo saranno pure per la quartica piana di cui discorriamo. Lo S_3 determinato dalle due generatrici di F per uno dei suoi punti doppi, e da un altro punto doppio di F, seca la F fuori di quelle generatrici in una cubica, da cui, come subito si riconosce, non potrà staccarsi un'altra generatrice di F, ed essa cubica dovendo avere un punto doppio (nel punto doppio di F per cui passa) sarà piana e razionale; e inoltre essa sarà direttrice semplice della F. Il suo piano congiunto col punto doppio di F, di cui ancora non si è profittato, dà uno S_3 che seca la F in una linea del 2° ordine con un punto doppio; ossia nell'insieme delle due generatrici che escono dal rimanente punto doppio di F. È allora evidente che profittando delle coppie di punti doppi di F, nel modo precedente, si otterranno 3 cubiche piane tracciate su F; né questa potrà contenere altre cubiche piane, perché per essa $u^2 - v^2\,n = 19$, e di queste intersezioni delle rigate delle trisecanti di due sezioni spaziali generiche, 16 sono assorbite dal punto comune ad esse e al piano delle quadrisecanti. Le generatrici di F appoggiandosi alla sua quartica piana e ad una sua cubica piana, riferiscono biunivocamente queste due curve in guisa che al punto doppio di quella cubica piana, come origine di uno dei rami per esso, risponde l'origine di un ramo uscente da quel punto e appartenente alla quartica di F. Viceversa, assunte nello S_4 una cubica razionale e una quartica piana razionale i cui piani abbiano

Per $n = 4$ si ha soltanto la poiezione sullo S_4 della F^4 del Veronese, normale nello S_5.

Nello spazio S_4 vi sono soltanto le seguenti superficie dotate di un sol punto triplo apparente:

a) La proiezione della superficie F^4 del Veronese, normale nello S_5. Non ha punti doppi improprî.

b) La superficie razionale del quinto ordine proiezione della F^5 non rigata dello S_5. Possiede un punto doppio improprio. Nello spazio ordinario dà per proiezione la F^5 con una linea doppia del 5° ordine, studiata segnatamente dal Caporali.

c) La F^5 proiezione della rigata razionale normale dello S_6. Ha 3 punti doppi impropri (17).

d) La F^6 razionale a sezioni sestiche del genere 3, già studiata dal Veronese e dal Bordiga. Non possiede punti doppi improprî.

14. Dalle considerazioni da noi svolte intorno ai punti doppi improprî di una superficie F dello S_4, discendono dei corollarî, che è interessante rilevare, sulla normalità della F.

Anzitutto la proposizione del n° 8 può enunciarsi così:

Se si esclude la proiezione della superficie di 4° ordine del Veronese, ogni superficie immersa nello S_4, che sia priva di punti doppi improprî, è ivi normale.

Sia M una forma passante per la superficie F, sia e P un punto doppio improprio di F. Da quanto dicemmo al n° 7 segue che *ogni* retta pel punto P incontra la F, e conseguentemente la M, in due punti infinitamente vicini. E dunque la forma M avrà nel punto P un punto doppio (almeno) (18). Un'altra forma M' passante per F ha pure in P un punto doppio, e quindi la completa intersezione di M ed M' ha in P un punto quadruplo. Ne deriva che la F non potrà esser completa intersezione delle due forme M ed M', ma esse dovranno ancora tagliarsi in una superficie F' la quale dovrà avere

in comune un punto doppio per entrambe, e riferendole biunivocamente in guisa che all'origine di ognuno dei rami della cubica pel punto doppio rispontde l'origine di uno dei rami della quartica, uscenti da quello, si ottiene come luogo delle congiungenti le coppie di punti omologhi una rigata razionale del 5° ordine. Riassumendo: *Una F^5 rigata razionale dello S_4 possiede una sola direttrice semplice piana del 4° ordine, che ha i suoi 3 punti doppi nei punti doppi improprî di F; e soltanto 3 direttrici semplici del 3° ordine, di cui ognuna ha il punto doppio in un punto doppio improprio di F. La F^5 si può generare come luogo delle congiungenti i punti omologhi di una quartica piana razionale, e di una cubica piana razionale che abbiamo comune un punto doppio per entrambe e che siano riferite in modo conveniente.*

(17) È questa superficie che manca nella enumerazione del sig. Ascione; e, date le premesse, era naturale dovesse mancare, poiché la sua sezione spaziale possiede una quadrisecante.

(18) Se P è un punto doppio improprio di 1ª specie, lo stesso si vede pensando che la forma tangente ad M in P, dovendo contenere due piani che hanno un solo punto comune, non potrà essere uno S_3.

in P un punto doppio. Dunque ogni superficie F che possegga un punto doppio improprio non può essere la completa intersezione di due forme: se F è la completa intersezione di due forme, non avrà punti doppi impropri. Siccome la proiezione della F^4 del Veronese non è completa intersezione di due forme, potremo dire:

Ogni superficie immersa nello S_4, che sia completa intersezione di due forme, è normale (19).

Per la superficie F^n immersa nello S_4 passi una quadrica M (che necessariamente non sarà specializzata in una coppia di spazî). Se F^n possiede un punto doppio improprio P, M avrà ivi un punto doppio e quindi ogni retta uscente da P che contenga un altro punto di F giacerà in M. L'insieme di queste rette appartiene ad una forma conica di ordine $n-2$, la quale deve essere contenuta in M. Ciò è possibile soltanto se $n-2 \leq 2$, e quindi $n \leq 4$. Per $n = 3$ si ha nello S_4 una rigata (per cui passano ∞^2 coni quadrici di prima specie), che è normale. Per $n=4$ delle tre superficie esistenti nello S_4, l'unica che possegga un punto doppio improprio è la F^4 razionale rigata, e per essa passa una sola quadrica, che è il cono che la proietta dal punto doppio.

L'unica superficie immersa nello S_4 dotata di qualche punto doppio improprio, la quale giaccia in qualche quadrica, è la F^4 rigata.

Siccome la F^4 proiezione generica della superficie di Veronese non giace in alcuna quadrica, ed ogni superficie dello S_4 giacente in una quadrica, se non è la F^4 rigata, non può avere punti doppi impropri, si conclude che:

Se si esclude la F^4 rigata, ogni altra superficie dello S_4, giacente in qualche quadrica, è normale (20).

OSSERVAZIONI COMPLEMENTARI

Il teorema del n. 8 riferiscesi alle superficie (irriducibili) « generali » dello S_5 (cioè prive di punti multipli); ma con lieve aggiunta vale anche per superficie dotate di singolarità qualunque, purché s'intenda per punto doppio apparente di una tal superficie, F, una coppia di punti semplici *distinti* della superficie, allineati con un punto generico O di S_5. Il ragionamento prova invero, anche in quest'ipotesi più generale, che la varietà V delle corde

(19) Questo teorema, come risulta dalla dimostrazione, va inteso con le debite restrizioni: in modo assoluto vale per le superficie dotate di soli punti doppi in numero finito o infinito. — Vale anche il teorema analogo per le curve dello spazio ordinario: *Ogni curva dello S_3, priva di punti multipli, che sia completa intersezione di due superficie, è normale*, e si dimostra ricorrendo per esempio al teorema di Riemann-Roch.

(20) Nello spazio ordinario la proposizione analoga, per le curve per cui passi qualche quadrica, non sussiste, Sopra una F^2 dello S_3 si può, per ogni valore di n, costruire una curva d'ordine n, la quale non sia normale nello S_3. Così, ponendo fra le generatrici delle due schiere della F^2 una corrispondenza $(1, n-1)$, il luogo dei punti per cui passano due generatrici omologhe è una curva d'ordine n, la quale ammette come rette $(n-1)$-secanti tutte le generatrici di una schiera. Essa curva è evidentemente razionale e quindi normale nello S_n.

di F, come varietà di punti non può avere dimensione inferiore a 4 e che, se V ha dimensione 4, la F contiene ∞^2 coniche. Quando la generica di queste è irriducibile, F è la superficie di Veronese; altrimenti è un *cono*. Analogamente posson completarsi le proposizioni del n. 14 (legate al n. 8) le quali si riferiscono alle sole superficie generali di S_4, tra cui non sono compresi i coni (ved. anche a tal proposito la nota (9) della Memoria VIII [del presente volume]).

Del gruppo dei punti doppi improprî di F è stata assegnata da P. THULLEN, *Determinazione della serie di equivalenza, individuata dal gruppo dei punti doppi improprî di una superficie dell'* S_4, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *59*, (1935), pp. 256–260, l'espressione funzionale mediante le serie di equivalenza invarianti di F. La stessa espressione è stata assegnata indipendentemente da B. SEGRE, *Un problema di geometria numerativa*, Boll. Un. Mat. Italiana, 1936, pp. 49–55 (ved. nei riguardi di tali serie un successivo volume della presente raccolta).

VII.

SUGLI SPAZI PLURISECANTI D'UNA SEMPLICE INFINITÀ RAZIONALE DI SPAZI (*)

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 9_1 (1902), pp. 52–56 (**).

Ivi è determinato il numero N degli S_k che contengono il massimo numero t di spazi generatori S_h di una ∞^1 razionale, di ordine v, appartenente ad un S_r. Esso è dato da

$$(1) \qquad N = \frac{[v+h-(h+1)t+1]\,[v+h-(h+1)t+2]\cdots[v+h-k-1]}{[r-k]\,[r-k+1]\cdots[r-2k+(h+1)t-2]},$$

ove $t\{(h+1)(r-k)-1\} = (k+1)(r-k)$ e $[u]$ sta per $\left(\frac{u}{r-k}\right)$.

Ci si riferisce all'uopo alla varietà V di ordine v, normale in uno spazio S_{v+h}, di cui la data varietà ∞^1 di S_h è proiezione. Ogni t–pla di spazi generatori di V appartiene ad un $S_{(h+1)t-1}$, e il sistema di questi $S_{(h+1)t-1}$ si genera mediante una proiettività fra $v+h-(h+1)t+1$ sistemi lineari di iperpiani di S_{v+h}, ognuno dei quali consta degl'iperpiani passanti per una direttrice ad h dimensioni, d'ordine $v-t$, di V. Si tratta poi di trovare quanti di quegli $S_{(h+1)t-1}$ si appoggiano ad un dato $S_{v+h-r-1}$, secondo un $S_{(h+1)t-k-2}$. All'uopo si applica una formola notevole di Corrado Segre, che dà gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi ordini estratti da una data matrice (1).

Questa formula fu dedotta dal Segre da altra, relativa alle correlazioni, che Schubert (2) aveva enunciato senza dimostrazione.

La formula di Schubert fu dimostrata da Giambelli nella propria dissertazione di laurea (1902) (3), trattando il cosidetto « problema delle correlalazioni ». Il metodo ivi usato è il medesimo di quello della degenerazione

(*) In luogo della Nota originale viene qui riprodotto il testo redatto dall'Autore a commento della Nota stessa, apparso nel volume: F. SEVERI, *Memorie scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, pp. 39–40 (N.d.R.).

(**) Nota presentata dal Socio C. Segre nella seduta del 19 gennaio 1902.

(1) C. SEGRE, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, 9 (1900), pp. 253–260, oppure Opere, Vol. IV, Edizioni Cremonese, Roma, 1963, pp. 179–187.

(2) « Jahresber. der deutsch. Math. Verein. », 1894–95.

(3) Mem. dell'Istituto Lombardo, 1903.

delle correlazioni che, per taluni casi particolari, era stato adoperato dallo stesso Schubert. Si fa naturalmente uso della conservazione del numero. Per renderne pienamente rigorosa l'applicazione (della cui legittimità lo scrivente in questo caso non dubita), ciò che sarebbe opportuno trattandosi di applicarlo ad una varietà con elementi degeneri, occorrerebbe di esaminare se sono soddisfatte le debite condizioni [4].

Nel caso $h = 0$, in cui dunque la varietà di S_ν riducesi ad una curva razionale, la formula (1) contiene quella scritta per induzione da Meyer e da Tanturri, la quale pertanto risulta dimostrata (salvo i complementi inerenti alla conservazione del numero).

Ci siamo trattenuti su queste notizie per l'interesse che oggi possono offrire di fronte alle esigenze di una completa messa a punto dei risultati più significativi della geometria numerativa.

(4) Ved. la Memoria F. SEVERI, *I fondamenti della Geometria numerativa*, Ann. di Mat., (4) *19* (1940), pp. 153–242.

VIII.

SULLE INTERSEZIONI DELLE VARIETÀ ALGEBRICHE E SOPRA I LORO CARATTERI E SINGOLARITÀ PROIETTIVE (*)

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *52* (1902), pp. 61–118 (**).

Le questioni trattate in questa Memoria sotto la denominazione comune di *problemi delle intersezioni di varietà algebriche*, si possono raggruppare in tre categorie:

1ª Definite in uno S_r due o più varietà algebriche $V^{(1)}_{k_1}, \cdots, V^{(p)}_{k_p}$ mediante certi loro *caratteri*, determinare i caratteri della varietà a $\sum k_i - (p-1)r$ dimensioni ad esse comune, supposto che le varietà date siano in posizione generica.

2ª Definite $V^{(1)}, \cdots, V^{(p)}$ come sopra, e supposto che la loro intersezione a $\sum k_i - (p-1)r$ dimensioni, si spezzi in due parti, assegnati i caratteri d'una parte, determinare quelli dall'altra, e i caratteri della varietà comune alle due parti.

3ª Definite ancora $V^{(1)}, \cdots, V^{(p)}$ come sopra, supposto ch'esse abbiano comune una parte di dimensioni $h > \sum k_i - (p-1)r$, della quale siano assegnati i caratteri, determinare i caratteri della parte a $\sum k_i - (p-1)r$ dimensioni ulteriormente comune, e i caratteri della varietà comune alle due parti. – I problemi di questa categoria si possono anche chiamare *problemi di equivalenza.*

Si avrà sempre di mira, nella risoluzione dei problemi d'intersezione, di ottenere formole *definitive*, nelle quali *non compariscano numeri la cui definizione dipenda dalla considerazione simultanea delle varietà* $V^{(1)}, \cdots, V^{(p)}$ *delle quali si studia lo intersecarsi, ma soltanto numeri che si definiscano considerando* SEPARATAMENTE *le suddette varietà.* Mantenendoci fedeli a questo proposito, nelle applicazioni troveremo sempre spogliata la questione dalla sua veste di problema d'intersezioni.

Per procedere con chiarezza, al Capitolo primo si premettono alcune considerazioni generali sui caratteri delle varietà algebriche e sulle loro singolarità proiettive. Lo studio di queste singolarità è argomento di tale importanza e tale vastità da non potersi certo abbracciare con un solo lavoro, né scopo precipuo di questa Memoria è quello di approfondire questioni di tal natura. Pure mi sembra che una qualche luce possano portare in proposito le considerazioni del § 2, ove, ad esempio, si determina l'ordine della *varietà*

(*) Ristampato in F. SEVERI, *Memorie scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, pp. 41–115, con Osservazioni complementari aggiunte dall'Autore in quell'occasione. (N.d.R.).

(**) Memoria presentata dai Soci C. Segre e E. D'Ovidio nell'adunanza dell'8 febbraio 1902.

dei punti doppi improprî di una qualsiasi varietà algebrica. – Un fatto notevole relativamente alle singolarità delle varietà è quello segnalato al § 3, che cioè una V_h passante per una V_k (quando h e k soddisfacciano ad una certa disuguaglianza) è obbligata ad avere, oltreché nei punti doppi improprî, anche in punti semplici di V_k, dei punti doppi. – Naturalmente nei problemi d'intersezione queste considerazioni giovano continuamente come può vedersi, ad esempio negli sviluppi del § 9.

In questo lavoro accettiamo sempre, salvo nei casi in cui esplicitamente si dichiara il contrario, la più ampia concezione di varietà algebrica (1); così al Capitolo secondo si trattano in tutta la loro generalità i problemi della 1ª categoria per varietà qualsiansi, e, spero, non si vorrà disconoscere a quella trattazione una grande semplicità, di fronte alla larghezza del resultato.

L'enunciato del problema delle intersezioni press'a poco sotto una forma così ampia, come abbiamo presentato in principio, è del Caporali; e di ciò fa fede una lettera diretta al prof. Segre nel settembre del 1885 (2). In quella lettera il Caporali parla di una Nota in cui il problema sarebbe completamente risoluto. Ma dopo la sventurata sua morte non furono trovati che dei frammenti, relativi allo spazio a quattro dimensioni, i quali furon pubblicati nel volume delle *Memorie* (3). La lettura di quei frammenti fa supporre che il Caporali, accingendosi alla risoluzione del problema, di assai ne diminuisce la generalità usando mezzi di ricerca, che tacitamente ammettono restrizioni sulla natura degli enti considerati, come a suo tempo farò notare. Se, usando un metodo diverso da quello dei frammenti, il Caporali avesse pensato al problema nella sua primitiva generalità, avrebbe dovuto ottenere delle formule in cui, oltre ai caratteri da lui enumerati (ordine, ranghi, ecc.) delle varietà considerate, avrebbero dovuto comparire altri caratteri: per esempio quelli che al § 1 chiamerò *ceti*.

CAPITOLO PRIMO

§ 1. – Caratteri di una varieta algebrica.

1. Noi adottiamo la definizione di *varietà algebrica* contenuta nella classica « Introduzione » del prof. Segre. Nel seguito, fra le proprietà che si deducono da quella definizione, ci servirà più frequentemente il fatto che una

(1) Cfr. C. Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Matematica, (2) *22* (1894), pp. 41–142, oppure *Opere*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1957, pp. 198–304.

Nei problemi d'intersezione trattati nelle *Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen* di Salmon-Fiedler (Zweite Aufl., Leipzig, 1877, pag. 374 e segg.), si suppone che le varietà considerate siano definite ciascuna come completa intersezione di forme.

(2) Cfr. C. Segre, *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane*, Annali di Matematica, (2) *20* (1892), pp. 237–242, oppure *Opere*, Vol. IV, Edizioni Cremonese, Roma, 1963, pp. 169–174.

(3) *Memorie di Geometria*, edite da B. Pellerano, Napoli, 1888. I frammenti ai quali si allude nel testo sono intitolati: *Sullo spazio di quattro dimensioni*.

varietà a k dimensioni, V, è secata da uno S_{r-k} generico del suo spazio S_r, in un numero finito di punti, che non varia mutando lo S_{r-k}. Chiameremo, come si suole, *ordine* della varietà questo numero, e lo denoteremo con ϱ_0 od anche con ω_0.

In un punto generico di V le tangenti ai rami curvilinei tracciati sopra V a partire da quel punto riempono uno spazio S_k che dicesi *tangente* a V. E quindi insieme alla V sorge la considerazione della varietà ∞^k de' suoi S_k tangenti.

Chiameremo *carattere* $(a_0, a_1, \cdots, a_k)$ di V l'ordine della M_d luogo dei punti di contatto degli S_k tangenti a V e soddisfacenti alla condizione fondamentale $(a_0, \cdots, a_k)$, ossia appartenenti alla forma fondamentale $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ (4). Siccome per un $[k]$ dello S_r giacere nella forma $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ è condizione di specie

$$(k+1)\,r - \frac{1}{2}\,k\,(k+1) - \sum_0^k a_i\,,$$

sarà:

$$d = \sum_0^k a_i + \frac{1}{2}\,k\,(k+3) - (k+1)\,r.$$

Ultimi caratteri di V si diranno quelli per i quali la M_d corrispondente riducesi ad un gruppo di punti $(d = 0)$.

Se fosse $a_k < r$, siccome per un $[k]$ dello S_r giacere in un dato $[a_k]$ è condizione di specie $(k+1)\,(r - a_k)$, ossia di specie maggiore di k, non potrebbe esistere nessun S_k tangente a V e appartenente alla figura $[a_0, \cdots, a_k]$. Dunque dovrà essere $a_k = r$.

A partire da un certo valore di i potrà darsi che gli spazî $[a_i]$ relativi alla condizione $(a_0, a_1, \cdots, a_k)$ siano di dimensione così elevata, che la condizione suddetta sia senz'altro soddisfatta dagli S_k incontranti nella voluta maniera gli spazî $[a_i]$ corrispondenti a valori di i più piccoli di quel certo; e quindi se ci vogliamo porre nelle ipotesi più generali dovremo ammettere che sia

$$a_{s+1} = r+s+1-k\,, \qquad a_{s+2} = r+s+2-k\,, \cdots, a_{k-1} = r-1,$$

mentre è

$$a_s + k - r < s,$$

e conseguentemente

$$a_i + k - r < t \qquad (i = 0, 1, \cdots, s).$$

(4) Con SCHUBERT dicesi *forma* o *figura fondamentale* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, l'insieme degli S_k che hanno con un dato $[a_0]$ un punto comune, con un dato $[a_1]$ una retta, ..., con un dato $[a_i]$ un $S_i, \cdots$, e che giacciono in un dato $[a_k]$, per ogni valore di i verificandosi che lo spazio $[a_{i+1}]$ passa per $[a_i]$. Naturalmente, se r è la dimensione dell'ambiente, sarà $0 \leq a_0 < a_1 < a_2 \cdots < a_k \leq r$.

L'opportunità della definizione di caratteri data nel testo segue da ciò, che il numero degli spazi tangenti a V e soddisfacenti ad una condizione algebrica qualsiasi (indipendente da quella che s'impone a un S_k volendo che tocchi V), si può esprimere con una somma di caratteri $(a_0, a_1, \cdots, a_k)$.

In tali ipotesi il carattere $(a_0 , a_1 , \cdots , a_k)$ si indicherà col simbolo:

$$\varphi (a_0 + k - r , a_1 + k - r , \cdots , a_s + k - r)$$

e potrà anche definirsi come l'ordine del luogo dei punti di contatto degli S_k tangenti a V, i quali incontrano secondo spazî $[s]$ la forma $[a_0 , a_1 , \cdots , a_s]$.

Seghiamo tutto con uno spazio generico Ω_{r-d} passante per la forma $[a_0 , a_1 , \cdots , a_s]$ (5). Il carattere $(a_0 , a_1 , \cdots , a_k)$ di V uguaglia allora il numero degli S_{k-d} tangenti alla sezione v di V, che incontrano la forma $[a_0 , \cdots , a_s]$ secondo spazî $[s]$; il qual numero è uno dei ultimi caratteri di v, e come tale gli spetta il simbolo:

$$\varphi (a_0 + (k - d) - (r - d) , \cdots , a_s + (k - d) - (r - d)),$$

ossia il medesimo simbolo che gli spettava come carattere di V. Si può dunque dire che *ogni carattere di V si può riguardare come ultimo per una sua conveniente sezione spaziale* e che, *secando genericamente una varietà, un carattere di un certo simbolo nella varietà sezione uguaglia il carattere dello stesso simbolo della varietà oggettiva.*

Se V è proiezione generica di una varietà V' di uno spazio $S_{r'}$ $(r' > r)$ il carattere $\varphi (a_0 + k - r , \cdots , a_s + k - r)$ di V uguaglia l'ordine della varietà dei punti di contatto degli S_k tangenti a V' e incontranti la forma:

$$[a_0 + r' - r , a_1 + r' - r , \cdots , a_s + r' - r]$$

secondo spazi $[s]$, ossia il carattere:

$$\varphi \{(a_0 + r' - r) + k - r' , \cdots , (a_s + r' - r) + k - r'\},$$

che ha lo stesso simbolo del carattere considerato di V. Onde:

Proiettando genericamente una varietà, un carattere di un certo simbolo nella proiezione uguaglia il carattere dello stesso simbolo nella varietà oggettiva.

Fra i caratteri di V per noi avranno particolare importanza nel seguito i caratteri di simboli:

$$\varphi (-1 , 0 , 1 , 2 , \cdots , i - 2) , \qquad \varphi (-i).$$

Il carattere $\varphi (-1 , 0 , 1 , \cdots , i - 2)$ si definisce come l'ordine della M_{k-i} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V e appoggiati a un dato

(5) Si noti che $r - d > a_s$, e quindi che la cosa ha senso. Difatti $k - d$ denota la specie della condizione che s'impone a un $[k]$ obbligandolo ad appartenere alla figura $[a_0 , \cdots , a_k]$, mentre $(s + 1)(r - k - a_s + s)$ denota la specie della condizione che s'impone a un $[k]$ obbligandolo ad incontrare uno $[a_s]$ secondo un $[s]$. Dunque:

$$k - d \geq (s + 1)(r - k - a_s + s) .$$

Siccome poi:

$$(s + 1)(r - k - a_s + s) > s > a_s + k - r ,$$

sarà: $\qquad k - d > a_s + k - r , \qquad$ ossia: $\qquad r - d > a_s .$

$S_{r-k+i-2}$ secondo uno S_{i-1} $(i = 1, 2, \cdots, k)$. Lo chiameremo la *classe i–esima* di V e si rappresenterà spesso con la lettera ϱ_i (6). *L'ultima classe di V è il numero degli iperpiani di un fascio che le son tangenti* (ossia che passano per S_k tangenti), *e le altre classi sono i numeri analoghi per le sezioni spaziali di V.*

Il carattere $\varphi(-i)$, ossia l'ordine delle M_{k-i} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V e appoggiati a un dato S_{r-k-i}, lo chiameremo il *ceto i–esimo* di V e verrà spesso indicato con la lettera ω_i. S'intende che i non dovrà superare il minore fra i due numeri k ed $r - k$. L'*ultimo ceto* di V è l'ordine della varietà delle sue tangenti, se $r \geq 2k$.

L'ordine ϱ_0 od ω_0 di V, si riguarderà, per ottenere omogeneità nelle formole, come *classe* 0*–esima* o come *ceto* 0*–esimo* (7).

§ 2. – Di alcune singolarità proiettive d'una varietà.

2. Data nello S_r una varietà V_k, accoppiando ad ogni punto di V ogni altro punto della varietà stessa, otteniamo una ∞^{2k} algebrica di coppie di punti, fra le quali, se $2k \geq r$, si trovano in generale ∞^{2k-r} *coincidenze perfette*, tali cioè che ogni retta dell'iperstella avente per centro una di quelle, è una *corda impropria* di V, ossia una retta che è posizione limite di qualche corda di V, quando i punti d'appoggio di questa corda tendono con una certa legge al centro della iperstella (8). Queste coincidenze saranno punti doppi di V e costituiranno una varietà M_{2k-r} algebrica, che chiameremo varietà dei *punti doppi improprî* (9).

(6) Questa categoria di caratteri fu considerata pure dal Caporali (ved. nel volume delle *Memorie* il frammento: *Sulla teoria degli spazî a più dimensioni*), il quale li chiamava ranghi. Noi abbiamo creduto opportuno di adottare il nome *classi*, perché classe è un sinonimo non necessario di ultimo rango di una curva, e perché per una forma si chiamava già classe il numero degli iperpiani di un fascio che le son tangenti; mentre invece le locuzioni primo rango, secondo rango, ecc., servono per nominare gli ordini delle sviluppabili osculatrici ad una curva.

(7) Come per le curve, così per le varietà comunque estese, si potrebbero considerare altri caratteri, oltre a quelli da noi definiti, imponendo condizioni fondamentali ai loro spazî osculatori. (La definizione degli spazî osculatori ad una V_k trovasi in Del Pezzo).

Ma forse, come per le curve prive di singolarità puntuali, per le varietà che si possano riguardare come proiezioni *generiche* di varietà prive di punti multipli appartenenti a spazî superiori, i nuovi caratteri che s'introdurrebbero si potrebbero esprimere in funzione di quelli da noi introdotti.

(8) Cfr., per l'ordine di idee del testo, la Nota del prof. M. Pieri, *Formule di coincidenza per le serie algebriche ∞^n di coppie di punti dello spazio ad n dimensioni*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 5 (1891), pp. 252–268 e B. Levi, *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *48* (1898), pp. 83–142.

(9) Per le superficie già considerai i punti doppi improprî nella Nota VI. Al n° 8 di questa Nota dopo esser giunto alla conclusione che la superficie Φ dello S_5, priva di punti doppi apparenti, contiene un sistema ∞^2 di coniche, d'indice 1, non potevo subito concludere, come conclusi, che Φ è la superficie del Veronese: ciò è vero a patto che le coniche del sistema

Se poi ad ogni punto di questa varietà accoppiamo ogni punto della V otteniamo in generale, se $3k \geq 2r$, una ∞_{3k-2r} di coincidenze perfette, la quale costituirà una varietà di punti tripli per V. Se ad ogni punto della M_{3k-2r} dei punti tripli aggreghiamo ogni punto della V otteniamo in generale una M_{4k-3r} di punti quadrupli per V; e così continuando [10].

La esistenza delle varietà multiple successive di una V_k dello S_r $(2k \geq r)$ può anche giustificarsi ammettendo che per le varietà superiori, come per le curve, esista un teorema di Nöther [11]; cioè sia sempre possibile riguardare la V_k come proiezione di una V'_k di uno S_d, priva di punti multipli. Al centro di proiezione O_{d-r-1} si appoggeranno ∞^{2k-r} corde di V', giacché per una retta dello S_d appoggiarsi ad O è condizione r–pla. La V avrà in corrispondenza una M_{2k-r} doppia. Se poi il centro di proiezione assumesse particolari posizioni rispetto a V', potrebbero i punti della M_{2k-r} multipla, nella varietà proiezione, essere di composizione meno semplice e anche aumentare di molteplicità.

I piani trisecanti di V' incontranti O secondo una retta, sono ∞^{3k-2r} [12] e quindi V avrà in corrispondenza una M_{3k-2r} di punti tripli, e, per particolari posizioni di O, si può fare su questa varietà l'osservazione analoga a quella fatta prima. E così seguitando.

non siano tutte spezzate, ma può anche darsi che questo accada. Allora siccome la Φ non può contenere ∞^2 rette, ogni retta di Φ ne incontrerà infinite altre, e poiché Φ (essendo dello S_5) non è una quadrica, sarà un cono. La superficie del Veronese è dunque la sola superficie *non conica* dello S_5, priva di punti doppi apparenti. Sicché la proposizione al principio del n° 14, va enunciata così: Se si escludono i coni e la proiezione della superficie del Veronese, ogni superficie dello S_4, dotata eventualmente di un numero finito di punti doppi, ma che sia priva di punti doppi improprî, è normale. Abbiamo aggiunto in questa proposizione la restrizione che la superficie abbia un numero finito di punti doppi, perché le considerazioni del n° 8 eran relative all'ipotesi che il centro da cui si guardava la Φ fosse un punto generico dello S_5, e quindi tale che la superficie proiezione non avesse infiniti punti doppi. Naturalmente va in conseguenza ristretto anche l'enunciato relativo alla normalità della completa intersezione di due forme. L'enunciato successivo, che cioè l'unica superficie dello S_4 dotata di qualche punto doppio improprio, la quale giaccia in una quadrica, è la F^4 rigata non soffre modificazioni, perché nonostante che la F^4 del Veronese si proietti da un punto di una sua corda in una superficie con una retta doppia, ai punti di questa manca la caratteristica *proiettiva* dei punti doppi improprî; si noti però che i punti della retta doppia sono improprî nel senso di Enriques. E dalla proposizione antecedente si deduce immediatamente l'altra: Se si esclude la F^4 rigata, ogni altra superficie (con un numero finito di punti doppi) per la quale passi qualche quadrica è normale.

(10) La locuzione *in generale* alla quale è subordinata l'affermazione dell'esistenza della varietà doppia, tripla, quadrupla, ecc. di V, dipende dal fatto che *eccezionalmente* una varietà ∞^x $(x \geq r)$ di coppie di punti dello S_r può possedere meno che ∞^{x-r} coincidenze perfette.

(11) Il Prof. Del Pezzo alla fine della sua Nota, *Estensione di un teorema di Nöther*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2 (1888), pp. 139–144, accenna alla possibilità di estendere il teorema di Nöther, relativo alle curve, anche alle varietà superiori.

(12) Si dovrà dire: Le rette trisecanti di V' passanti per O sono ∞^{3k-2r}, se $d = r+1$.

Risulta anche in questo modo che i punti i–pli di V sono $\binom{i}{2}$–pli per la varietà doppia, $\binom{i}{3}$–pli per la varietà tripla, $\cdots$, i–pli per la varietà dei punti $(i-1)$–pli di V.

Si noti che proiettando genericamente su uno S_r una V_k $(2k \geq r)$ dello S_d, priva di punti multipli, la M_{2k-r} doppia per la proiezione V_k, proveniente dalle corde di V' appoggiate al centro di proiezione O_{d-r-1}, è la varietà dei punti doppi improprî di V. Che, nelle ipotesi ora poste, ogni punto di quest'ultima varietà appartenga alla M_{2k-r} prima nominata, è evidente; che poi un punto doppio P di V, il quale provenga da due punti distinti P_1, P_2 di V', la cui congiungente appoggiasi ad O, sia un punto doppio improprio, può vedersi nel modo seguente. Se si considera il cono delle ∞^{2k-r+1} corde di V per un punto generico L del suo spazio, una generatrice generica di tale cono sarà, nelle nostre ipotesi, una corda propriamente detta di V, e inoltre fra le generatrici dovrà trovarsi la retta PL, perché altrimenti proiettando da L la V su un iperpiano, P darebbe luogo a un punto doppio isolato della proiezione, dal che, a causa della genericità di O e di L, sarebbe forza concludere che da un S_{d-r} generico la V si proietta su uno S_{r-1} secondo una varietà con punti doppi isolati, il che è assurdo. Ma dunque ogni retta uscente da P appartiene alla varietà delle corde di V, e quindi, giusta la definizione, P sarà un punto doppio improprio.

Siccome una sezione di V' con un certo spazio per lo $S_{r-k}OP_1$, non è che una sezione generica di V', ne segue che i caratteri di una sezione della varietà V con uno spazio condotto genericamente per un suo punto doppio improprio, sono uguali ai caratteri di ugual simbolo che spettano ad una sezione generica; o, altrimenti, la varietà dei punti di contatto degli S_k tangenti a V e appartenenti alla figura $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ non passa per la M_{2k-r} dei punti doppi improprî di V.

Nel caso $2k < r$ noi diremo che una V_k dello S_r è *generale*, quando non ha punti multipli; se poi $2k \geq r$ parlando di una V_k *generale* s'intenderà di parlare di una varietà le cui singolarità puntuali siano *in tutto assimilabili* a quelle di una varietà M_k proiezione generica sullo S_r di una varietà, di uno spazio superiore, priva di punti multipli. Prescindendo dal concetto di composizione delle singolarità puntuali, la locuzione *in tutto assimilabili* significherà che le proprietà delle varietà multiple (doppia, tripla, ecc.) di V, delle quali dovremo far uso nel nostro studio, sono identiche a quelle delle varietà multiple di una M_k proiezione generica di un'altra priva di punti multipli.

Possiamo riassumendo dire che *una V_k generale dello S_r, se $2k = r + h$ $(h \geq 0)$, possiede una $M_{h-(i-2)(r-k)}$ di punti i–pli $(i = 2, 3, \cdots$ in guisa che $(i-2)(r-k) \leq h)$, che sono $\binom{i}{2}$–pli per la M_h doppia, $\binom{i}{3}$–pli per la $M_{h-(r-k)}$ tripla, $\cdots$, i–pli per la varietà dei punti $(i-1)$–pli.*

E inoltre: *La varietà dei punti di contatto degli S_k tangenti ad una V_k generale e appartenti alla figura generica $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, non passa per la M_{2k-r} dei punti doppi improprî di V.*

In particolare la M_{k-1} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V e appoggiati a un dato S_{r-k-1} non passa per la suddetta varietà di punti doppi. Ciò equivale a dire che la *sezione curvilinea di V per un punto doppio improprio, ha lo stesso genere di una sezione curvilinea generica.*

3. Data nello S_r una V_k generale, se $2k \geq r$, abbiamo visto che V possiede una M_{2k-r} doppia. Assegnati i caratteri di V ci proponiamo di calcolare l'ordine di questa varietà doppia.

È chiaro che basterà limitarsi al caso $2k = r$, giacché per sezione con un conveniente spazio sempre a questo ci possiamo ridurre.

Rappresentiamo con $d[r, k]$ il numero incognito dei punti doppi improprî di una V_k generale dello S_r $(2k = r)$. Per un punto O dello S_r passa una semplice infinità di corde della V, le quali costituiscono un cono Γ. Diciamo omologhi due punti P, P' di V quando sono in una medesima generatrice di Γ.

Il numero delle coppie PP', il cui punto P giace in un dato S_{r-1}, uguaglia il doppio del numero delle corde di una varietà a $k-1$ dimensioni, sezione di V col dato S_{r-1}, le quali passano per un dato punto ivi, come si vede conducendo l'iperpiano secante pel punto O.

Analogamente pel numero delle coppie PP' il cui P' sta in un dato iperpiano.

Quanto poi al numero delle coppie la cui retta PP' appoggiasi a un dato S_{r-2}, è pur chiaro che sarà dato dal doppio dell'ordine del cono Γ, che è espresso da $d[r-2, k-1]$, giacché tante sono le corde di una sezione iperpiana di V, le quali passano per un punto dello spazio secante, quanti sono i punti doppi della proiezione sopra uno S_{r-2}, di quella sezione iperpiana.

Le coincidenze PP' si hanno nei punti doppi improprî di V, ciascuno da contarsi due volte, e nei punti di contatto delle ω_k tangenti di V, che passano pel punto O. Si ha quindi la formola ricorrente:

$$2\,d[r, k] + \omega_k = 2\,d[r-2, k-1].$$

Applicandola successivamente per valori decrescenti di k si ha:

$$2\,d[r-2, k-1] + \omega_{k-1} = 2\,d[r-4, k-2]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\,d[4, 2] + \omega_2 = 2\,d[2, 1]$$
$$2\,d[2, 1] + \omega_1 = \varrho_0(\varrho_0 - 1).$$

Sommando a membro a membro si ottiene:

$$2\,d[r, k] + \sum_1^k{}_i\, \omega_i = \varrho_0(\varrho_0 - 1),$$

donde:

$$d[r, k] = \binom{\varrho_0}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^k \omega_i \quad (13).$$

(13) Si noti che dalle formole precedenti si trae che *i ceti di una varietà generale son numeri pari*. Il resultato definitivo si poteva ottenere anche (e il concetto non è sostanzialmente

Si può enunciare:

Una V_k generale dello S_r $(2k \geq r)$ di ordine ϱ_0 e ceti $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r-k}$, possiede una varietà a $2k-r$ dimensioni di punti doppi improprî, il cui ordine è espresso da:

$$\binom{\varrho_0}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^{r-k} {}_i\, \omega_i .$$

Questa è la prima di una serie di relazioni che legano i caratteri di V ai caratteri delle sue varietà multiple. La ricerca di tutte queste relazioni ci farebbe di troppo deviare dal nostro problema.

Se, essendo $2k \geq r$, la varietà V non ha punti multipli, i caratteri da noi introdotti non sono indipendenti: fra essi c'è almeno la relazione:

$$\binom{\varrho_0}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^{r-k} {}_i\, \omega_i = 0 .$$

4. Ed ora, per fare un esempio delle cose precedenti, fermiamoci un po' sopra una V_k luogo di $\infty^1 S_{k-1}$, la quale sia di ordine ϱ_0 e genere p (14). Faremo vedere che anche in tal caso le classi e i ceti non sono indipendenti, ma che tutti possono esprimersi in funzione dell'ordine e del genere di V.

L'ultima classe di una V_k siffatta, suppostala immersa in uno S_r, è il numero de' suoi S_k tangenti appoggiati a un dato S_{r-2} secondo uno S_{k-1}. Per ogni tale S_k tangente (se ci fosse) si dovrebbe avere uno S_{k-1} generatore appoggiato al dato S_{r-2} secondo uno S_{k-2}. Ora per uno S_{k-1} appoggiarsi, secondo uno S_{k-2}, a un dato S_{r-2}, è condizione $(k-1)$-pla, onde non potrà darsi che ci siano S_{k-1} generatori soddisfacenti alla condizione suddetta, a meno che non sia $k-1=1$, ossia $k=2$. E dunque per una V_k luogo di $\infty^1 S_{k-1}$ le classi sono:

$$\varrho_1 = 2(\varrho_0 + p - 1), \qquad \varrho_2 = \varrho_0, \qquad \varrho_3 = 0, \cdots, \varrho_k = 0,$$

e sarebbe 0 anche ϱ_2, se la sezione superficiale della V_k fosse una sviluppabile.

diverso) applicando una delle formole di coincidenza date dal prof. Pieri nella Nota citata (al n° 2). Accoppiando ad ogni punto P di V ogni altro punto P' della V stessa, otteniamo ∞^r coppie PP'. Gl'indici della corrispondenza son tutti nulli, tranne quello che denota quante coppie hanno il punto P in uno S_k dato, e il punto P' in un altro S_k dato, e questo indice uguaglia ϱ_0^2. Lo i-esimo rango della varietà di coincidenza, ossia il numero dei punti di uno S_{r-i} dato in ciascuno dei quali coincidono due punti PP' in guisa che la loro congiungente si appoggi a un dato S_i $(i = 1, \cdots, k-1)$, uguaglia il ceto ω_{k-i} di V, come subito si riconosce assumendo il dato S_i entro al dato S_{k-i}. Il k-esimo rango uguaglia $2d + \omega_k$, e lo 0-esimo rango della varietà di coincidenze uguaglia ϱ_0; onde

$$\varrho_2^0 = 2d[r, k] + \sum_1^k \omega_i + \varrho_0 ,$$

dalla quale segue subito la formola del testo.

(14) Si stabilisce facilmente che: data una V_k luogo di $\infty^l S_{k-1}$, se sono ∞^1 gli S_k tangenti a V nei punti di uno spazio generatore Π, questi formano un sistema lineare entro un determinato S_{k+l}. In tali condizioni ogni S_r tangente a V in un punto di Π, la tocca negli ∞^{k-l-1} punti di un certo S_{k-l-1}, e tutti gli S_{k-l-1} di contatto passano per un certo S_{k-l-2}, che è l'intersezione di Π con lo spazio generatore infinitamente vicino.

Calcoliamo ora i ceti della V_k. Ci fermeremo al caso in cui la dimensione r dello spazio ambiente è il doppio di k, perché o per proiezione o per sezione ci riduciamo sempre a questo caso.

Sia dunque ω_i lo i–esimo ceto della V_k [15], ossia l'ultimo ceto della varietà ad i dimensioni (luogo di $\infty^1 S_{i-1}$) sezione di V con uno S_{k+i}. Proiettiamo questa sezione sopra uno S_{2i-1} del suo spazio da uno O_{k-i} generico. Nello S_{2i-1} avremo una Φ_i, luogo di $\infty^1 S_{i-1}$, ed essa possiederà una linea doppia, che sarà incontrata in $\varrho_0 - i$ punti da ogni S_{i-1} generatore [16]. E sulla linea doppia ci saranno ω_i punti da ognuno dei quali usciranno due S_{i-1} generatori coincidenti (per analogia colle rigate sghembe si potrebbero chiamare *punti cuspidali*).

Se diciamo che due spazî generatori Σ e Σ' sono corrispondenti quando s'incontrano (in un punto della linea doppia) avremo fra gli S_{i-1} generatori di Φ una corrispondenza involutoria le cui coincidenze, in numero di ω_i, si presentano negli S_{i-1} generatori che escono dai punti cuspidali, e il suo indice sarà $\varrho_0 - i$. Qual'è la valenza di questa corrispondenza?

Rappresentiamo gli S_{i-1} dello S_{2i-1} coi punti di una varietà F ad i^2 dimensioni immersa in uno $S_{\binom{2i}{i}-1}$, prendendo le $\binom{2i}{i}$ coordinate omogenee di S_{i-1} nello S_{2i-1}, come coordinate omogenee di punto in uno $S_{\binom{2i}{i}-1}$. Si vede subito [17] che gli S_{i-1} appoggiati ad un dato S_{i-1} verificano colle loro coordinate un'equazione lineare, e quindi formano un sistema rappresentato da una sezione iperpiana di F. La varietà Φ sarà rappresentata da una curva φ, di genere p, tracciata sopra F; e siccome vi sono ϱ_0 spazî generatori di Φ appoggiati a un dato S_{i-1}, per quanto precede le sezioni iperpiane di F incontreranno φ in ϱ_0 punti, ossia φ sarà di ordine ϱ_0. Un sistema che abbia per spazio direttore uno S_{i-1} della Φ, contiene all'infuori dello spazio direttore $\varrho_0 - i$ spazî generatori di Φ e dunque lo S_{i-1} direttore assorbe $i S_{i-1}$ generatori comuni a Φ e al sistema suddetto. Ne viene che l'iperpiano corrispondente avrà in uno dei punti comuni ad esso e a φ (precisamente in quello che rappresenta lo S_{i-1} direttore), moltiplicità d'intersezione i con la φ stessa, e quindi la nostra corrispondenza Σ, Σ', che si rispecchia in una corrispondenza fra i punti di φ, sarà dotata di valenza uguale ad i.

(15) In quel che segue si considera il caso generale, che cioè due spazî generatori infinitamente vicini della V non s'incontrino.

(16) Cfr. A. TANTURRI, *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di* ∞^1 *spazi*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 35 (1900), pp. 427–442, ved. al n. 9.

(17) Cfr. E. D'OVIDIO, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante*, Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie, (3) I (1877), pp. 929–986. Vedi al § VII.

Pel principio di corrispondenza di Cayley e Brill, avremo:

$$\omega_i = (\varrho_0 - i) + (\varrho_0 - i) + 2\,ip = 2\,(\varrho_0 + ip - i) \quad (18).$$

Ora che conosciamo le espressioni dei ceti di V_k, sostituendo nella formola del n° 3, avremo, dopo facili trasformazioni, il numero:

$$\binom{\varrho_0 - k}{2} - \binom{k+1}{2} p,$$

che dice quanti punti doppi improprî possiede una V_k dello S_{2k}, luogo di ∞^1 S_{k-i} (19).

§ 3. – Dei punti doppi che s'impongono ad una varietà convenientemente estesa, sopra un'altra varietà per cui la prima debba passare.

5. Quando una varietà Φ_h dello S_r si obbliga a passare per una varietà V_k generale ($k < h$), se $2k \geq r$, la Φ viene ad avere una varietà di punti doppi nella M_{2k-r} dei punti doppi improprî di V, e ciò segue subito dal fatto che *ogni* retta per un punto doppio improprio contiene due punti infinitamente vicini di V. Ma c'è di più: la Φ è obbligata ad avere una varietà di punti doppi, M_{2k-h-1}, in *punti semplici* di V. Indipendentemente dalla ipotesi $2k \geq r$, ossia indipendentemente dall'ipotesi che V possegga una varietà di punti doppi improprî, si può dire che se $2k \geq h+1$ la Φ è obbligata, passando per V, ad avere una M_{2k-h-1} doppia in punti semplici di V.

Cominciamo a considerare il caso di $h = r - 1$ (nel qual caso la condizione $2k \geq r$, coincide con la $2k \geq h + 1$), cioè il caso di una forma F, di ordine l, passante per una varietà V_k, e supponiamo, dapprima, che V sia completa intersezione di $r - k$ forme $H_1, \cdots, H_{r-k}$ di ordini $m_1, \cdots, m_{r-k}$ situate genericamente in modo che V non abbia punti multipli. Si potranno determinare certe forme $A_1, \cdots, A_{r-k}$ tali che

$$F \equiv A_1 H_1 + \cdots + A_{r-k} H_{r-k} \quad (20).$$

Cerchiamo se esistono dei punti che soddisfacciano alle equazioni:

$$(1) \qquad H_1 = 0, \cdots, H_{r-k} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, r+1).$$

Abbiamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv \sum_j A_i \frac{\partial H_j}{\partial x_i} + \sum_j H_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

(18) Quando $i = 2$ si ha un nuovo procedimento per calcolare il numero delle generatrici cuspidali di una rigata gobba. Ved. le citazioni al n° 2 della mia Nota citata.

(19) Questa formola è stata pure trovata dal Tanturri mediante spezzamenti. Cfr. la Nota citata (16).

(20) Questo risulta come caso particolare della proposizione da me dimostrata nella Nota IX.

e quindi le (1) possono scriversi:

$$(2) \qquad H_1 = 0\,, \cdots, H_{r-k} = 0 \quad , \quad \sum_j A_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} = 0.$$

Se $r \geq 2(r-k)$, ossia se $2k \geq r$, esisteranno ∞^{2k-r} soluzioni delle equazioni:

$$(3) \qquad H_1 = 0\,, \cdots, H_{r-k} = 0 \quad , \quad A_1 = 0\,, \cdots, A_{r-k} = 0$$

e formeranno una M_{2k-r}, di ordine $m_1 m_2 \cdots m_{r-k}(l-m_1)\cdots(l-m_{r-k})$, giacente su V, costituita da punti doppi di F. Ma, nelle nostre ipotesi, si può riscontrare di più che i soli punti doppi di F su V sono quelli dati dalle (3); perché se un qualche punto esistesse pel quale fosser soddisfatte le (1), ossia le (2), e non le (3), in quel punto la matrice $\left\| \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \right\| \begin{pmatrix} j = 1\,, \cdots, r-k \\ i = 1\,, \cdots, r+1 \end{pmatrix}$ dovrebbe avere il rango minore di $r-k$, il che porterebbe ad una dipendenza lineare fra gli iperpiani tangenti alle H in quel punto, il quale dunque risulterebbe multiplo per V.

Se $2k < r$ lo stesso procedimento prova che in generale F non avrà punti doppi sopra V.

6. Or suppongasi h qualunque e la varietà Φ, costretta a passare per V, si definisca come completa intersezione di $r-h$ forme $F_1, F_2, \cdots, F_{r-h}$, di ordini $n_1, \cdots, n_{r-h}$, condotte genericamente per V, che ancora supponiamo intersezione delle forme $H_1, \cdots, H_{r-k}$ di cui al n° precedente.

Avremo certamente:

$$F_i \equiv A_{i1} H_1 + \cdots + A_{i,r-k} H_{r-k} \qquad (i = 1\,, \cdots, r-h);$$

per modo che l'equazione dell'iperpiano tangente alla F_i nel punto x sarà:

$$\sum_j y_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \equiv A_{i1} \sum_j y_j \frac{\partial H_1}{\partial x_j} + \cdots + H_1 \sum_j y_j \frac{\partial A_{i1}}{\partial x_j} + \cdots = 0,$$

e quindi in un punto di V diverrà semplicemente:

$$(1) \qquad A_{i1} I_1 + \cdots + A_{i,r-k} I_{r-k} = 0,$$

ove $I_1, \cdots, I_{r-k}$ sono gli iperpiani rispettivamente tangenti alle forme $H_1, \cdots, H_{r-k}$ nel punto x.

La varietà Ψ dei punti x che rendono la matrice

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} A_{11} A_{12} \cdots A_{1,r-k} \\ A_{21} A_{22} \cdots A_{2,r-k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{r-h,1} \cdots A_{r-h,r-k} \end{matrix} \right\|$$

di caratteristica minore di $r-k$, è di dimensione $r-h+k-1$. Se $r > 2k \geq h+1$ la varietà Ψ taglierà dunque V in una M_{2k-h-1} nei cui punti gli iperpiani (1) saranno dipendenti linearmente, e quindi la M_{2k-h-1}

sarà doppia per Φ. Ma se $2k \geq r$ (e quindi, *a fortiori*, $2k \geq h+1$) per quanto le forme che definiscono Φ siano condotte genericamente per V, esse potranno avere, e li avranno in generale, dei punti doppi su V i quali risulteranno doppi per Φ. Per esempio la forma F_1 avrà su V una M_{2k-r} doppia di equazioni:

$$H_1 = 0, \cdots, H_{r-k} = 0 \quad , \quad A_{11} = 0, \cdots, A_{1,r-k} = 0,$$

la quale, evidentemente, apparterrà alla varietà Ψ. Questa dunque taglierà V in una M_{2k-h-1} di cui ogni punto sarà doppio per Φ e semplice per V, e tale M_{2k-h-1} conterrà una M_{2k-r} (spezzata in $r-h$ parti di ugual dimensione) di punti, che son doppi per Φ pel fatto che lo sono per qualcuna delle F_i.

Non potrà darsi che Φ abbia sopra V, che ricordiamo è definita come intersezione di $r-k$ forme *generiche*, altri punti doppi all'infuori di quelli appartenenti a Ψ. Difatti i punti doppi di Φ su V o provengono da punti che son doppi per qualcuna delle F, e allora, nelle nostre ipotesi, giacciono su Ψ, oppure provengono da punti in cui gli iperpiani (1) sono linearmente dipendenti. In quest'ultimo caso dovranno esistere certi numeri finiti e non tutti nulli $\lambda_1 ; \lambda_2, \cdots, \lambda_{r-k}$ tali che

$$\lambda_1 (A_{11} I_1 + \cdots) + \cdots + \lambda_{r-k} (A_{r-k,1} I_1 + \cdots) \equiv 0$$

identicamente rispetto alle coordinate variabili y. Ossia dovrà essere:

$$I_1 (\lambda_1 A_{11} + \cdots + \lambda_{r-k} A_{r-k,1}) + \cdots + I_{r-k} (\lambda_1 A_{1,r-k} + \cdots + \lambda_{r-k} A_{r-k,r-k}) \equiv 0.$$

Se questa identità ha luogo per valori tutti nulli dei coefficienti di $I_1, \cdots, I_{r-k}$ la matrice (2) avrà la caratteristica $r-h-1$ (al più), e quindi il punto in questione apparterrà a Ψ. Se la identità precedente potesse aver luogo senza che la (2) avesse la caratteristica $r-h-1$, i coefficienti di $I_1, \cdots, I_{r-k}$ avrebbero valori non tutti nulli e quindi nel punto x gli iperpiani tangenti alle H sarebbero linearmente dipendenti: dal che segue che si tratterebbe di un punto multiplo di V, mentre per ipotesi V non ha punti multipli.

L'ordine della varietà Ψ si può calcolare applicando una formola dovuta a S. Roberts (21); essa fornisce per quest'ordine l'espressione:

$$\sum_0^{h-k+1} {}_i (-1)^i s_i \sigma_{h-k+1-i},$$

ove s_i denota la somma dei prodotti di $m_1 - 1, \cdots, m_{r-k} - 1$ combinate ad i ad i senza ripetizione, σ_i la somma dei prodotti di $n_1 - 1, \cdots, n_{r-h} - 1$ combinate ad i ad i con ripetizione; e $s_0 = \sigma_0 = 1$.

(21) *Sur l'ordre des conditions de coexistence des équations algébriques à plusieurs variables* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 67 (1867), pp. 266–278. La formola che si usa nel testo non è la formola genuina di Roberts, ma una che le è *algebricamente* equivalente. Il problema di Roberts risulterà indirettamente risoluto anche da considerazioni che svolgeremo più tardi.

Se dunque $2k \geq h+1$, l'ordine della M_{2k-h-1} dei punti doppi che s'impongono a Φ sopra la varietà V per cui Φ passa, è espresso dalla formola:

$$m_1 m_2 \cdots m_{r-k} \sum_{0}^{h-k+1} (-1)^i s_i \sigma_{h-k+1-i}.$$

Al § 6 impareremo che i ceti successivi ω_i della varietà V sono espressi, mediante gli ordini delle H, così:

$$\omega_0 = m_1 m_2 \cdots m_{r-k}, \qquad \omega_1 = m_1 \cdots m_{r-k} s_1, \cdots, \omega_i = m_1 m_2 \cdots m_{r-k} s_i, \cdots.$$

E quindi l'ordine della M_{2k-h-1} doppia per Φ potrà scriversi:

$$\omega_0 \sigma_{h-k+1} - \omega_1 \sigma_{h-k} + \omega_2 \sigma_{h-k+1} - \cdots + (-1)^{h-k+1} \omega_{h-k+1}.$$

In questo modo si è condotti a pensare che la formola ora scritta valga anche quando V è una varietà algebrica definita nel modo più generale: nel n° successivo dimostreremo che effettivamente è così.

7. Sia dunque V una varietà generale a k dimensioni dello S_r, e siano $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots$ i suoi ceti. Supponiamo prima $2k < r$ (e quindi V priva di punti doppi) e, posto $h = 2k - 1$, consideriamo una varietà Φ_h, passante per V, la quale sia completa intersezione delle $r - h$ forme $F_1, F_2, \cdots$ di ordini rispettivi $n_1, n_2, \cdots$, condotte genericamente per V.

La varietà Ψ_{r-k} luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto alle F contengono uno stesso S_{k-1} di un dato S_{r-k-1}, $\Omega^{(1)}$, è, come vedremo al n° 15, di ordine σ_k (22). Essa incontra V in un numero finito di punti, uguale a $\omega_0 \sigma_k$, e le intersezioni sono così distribuite:

1° N_1 ne cadono nei punti di contatto degli S_k tangenti a Φ in punti di V, appoggiati al dato spazio $\Omega^{(1)}_{r-k-1}$ secondo uno S_{k-1}. Quanti sono questi S_k? Gli S_k tangenti a V appoggiati a $\Omega^{(1)}$ in un punto segnano su V, coi loro punti di contatto, una varietà $V^{(1)}_{k-1}$, di ordine ω_1, che è secata dalla varietà $\Psi^{(1)}_{r-k+1}$ luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto alle F contengono uno stesso S_{k-2} di un dato $\Omega^{(2)}_{r-k-2}$, assunto entro $\Omega^{(1)}$, in $\omega_1 \sigma_{k-1}$ punti; dei quali alcuni provengono dagli N_1 punti di contatto cercati, e gli altri dagli N_2 punti di contatto di S_k tangenti a V e appoggiati a $\Omega^{(2)}$ in un punto, per modo che lo S_k tangente a Φ in essi incontri $\Omega^{(2)}$ secondo uno S_{k-2}. Sicché

$$N_1 = \omega_1 \sigma_{k-1} - N_2.$$

Calcoliamo N_2. La varietà $V^{(2)}_{k-2}$, d'ordine ω_2, luogo dei punti di contatto degli S_k tangenti a V appoggiati a $\Omega^{(2)}$ in un punto, taglia la varietà $\Psi^{(2)}_{r-k-2}$, di ordine σ_{k-2}, luogo dei punti i cui iperpiani polari, rispetto alle F, si tagliano in uno S_{k-3} di un dato $\Omega^{(3)}_{r-k-3}$, scelto genericamente entro $\Omega^{(2)}$, in $\omega_2 \sigma_{k-2}$ punti, dei quali alcuni cadono negli N_2 punti cercati e gli altri negli N_3 punti di contatto degli S_k tangenti a V i quali si appoggiano a $\Omega^{(3)}$ in guisa tale

(22) Si attribuisca a σ_i il significato datogli al n° precedente.

che lo S_h tangente a Φ in essi incontri $\Omega^{(3)}$ secondo uno S_{h-3}. Dunque:

$$N_2 = \omega_2 \sigma_{k-2} - N_3 .$$

Così proseguendo si arriverà a considerare il numero N_k dei punti di V tali che gli S_k tangenti in essi incontrino un dato $\Omega^{(k)}_{r-2k}$, assunto entro $\Omega^{(k-1)}$, per modo che gli S_h tangenti a Φ in quei punti si appoggino a $\Phi^{(k)}$. Quest'ultima condizione essendo soddisfatta ogni volta che è soddisfatta la prima, sarà:

$$N_k = \omega_k .$$

Ed allora eliminando fra le $k-1$ relazioni ottenute $N_2 , N_3 , \cdots , N_k$, che compaiono in esse linearmente, avremo:

$$N_1 = \omega_1 \sigma_{k-1} - \omega_2 \sigma_{k-2} + \omega_3 \sigma_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1} \omega_k .$$

2° Le rimanenti δ intersezioni non posson provenire da punti semplici di Φ, chè questi contribuiscono alle intersezioni precedentemente contate, né punti doppi di Φ che lo siano per V, perché V non ha punti multipli, e dunque proverranno da δ punti doppi di Φ, semplici per V. E si noti che in generale non è $\delta = 0$, perché se sempre fosse $\delta = 0$ si avrebbe fra $\omega_0 , \omega_1 , \cdots , \omega_k$ la relazione:

$$\omega_0 \sigma_k - \omega_1 \sigma_{k-1} + \cdots + (-1)^k \omega_k = 0 ,$$

valida per valori arbitrarî (almeno al di sopra di certi limiti) di $n_1 , n_2 , \cdots , n_{r-k}$, il che è assurdo. Abbiamo dunque:

$$\omega_0 \sigma_k = N_1 + \delta ,$$

donde rilevasi l'espressione di δ.

Se sempre essendo $h = 2k - 1$ è $2k = r$, allora Φ è una certa forma di ordine m e alle intersezioni di Ψ con V contate nel caso $2k < r$, si aggiungono quelle che cadono nei d punti doppi improprî di V giacché questi, essendo doppi anche per Φ, giacciono nella varietà Ψ_{r-k} luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto a Φ passano per un dato $\Omega^{(1)}_{r-k-1}$, la qual varietà, in tal caso, è l'intersezione delle prime polari di k punti generici di $\Omega^{(1)}$ rispetto a Φ. Anzi in ciascuno dei d punti doppi improprî cadono $2d$ intersezioni di Ψ con V, appunto perché essi son doppi per V. Il resto del ragionamento non subisce modificazioni sostanziali, perché le varietà $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \cdots$ che si costruiranno successivamente seguendo il concetto che ci ha guidato nel caso $2k < r$, non passano pei punti doppi di V, come si è già notato.

Siamo ora in grado di enunciare:

Una varietà Φ_h dello S_r, completa intersezione di $r-h$ forme di ordini $n_1 , n_2 , \cdots , n_{r-h}$, la quale sia obbligata al passaggio per una V_k generale $(k < h , 2k < r)$ di ceti $\omega_0 , \omega_1 , \omega_2 , \cdots$, se è $2k \geq h + 1$, viene in conseguenza ad avere sopra V una M_{2k-h-1} doppia di ordine:

$$\omega_0 \sigma_{h-k+1} - \omega_1 \sigma_{h-k} + \omega_2 \sigma_{h-k-1} - \cdots + (-1)^{h-k+1} \omega_{h-k+1} ,$$

ove σ_i denota la somma dei prodotti di $n_1 - 1 , \cdots , n_{r-k} - 1$, combinati ad i ad i con ripetizione.

E inoltre:

Una forma d'ordine m, dello S_r, la quale sia obbligata al passaggio per una varietà V_k generale di ceti $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r-k}$, se $2k \geq r$, viene in conseguenza ad avere una M_{2k-r} doppia di ordine:

$$\frac{1}{2}\omega_0(\omega_0 - 1) - \frac{1}{2}\sum_1^{r-k} {}_i\,\omega_i$$

nella varietà dei punti doppi improprî di V e una M_{2k-r} doppia di ordine:

$$\sum_0^{r-k}(-1)^i (m-1)^{r-k-i}\,\omega_i + \sum_1^{r-k}\omega_i - \omega_0(\omega_0 - 1)$$

in punti semplici di V.

I casi più generali considerati in questi enunciati si riducono subito a quelli considerati nel ragionamento, mediante sezioni.

§ 4. – Caratteri d'immersione di una varietà in un'altra.

8. Quando una varietà è contenuta in un'altra, ci sono dei numeri i quali *caratterizzano* il modo con cui quella varietà è contenuta nell'altra, come già osservava il Caporali nella lettera citata. Questi numeri noi li chiameremo *caratteri d'immersione*: essi, pur rimanendo fissi i caratteri già definiti della varietà considerata in relazione con l'ambiente lineare che la contiene, sono arbitrarî, almeno entro certi limiti.

Così è ben noto che una retta può esser contenuta in due modi diversi sopra una rigata cubica F^3 dello S^4: o è generatrice o è la direttrice minima di F. Nel 1° caso i piani tangenti a F nei punti di essa riempiono una M_3 del 1° ordine (uno S_3); nel 2° caso i piani tangenti a F nei suoi punti riempiono un cono quadrico a 3 dimensioni (di 2ª specie). Similmente su F^3 una quartica (razionale, normale) può esser contenuta in due modi e corrispondentemente all'uno o all'altro modo si ha che la M^3 dei piani tangenti a F nei punti di essa è del 5° o del 7° ordine. Gli esempi si potrebbero moltiplicare.

Abbiasi una Φ_h la quale sia contenuta con una certa moltiplicità in una V_k, d'ordine ϱ_0, ed entrambe siano immerse nello S_r. Si chiamerà *carattere d'immersione* $(a_0, a_1, \cdots, a_k)$ di Φ in V, l'ordine della M_{d+h-k} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V in punti di Φ e appartenenti alla figura $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$; ove

$$d = \sum_0^k a_i + \frac{1}{2}k(k+3) - (k+1)r\,.$$

In particolare chiameremo *classe d'immersione* $z_i\ (i = 1, 2, \cdots, h)$ di Φ in V, l'ordine della M_{h-i} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V in punti di Φ, appoggiati ad un dato $S_{r-k+i-2}$ secondo uno S_{i-1}; e *ceto d'immersione*

y_i di Φ in V l'ordine della M_{h-i} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V in punti di Φ, appoggiati in un punto ad un dato S_{r-k-i}.

Se $r \geq h + k$ la considerazione dei ceti d'immersione ha senso da $i = 1$ fino ad $i = h$; se $r \leq h + k$ la considerazione dei ceti d'immersione ha senso da $i = 1$ fino ad $i = r - k$.

9. Se, essendo $r \leq h + k$, la V_k, di cui al n° precedente, è generale, e la varietà Φ_h è genericamente contenuta in essa, allora la M_{2k-r} dei punti doppi improprî di V incontra la Φ in una varietà ad $h + k - r$ dimensioni, della quale vogliamo trovare l'ordine.

Basterà limitarsi al caso $r = h + k$, perché secando con un conveniente spazio, nel cercare l'ordine incognito, a questo caso ci riduciamo. Nel caso in cui $r = h + k$ la Φ, di cui diciamo μ_0 l'ordine e $y_1, y_2, \cdots, y_{r-k}$ i ceti d'immersione, seca la varietà doppia di V, in un numero finito $d[h, k]$ di punti.

Per un punto O dello S_r escono ∞^1 rette appoggiate a Φ e ulteriormente a V, e costituiscono un cono Γ, il cui ordine si ottiene facilmente secando con un iperpiano per O. In questo iperpiano otteniamo una varietà a $k - 1$ dimensioni sezione di V, e una varietà a $h - 1$ dimensioni sezione di Φ; l'ordine di Γ è il numero delle rette uscenti da O, appoggiate alla sezione di Φ e, altrove, alla sezione di V. Proiettando da O su uno S_{r-2} si trova che il numero di queste rette uguaglia $d[h - 1, k - 1]$.

Diciamo P un punto d'appoggio su Φ di una generatrice di Γ, e P' il punto d'appoggio della stessa generatrice su V; si vuol sapere quante volte un P viene a coincidere con un P'.

Il numero delle coppie PP' il cui P giace in un dato iperpiano, si ottiene subito conducendo il dato iperpiano per O: uguaglia l'ordine di Γ; e così pel numero delle coppie di cui P' giace in un dato iperpiano.

Quanto poi al numero delle coppie la cui retta PP' appoggiasi a un dato S_{r-2}, non è altro che l'ordine medesimo di Γ; onde sono $d[h - 1, k - 1]$ le coincidenze PP'. In due modi può avvenire che P e P' coincidano: o pel fatto di rette uscenti da O e passanti per un punto di Φ, doppio improprio per V, o pel fatto di rette uscenti da O e tangenti a V in punti di Φ. Si avrà dunque:

$$d[h, k] + y_{r-k} = d[h - 1, k - 1].$$

Applicando questa formola ricorrente per valori decrescenti di h e k, avremo:

$$d[h - 1, k - 1] + y_{r-k-1} = d[h - 2, k - 2],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d[2, k - h + 2] + y_2 = d[1, k - h + 1].$$

E quindi sommando a membro a membro e riducendo:

$$d[h, k] = d[1, k - h + 1] - \sum_0^{r-k} i\, y_i.$$

Il numero $d\,[1\,,\,k-h+1]$ si calcola allo stesso modo col principio di corrispondenza, oppure con la considerazione della prima polare di un punto dello S_{k-h+2} in cui è immersa la V_{k-h+1}, di cui in questo caso trattasi, rispetto a questa forma. Così trovasi che:

$$d\,[1\,,\,k-h+1] = \mu_0\,(\varrho_0 - 1) - y_1\,,$$

onde:

$$d\,[h\,,\,k] = \mu_0\,(\varrho_0 - 1) - \sum_1^{r-k} y_i\,.$$

Se in una varietà V_k generale, d'ordine ϱ_0, immersa in uno S_r $(r = k + h - l\,,\ l \geq 0)$ è contenuta genericamente una Φ_h, di ordine μ_0 e ceti d'immersione $y_1\,,\cdots,y_{r-k}$, la Φ taglia la M_{2k-r} dei punti doppi improprî di V in una M_l di ordine:

$$\mu_0\,(\varrho_0 - 1) - \sum_1^{r-k} y_i \text{ (23)}.$$

CAPITOLO SECONDO

§ 5. – Caratteri della varietà completa intersezione di due o più altre.

10. Nello S_r si abbiano due varietà: l'una V a k dimensioni, e l'altra V' a k' dimensioni $(k + k' \geq r)$. I caratteri della prima siano $\varphi\,(a_0 + k - r\,,\cdots\cdots,a_s + k - r)$, e $\varphi'\,(a'_0 + k' - r\,,\cdots,a'_s + k' - r)$ siano quelli della seconda. Le due varietà abbiano singolarità qualunque, ma siano situate genericamente nel senso che in ogni punto della varietà F, ad h dimensioni $(h = k + k' - r)$, ch'esse hanno comune, uno spazio tangente a V non giaccia in un medesimo iperpiano con uno spazio tangente a V'. La legittimità di questa ipotesi può verificarsi, per esempio, pensando a due varietà ognuna delle quali sia completa intersezione di forme. Inoltre in un punto qualunque di F che sia multiplo per V (o per V') il cono tangente a V (o V') si spezzi in tanti S_k (o $S_{k'}$) distinti, quant'è l'ordine del cono stesso.

11. La prima questione fondamentale che si affaccia, è di determinare i caratteri $\psi\,(b_0 + h - r\,,\,b_1 + h - r\,,\cdots,b_s + h - r)$ della varietà F, in funzione dei caratteri φ e φ' di V e V'.

(23) Nei frammenti del Caporali, quando si tratta di trovare i caratteri della ulteriore intersezione di una superficie e di una forma dello S_4, che già abbiano comune una curva semplice, s'introduce un carattere d'immersione denotato con λ, che indica quante rette escono da un punto dello S_4, si appoggiano alla curva e ulteriormente alla superficie su cui la curva è tracciata. L'analogo carattere λ, nel caso $h = 1$, se la curva Φ fosse semplice per V_k, sarebbe il numero degli S_{r-k-1} per un dato S_{r-k-2} appoggiati a Φ e altrove ancora a V. Se Φ ha in V posizione generica, il carattere λ uguaglia $d\,[1,\,k-h+1]$. Vedremo poi come sia più conveniente considerare il carattere $y_1\,(=z_1)$ invece del carattere λ.

È chiaro che basterà limitarsi al calcolo degli ultimi caratteri di F, poiché per sezione con un conveniente spazio ci riduciamo ad un caso analogo anche nel calcolo degli altri caratteri.

Supponiamo dunque:

$$\sum_0^s b_i + h(s+2) = r(s+1) + \frac{1}{2}s(s+1),$$

e accoppiamo due spazî $[s]$ dell'ambiente quando l'uno, Π, giace in uno S_h tangente a V in un punto di F, e l'altro, Π', giace in uno $S_{h'}$ tangente a V' nello stesso punto. Così otteniamo $\infty^{h+(s+1)(k+k'-2s)}$ coppie $\Pi\Pi'$, il cui insieme denoteremo con A, e siccome per una di esse giacere nello spazio $[b_s]$ relativo alla condizione $(b_0, b_1, \cdots, b_s, r+s+1-h, r+s+2-h, \cdots, r-1, r)$ imposta agli S_h tangenti ad F, è condizione di specie $2(s+1)(r-b_s)$, nello spazio $[b_s]$ medesimo si troveranno

$$\infty^{h+2(s+1)(b_s-s)-(s+1)(r-h)}$$

coppie $\Pi\Pi'$ il cui insieme denoteremo con A_1. Inoltre, giacché per una di tali coppie l'avere lo spazio Π appartenente alla forma $[b_0, b_1, \cdots, b_s]$ è è condizione di specie

$$(s+1)b_s - \sum_0^s b_i - \frac{1}{2}s(s+1),$$

vi saranno $\infty^{(s+1)(b_s-s)}$ coppie $\Pi\Pi'$ giacenti in $[b_s]$ e aventi lo spazio Π nella forma $[b_0, \cdots, b_s]$, e la varietà di queste coppie s'indicherà con A_2.

Per ogni S_h tangente a F e soddisfacente alla condizione

$$(b_0, \cdots, b_s, r+s+1-h, \cdots, r),$$

ossia appoggiato alla figura $[b_0, \cdots, b_s]$ secondo uno spazio $[s]$, abbiamo una coppia $\Pi\Pi'$, appartenente alla varietà $\infty^{(s+1)(b_s-s)}$ ultimamente considerata e costituita da due spazî coincidenti. Viceversa ogni coincidenza $\Pi\Pi'$ proviene da uno S_h tangente ad F che soddisfa la suddetta condizione, a causa della genericità della posizione di V e V', in virtù della quale accade anzi che nella varietà $\infty^{(s+1)(b_s-s)}$ si presentano un numero finito di coincidenze. E questo numero sarà espresso da

$$(1) \qquad \psi(b_0+h-r, \cdots, b_s+h-r) =$$

$$= \sum (a_0, a_1, \cdots, a_s)(b_s-a_s, b_s-a_{s-1}, \cdots, b_s-a_0)', \ (24)$$

ove il prodotto simbolico soggetto al sommatorio, che si estende a tutti i prodotti analoghi denota, quante coppie $\Pi\Pi'$ della varietà A_2 hanno lo spazio Π nella forma $[a_0, \cdots, a_s]$ mentre Π' è nella forma $b_s-a_s, \cdots, b_s-a_0]$.

La condizione $(a_0, \cdots, a_s)(b_s-a_s, \cdots, b_s-a_0)'$, imposta agli elementi di A_2, corrisponde ad una condizione, imposta agli elementi della varietà

(24) Cfr. la mia Nota IV [del presente volume, N.d.R.].

iniziale A, uguale al prodotto p di due condizioni fondamentali imposte successivamente ai Π, pel prodotto p' di due condizioni fondamentali imposte successivamente ai Π'. Ora p si può sciogliere in una somma di condizioni fondamentali $(\alpha_0, \cdots, \alpha_s)$ imposte ai Π (di A) e analogamente p' si può sciogliere in una somma di $(\beta_0, \cdots, \beta_s)'$ [25]. La (1) darà perciò:

$$\psi = \sum (\alpha_0, \cdots, \alpha_s)(\beta_0, \cdots, \beta_s)',$$

ove il prodotto $(\alpha_0, \cdots, \alpha_s)(\beta_0, \cdots, \beta_s)'$ si può anche intendere rappresenti il numero (*finito*) delle coppie di S_k, $S_{k'}$ tangenti a V e V' rispettivamente in medesimi punti di F, il cui S_k passa per uno $[s]$ della figura $[\alpha_0, \cdots, \alpha_s]$, mentre lo $S_{k'}$ passa per uno $[s]$ della figura $[\beta_0, \cdots, \beta_s]$. Dicendo q la specie della condizione imposta a un $[k]$ volendo che un suo $[s]$ soddisfaccia alla condizione $(\alpha_0, \cdots, \alpha_s)$ [26], e q' la specie della condizione analoga relativa a un $[k']$ e alla condizione $(\beta_0, \cdots, \beta_s)$, se di coppie di spazî tangenti a V e V' in medesimi punti di F ce ne debbono essere un numero finito, i cui spazî soddisfanno rispettivamente alle due precedenti condizioni, sarà $q + q' = h$ [27]. Gli S_k tangenti a V e passanti per spazî della forma $[\alpha_0, \cdots, \alpha_s]$ segnano su V coi loro punti di contatto una M_{k-q}, il cui ordine è un certo carattere φ di V; e così gli $S_{k'}$ tangenti a V' e i cui $[s]$ soddisfanno alla condizione $(\beta_0, \cdots, \beta_s)$ segnano su V' una $M_{k'-q'}$, il cui ordine è un carattere φ' di V'. Queste due varietà M, M' si secano nelle nostre ipotesi, in un numero finito di punti e, giacché $(k - q) + (k' - q') = r$, il numero suddetto sarà espresso da $\varphi\varphi'$; donde segue che $(\alpha_0, \cdots, \alpha_s)(\beta_0, \cdots, \beta_s)' = \varphi\varphi'$, e quindi:

$$\psi(b_0 + h - r, b_1 + h - r, \cdots, b_s + h - r) = \sum \varphi\varphi'.$$

Ogni carattere di F si esprime con una somma di prodotti d'un certo carattere di V per un carattere conveniente di V' [28].

Nei casi particolari il metodo precedente farà conoscere quali sono i caratteri di V e V' che vanno accoppiati per formare il prodotto soggetto al sommatorio nell'ultima relazione ottenuta. La ricerca dell'espressione algebrica delle Ψ in generale, dipende dalla risoluzione del problema degli spazî secanti [29].

(25) Ciò risulta dalla soluzione del problema delle caratteristiche per gli spazî lineari data da Schubert, e che implicitamente si trova anche nella mia Nota dei Lincei, ultimamente citata [IV del presente volume, N.d.R.].

(26) Il numero q si calcola facilmente, ma a noi non occorre.

(27) Questo perché le condizioni di cui si parla nel testo sono fra loro indipendenti, e sono indipendenti dalla condizione imposta a una coppia $[k]$, $[k']$ volendo che sia costituita da due spazi tangenti a V e V' in un medesimo punto di F.

(28) Non è escluso che uno stesso prodotto $\varphi\varphi'$ possa comparire più volte.

(29) Cfr. ad esempio PIERI, *Sul problema degli spazî secanti*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *26* (1893), pp. 534–546; (2) *27* (1894), pp. 258–273; (2) *28* (1895), pp. 441–455.

UN ESEMPIO. – Non sarà male, per porre in miglior luce le cose precedenti, esaminare un caso particolare.

Nello S_6 una V_5 e una V'_4 si seghino secondo una F_3, nei punti della quale V e V' non si tocchino mai: del resto V e V' posseggano singolarità qualunque. Calcoliamo ad esempio il carattere (ultimo) di F al quale spetta il simbolo $\psi(-2, 0)$, ossia il numero degli S_3 tangenti ad F passanti per le rette di una data figura $[1, 3]$ (complesso lineare speciale di rette, in un S_3), di cui diciamo u la retta (direttrice) e Σ lo S_3. La varietà Λ_2 del caso generale è attualmente costituita dalle ∞^4 coppie $\Pi\Pi'$ che si ottengono accoppiando ad ogni retta Π' d'appoggio su Σ di uno S_4 tangente a V' in un punto di F, le rette Π giacenti nella traccia su Σ dello S_5 tangente a V nello stesso punto di F, e appoggiate alla retta u. Si ha:,

$$\psi(-2, 0) = \sum (a_0, a_1)(3 - a_1, 3 - a_0)',$$

ove la condizione $(a_0, a_1)(3 - a_1, 3 - a_0)'$ si riferisce agli elementi di Λ_2. Giacché le rette Π' sono ∞^3, dovrà essere $1 \leq a_0 + a_1 \leq 4$, dimodoché s'avrà:

$$\psi(-2, 0) = (0, 1)(2, 3)' + (0, 2)(1, 3)' + (0, 3)(0, 3) + (1, 2)(1, 2)' + (1, 3)(0, 2)'.$$

Ora è:

$(0, 1)(2, 3)' = 0$ perché, le rette Π essendo tutte appoggiate ad u, non se ne può trovare nessuna soddisfacente alla condizione $(0, 1)$;

$(0, 2)(1, 3)' =$ ordine della M_3 dei punti di contatto degli S_5 tangenti a V passanti per una data retta (quella del fascio $[0, 2]$, che incontra u) $\times$ ordine della M_3 dei punti di contatto degli S_4 tangenti a V' appoggiati a una data retta $= \varphi(-1, 0)\varphi'(-1)$;

$(0, 3)(0, 3)' =$ ordine della M_4 dei punti di contatto di S_4 tangenti a V, passanti per un dato punto $\times$ ordine della M_2 dei punti di contatto di S_4 tangenti a V' passanti per un dato punto $= \varphi(-1)\varphi'(-2)$;

$(1, 2)(1, 2)' =$ ordine della M_4 dei punti di contatto degli S_5 tangenti a V, passanti per un dato punto $\times$ ordine della M_2 dei punti di contatto di S_4 tangenti a V' incontranti un piano dato secondo una retta $= \varphi(-1)\varphi'(-1, 0)$;

$(1, 3)(0, 2)' =$ ordine di $V \times$ ordine della curva dei punti di contatto di S_4 tangenti a V' e passanti per rette di un dato fascio $= \varphi(0)\varphi'(-2, 0)$.

Dunque:

$$\psi(-2, 0) = \varphi(-1, 0)\varphi'(-1) + \varphi(-1)\varphi'(-2) + \varphi(-1)\varphi'(-1, 0) + \varphi(0)\varphi'(-2, 0).$$

In particolare, se V fosse una forma d'ordine n_1 priva di punti multipli, risulterebbe:

$$\varphi(0) = n_1, \varphi(-1) = n_1(n_1 - 1), \varphi(-1, 0) = n_1(n_1 - 1)^2$$

onde:

$$\psi(-2,0) = n_1(n_1-1)^2\varphi'(-1) + n_1(n_1-1)[\varphi'(-2)+\varphi'(-1,0)] + n_1\varphi'(-2,0).$$

E se inoltre V' fosse intersezione di due forme generiche, di ordini n_2, n_3, avremmo (come si vedrà in seguito):

$$\varphi'(-1) = n_2 n_3 (n_2 + n_3 - 2),\ \varphi'(-2) = n_2 n_3 (n_2-1)(n_3-1),$$

$$\varphi'(-1,0) = n_2 n_3 [(n_2-1)^2 + (n_2-1) + (n_3-1) + (n_3-1)^2],$$

$$\varphi'(-2,0) = n_2 n_3 (n_2-1)(n_3-1)(n_2+n_3-2).$$

Dimodoché in tal caso verrebbe:

$$\psi(-2,0) = n_1 n_2 n_3 [(n_1-1)^2(n_2-1) + (n_1-1)^2(n_3-1) + (n_2-1)^2(n_1-1) + (n_2-1)^2(n_3-1) + (n_3-1)^2(n_1-1) + (n_3-1)^2(n_2-1) + 2(n_1-1)(n_2-1)(n_3-1)].$$

12. Possiamo andare a fondo nella ricerca delle espressioni delle classi $\mu_0, \cdots, \mu_h$, e dei ceti $\nu_1, \nu_2, \cdots$ della F comune alle due varietà V_k, di classi $\varrho_0, \varrho_1, \cdots, \varrho_k$, ceti $\omega_0, \omega_1, \cdots$, e $V'_{k'}$, di classi $\varrho'_0, \varrho'_1, \cdots, \varrho'_{k'}$, ceti $\omega'_0, \omega'_1, \cdots$, nel modo che esponiamo in questo n° e nel successivo.

Calcoliamo anzitutto μ_h, ossia il numero degli S_h tangenti alla F, i quali incontrano un dato S_{r-2} secondo uno S_{h-1}. Lo spazio dato ad $r-2$ dimensioni, Π, vien secato dagli S_k tangenti a V e dagli $S_{k'}$ tangenti a V' nei punti di F, in due sistemi ∞^h, l'uno Σ di S_{k-2}, l'altro Σ' di $S_{k'-2}$; e dicendo che due spazî di Σ e Σ' sono *associati*, intendiamo dire che provengono da uno S_k e da uno $S_{k'}$ tangenti rispettivamente a V e V' in un medesimo punto di F. Due spazî associati di Σ e Σ' hanno generalmente a comune lo S_{h-2} che si ottiene su Π come traccia dello S_h tangente ad F nel punto ad essi relativo. Il numero μ_h si otterrà cercando quante volte accade che due spazî associati s'intersechino secondo uno S_{h-1}, o, in altri termini, sieno contenuti in un medesimo S_{r-3} di Π, appunto per l'ipotesi fatta che non avvenga mai che due spazî tangenti a V e V' in un punto di F, giacciono in uno stesso iperpiano.

Accoppiamo gli S_{r-3} di Π in guisa che una coppia sia costituita da uno S_{r-3}, α, passante per uno spazio di Σ, e da uno S_{r-3}, α', passante per uno spazio associato di Σ'. Otteniamo in Π una ∞^{r-2} algebrica di coppie $\alpha\alpha'$: le coincidenze che in essa si presentano (sono in numero finito, sempre per l'ipotesi che V e V' siano situate genericamente), si hanno precisamente negli S_{r-3} che contengono una coppia di spazî associati. Il numero di tali coincidenze si ottiene sommando gli indici della corrispondenza, dove, per i–esimo indice della corrispondenza ($i = 1, 2, \cdots, r-1$), s'intenda il numero delle

coppie il cui spazio α passa per un dato S_{r-2-i}, mentre α' passa per un dato S_{i-2} (30).

Siccome imporre ad uno S_{r-3} di Π il passaggio per uno S_{r-2-i} equivale ad $r - i - 1$ condizioni semplici, e siccome gli spazî α sono $\infty^{h+r-k-1}$, dovrà essere

$$r - i - 1 \leq h + r - k - 1, \qquad \text{ossia} \quad i \geq k - h ;$$

e similmente, siccome gli spazî α' sono $\infty^{h+r-k'-1}$, e imponendo ad uno S_{r-3} di Π il passaggio per un dato S_{i-2} gli imponiamo $i - 1$ condizioni semplici, dovrà essere

$$i - 1 \leq h + r - k' - 1, \qquad \text{ossia} \quad i \leq k .$$

Per valori di i che non soddisfacciano alle precedenti disuguaglianze, si avranno termini nulli nella somma che dobbiam calcolare. Se poniamo $i - k + h = l$, dovrà essere

$$0 \leq l \leq h .$$

Per ogni coppia $\alpha\alpha'$ tale che α passi per un dato $S_{r-k+h-l-2}$, mentre α' passa per un dato $S_{r-k'+l-2}$, esiste uno S_{k-2} di Σ che incontra lo $S_{r-k+h-l-2}$ dato, secondo uno S_{h-l-1}, mentre uno $S_{k'-2}$ associato incontra lo $S_{r-k'+h-2}$ dato, secondo uno S_{l-1}; ossia esiste uno S_k tangente a V in un punto di F che appoggiasi allo $S_{r-k+h-l-2}$ secondo uno S_{h-l-1}, mentre uno $S_{k'}$ tangente nello stesso punto a V', si appoggia allo $S_{r-k'+l-2}$ secondo uno S_{l-1}. E ciò avviene corrispondentemente ad un punto comune alla $M^{\varrho_{h-l}}_{k-h+l}$ luogo dei punti di contatto su V degli S_k tangenti, che si appoggiano al dato $S_{r-k+h-l-2}$ secondo uno S_{h-l-1}, e alla $M^{\varrho'_l}_{k-l}$ luogo dei punti di contatto su V' degli $S_{k'}$ tangenti, i quali si appoggiano al dato $S_{r-k'+l-2}$ secondo uno S_{l-1}. Si ha dunque:

$$\mu_h = \sum_0^h{}_l \, \varrho'_l \, \varrho_{h-l} .$$

L'ultima classe di F, seguendo le nostre notazioni, si esprime mediante un polinomio isobarico di peso h, nelle classi di V e V'.

Dopo ciò è facile calcolare l'i-esima classe μ_i di F, giacché μ_i non è altro che l'ultima classe della M_i sezione di F con un generico S_{r-h+i}. Se si ricorda che le classi d'un certo indice della sezione generica d'una varietà sono uguali alle classi dello stesso indice della varietà oggettiva, mediante l'applicazione del risultato precedente si ottiene:

$$\mu_i = \sum_0^i{}_l \, \varrho'_l \, \varrho_{i-l} ,$$

(30) Cfr. PIERI, Nota di Palermo, citata al n° 2. – Cfr. pure il frammento: *Sulla teoria degli spazî a più dimensioni*, nelle Memorie, già citate, del CAPORALI.

che è un polinomio isobarico di peso i. Cioè:

Una varietà V_k di classi $\varrho_0, \varrho_1, \cdots, \varrho_k$ e una varietà $V'_{k'}$ di classi $\varrho'_0, \varrho'_1, \cdots, \varrho'_{k'}$, dotate di singolarità qualsiansi (a norma del n. 10), se sono in posizione generica, hanno comune una varietà ad h $(= k + k' - r)$ dimensioni le cui classi sono espresse dalle formole:

$$\mu_i = \sum_0^i{}_l \varrho'_l \varrho_{i-l} \qquad (i = 0, 1, \cdots, h).$$

L'applicazione replicata di questo teorema, che sulle dimensioni delle varietà che s'intersecano non suppone nessuna restrizione, conduce a stabilire le formole che dànno le classi della varietà comune a più varietà dotate di singolarità qualunque, le quali siano situate genericamente.

13. Ed ora passiamo a calcolare i ceti $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots$ della varietà F comune alle due varietà V e V'.

Supponiamo dapprima che sia $2h < r$ e cominciamo dal calcolare l'ultimo ceto, che in questo caso ha per indice h, ossia il numero degli S_h tangenti ad F che si appoggiano in un punto a uno spazio O_{r-2h}, dato genericamente nello S_r.

Ad uno spazio Σ, tangente a V in un punto di F, associamo uno spazio Σ' tangente a V' nello stesso punto, eppoi accoppiamo ad ogni punto P di un Σ, ogni punto P' di un Σ' associato. Variando il punto considerato della F si ottengono così $\infty^{h+k+k'}$ coppie PP'. Per una di tali coppie giacere in O è condizione $4h$–pla, e quindi di coppie PP' in O se ne trovano ∞^{r-2h}. In questa infinità di coppie, se, come si è supposto, V e V' sono in posizione generica, si presentano un numero finito di coincidenze, in corrispondenza ai punti in cui O è incontrato dalla varietà delle tangenti di F. Il numero di tali concidenze è dato dalla somma degli indici della corrispondenza: l'i–esimo indice $(i = 0, 1, \cdots, r - 2h)$ denotando il numero delle coppie il cui P giace in un dato S_i, Π, mentre P' sta in un dato S_{r-2h-i}, Π'.

Gli S_k tangenti a V appoggiati a Π sono ∞^{2k+i-r} e coi loro punti di contatto segnano sopra V una varietà di ordine ω_l, ove si è posto $l = r - k - i$; e similmente gli $S_{k'}$ tangenti a V' e appoggiati a Π' toccano V' nei punti di una varietà a $2k' - 2h - i$ dimensioni e di ordine ω'_{h-l}. La $M^{\omega_l}_{2k+i-r}$ e la $M^{\omega'_{h-l}}_{2k'-2h-i}$ suddette, si tagliano in $\omega_l \omega'_{h-l}$ punti e per ciascuno di tali punti avremo un Σ appoggiato a Π, in guisa che un Σ' associato si appoggi a Π', ossia una coppia PP' il cui P sta in Π, mentre P' sta in Π'. Sicché:

$$\nu_h = \sum_l \omega_l \omega'_{h-l},$$

che è pure un polinomio isobarico di peso h.

Siccome può darsi che i punti P (o i punti P') delle coppie PP' giacenti in O non invadano tutto lo spazio O, alcuni degli indici della corrispondenza potranno esser nulli, e quindi se vogliamo estendere il sommatorio precedente

da 0 ad $r-2h$, bisognerà attribuire il valore 0 a quelle ω, o a quelle ω', che, a causa dell'indice, divengon simboli privi di senso (31).

Così, per esempio: La formola che precede per $k=2$, $k'=r-1$, offre il modo di calcolare la classe (1° rango) della curva comune ad una forma e ad una superficie dello S_r (32) e il, ragionamento, *in tal caso*, non differisce in sostanza da quello che si fece per la determinazione delle classi. Mantenendo le notazioni di prima, otteniamo:

$$\nu_1 = \omega_{r-2}\,\omega'_{3-r} + \omega_{r-3}\,\omega'_{4-r} + \cdots + \omega_2\,\omega'_{-1} + \omega_1\,\omega'_0 + \omega_0\,\omega'_1 .$$

Ivi i simboli ω_{r-2}, ω_{r-3}, $\cdots$, ω'_{-1} non hanno senso, e quindi, ponendoli uguali allo 0, si avrà:

$$\nu_1 = \omega_1\,\omega'_0 + \omega_0\,\omega'_1 = \varrho_1\,\varrho'_0 + \varrho_0\,\varrho'_1 ,$$

come ci dà la formola del n° precedente.

Se $2h=r$, allora l'ultimo ceto ν_h è il numero degli S_h tangenti ad F passanti per un punto O. Gli S_k tangenti a V, passanti per O, formano coi loro punti di contatto una $M_{2\,k-r}^{\omega_{r-k}}$, e così gli $S_{k'}$ tangenti a V' e passanti per O la toccano nei punti di una $M_{2\,k'-r}^{\omega'_{r-k'}}$. Se V e V' sono in posizione generica, nel senso precisato, per ogni punto comune alle varietà dei punti di contatto, si ha uno S_h tangente ad F passante per O; sicché:

$$\nu_h = \omega_{r-k}\,\omega'_{r-k'} ,$$

che è monomio di peso h.

Se è $2h > r$, il calcolo dell'ultimo ceto ν_{r-h} di F si ridurrà, per mezzo di una sezione con uno $S_{2(r-h)}$, al caso precedente.

In ogni caso poi gli altri ceti si posson riguardare come ultimi ceti di convenienti sezioni spaziali della varietà F.

Le due varietà V_k e $V_{k'}$, dotate di singolarità qualsiansi (a norma del n. 10), i cui ceti sono rispettivamente $\omega_0, \omega_1, \cdots ; \omega'_0, \omega'_1, \cdots$, se si trovano in posizione generica, hanno comune una varietà ad h $(= k + k' - r)$ dimensioni, il cui ceto s–esimo è dato dalla formola:

$$\nu_s = \sum_l \omega_l\,\omega'_{s-l} , \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots).$$

L'applicazione replicata di questo teorema, serve a risolvere l'analogo problema per la varietà intersezione di un numero qualsiasi di varietà.

(31) Il precisare come si è fatto prima per le classi, fra quali limiti si deve estendere il sommatorio per ottenere termini non nulli, ci porterebbe ad una inutile distinzione di casi.

(32) Questa questione è già risolta dalle formole del n° precedente, e sotto certe ipotesi restrittive, si può anche risolvere profittando della formola di Nöther che dà il genere di una curva spezzata « Acta Math. », VIII, 1886, pag. 182. — Cfr. F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *44* (1893), pp. 171–232.

Si noti che nelle espressioni delle classi e dei ceti di F compariscono soltanto caratteri intrinseci di V e V', e non numeri la cui definizione dipenda dal considerare simultaneamente V e V'.

§ 6. – Applicazione al caso di una varietà completa intersezione di forme.

14. Un'applicazione notevole, benché molto particolare, dei risultati precedenti, si può fare al caso della varietà comune ad $r - h$ forme, le quali siano in posizione generica, e siano *generali dei loro ordini* (prive di punti multipli).

Siano V', V'', $\cdots$, $V^{(r-h)}$ le forme date, delle quali diciamo n_1, n_2, $\cdots$, n_{r-h} gli ordini rispettivi. L'ipotesi della genericità della loro posizione si può in tal caso esprimere dicendo che esse non si toccano in nessun punto comune. Calcoliamo i ceti e le classi della varietà F_h, comune alle forme date. Chiamando $\varrho_1^{(i)}, \cdots, \varrho_{r-1}^{(i)}$ le classi della forma $V^{(i)}$, avremo:

$$\varrho_1^{(i)} = n_i (n_i - 1) \quad , \quad \varrho_2^{(i)} = n_i (n_i - 1)^2 , \cdots, \varrho_{r-1}^{(i)} = n_i (n_i - 1)^{r-1} .$$

Dei ceti c'è luogo a considerarne uno solo, $\omega_1^{(i)} = \varrho_1^{(i)}$.

Sicché, se come al solito rappresentiamo con μ_h l'ultima classe di F, applicando $h - 1$ volte il teorema del n° 12, verrà:

$$\mu_h = n_1 n_2 \cdots n_{r-h} \sum (n_1 - 1)^i (n_2 - 1)^j \cdots (n_{r-h} - 1)^t ,$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni in numeri interi non negativi dell'equazione:

$$i + j + \cdots + t = h.$$

Così, se $2h \leq r$, al qual caso ci dobbiamo sempre ridurre pel calcolo dei ceti, applicando $h - 1$ volte il teorema del n° 13, avremo:

$$\nu_h = n_1 n_2 \cdots n_{r-h} \sum (n_i - 1) (n_j - 1) \cdots (n_l - 1),$$

ν_h denotando l'ultimo ceto di F, e il sommatorio essendo esteso alle combinazioni semplici, di classe h, degli indici $1, 2, \cdots, r - h$.

15. Vediamo come a queste medesime formole si pervenga, in questo caso semplice, mediante la considerazione delle varietà Jacobiane, come appunto fa il Caporali, per alcuni problemi dello S_4, nei citati frammenti (33).

Siano $f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots, f_{r-h} = 0$ le equazioni delle forme V. Determiniamo uno S_{r-2} dello S_r mediante le equazioni $f_{r-h+1} = 0, f_{r-h+2} = 0$

(33) È per l'uso delle Jacobiane che i resultati del Caporali non hanno sempre quel grado di generalità, che noi richiediamo.

di due iperpiani per esso. La varietà M_{r-h} luogo dei punti tali che gli iperpiani polari di ciascuno di essi rispetto alle $r-h+2$ forme date (le V e i due iperpiani per lo S_{r-2}) abbiano comune uno S_{h-1}, ossia il luogo dei punti tali che gli iperpiani polari rispetto alle V si taglino in uno S_{h-1} del dato S_{r-2} (*varietà Jacobiana delle forme V e dello* S_{r-2}), è rappresentata dalle equazioni compendiate simbolicamente nella uguaglianza:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{r+1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_{r-h+2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{r-h+2}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{r-h+2}}{\partial x_{r+1}} \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

ove $x_1 , x_2 , \cdots , x_{r+1}$ sono coordinate omogenee di punti nello spazio ambiente. L'ordine di questa varietà, in virtù della formola citata di S. Roberts, è espresso da:

$$\sum (n_1 - 1)^i (n_2 - 1)^j \cdots (n_{r-h} - 1)^t ,$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni intere e positive (incluse anche quelle costituite parzialmente da zeri) della equazione $i + j + \cdots + t = h$. Per ogni punto in cui questa Jacobiana incontra la F, avremo uno S_h tangente ad F appoggiato al dato S_{r-2} secondo uno S_{h-1} (34). E così ritroviamo l'espressione già data per μ_h.

Sia $2h \leq r$. Diciamo $f_{r-h+1} = 0 , \cdots , f_{r+h} = 0$ le equazioni di $2h$ iperpiani linearmente indipendenti. Il luogo di un punto i cui iperpiani polari rispetto alle forme $f_1 = 0 , \cdots , f_{r+h} = 0$, hanno un punto comune, ossia il luogo di un punto i cui iperpiani polari rispetto alle forme $f_1 = 0 , \cdots , f_{r-h} = 0$ si appoggiano in un medesimo punto allo S_{r-2h} comune ai $2h$ iperpiani indipendenti dati, è una M_{r-h} rappresentata dalle equazioni compendiate nella:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+h}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{r+h}}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{r+h}}{\partial x_{r+1}} \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

e, pel citato teorema di Roberts, il suo ordine è espresso da:

$$\sum (n_i - 1) (n_j - 1) \cdots (n_t - 1) ,$$

(34) Così non si potrebbe dire se le forme V non fossero in posizione generica, e prive di varietà multiple.

il sommatorio essendo esteso alle combinazioni semplici ad h ad h, degli indici $1, \cdots, r+h$. Sicome le combinazioni in cui compariscono indici superiori ad $r-h$ son nulle, basterà combinare ad h ad h gli indici $1, \cdots, r-h$. La Jacobiana M_{r-h} incontra F in

$$n_1 n_2 \cdots n_{r-h} \sum (n_i - 1)(n_j - 1) \cdots (n_t - 1)$$

punti, e tale sarà l'ultimo ceto di F.

§ 7. – Le classi e i ceti d'immersione di una varietà in un'altra completa intersezione di forme.

16. La varietà V_k in cui è immersa la varietà Φ_h di ordine ϱ_0, sia intersezione completa di $r-k$ forme $f_1, \cdots, f_{r-k}$ degli ordini rispettivi $n_1, n_2, \cdots, n_{r-k}$, le quali siano situate genericamente in guisa che V non abbia punti multipli.

Il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto a $f_1, \cdots, f_{r-k}$ incontrano un dato $S_{r-k+l-2}$ in uno S_{l-1}, è una M_{r-l} di ordine $\sum (n_1 - 1)^i (n_2 - 1)^j \cdots (n_{r-k} - 1)^t$, ove il sommatorio si estende a tutte le soluzioni intere e positive (incluse quelle costituite parzialmente da zeri) dell'equazione $i + j + \cdots + t = l$. La suddetta M_{r-l} incontra Φ in una M_{h-l}, e lo S_k tangente a V in ciascun punto di essa, nelle ipotesi nostre, appoggiasi al dato $S_{r-k+l-2}$ secondo uno S_{l-1}.

Sicché la classe d'immersione z_l di Φ in V, è data dalla formola:

$$z_l = \varrho_0 \sum (n_1 - 1)^i (n_2 - 1)^j \cdots (n_{r-k} - 1)^t,$$

il sommatorio essendo esteso al solito modo [35].

Il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto alle forme $f_1, \cdots, f_{r-k}$ incontrano in un punto un dato S_{r-k-l} $(l \leq r-k)$, è una M_{r-l} di ordine $\sum (n_i - 1)(n_j - 1) \cdots (n_t - 1)$, ove il sommatorio si estende a tutte le combinazioni semplici di classe l degli indici $1, 2, \cdots, r-k$. La varietà M_{r-l} seca Φ in una M_{h-l}, e lo S_k tangente a V nei punti di quest'ultima appoggiasi al dato S_{r-k-l}.

Il ceto d'immersione y_l di Φ in V sarà dunque espresso da:

$$y_l = \varrho_0 \sum (n_i - 1)(n_j - 1) \cdots (n_t - 1)$$ [36].

(35) Si scorge dal semplice ragionamento fatto, fino a che punto sia necessaria l'ipotesi che V non abbia punti multipli. Se V possiede punti multipli e su Φ se ne trovano $\infty^{l'}$, la formola del testo è applicabile per tutti i valori di l minori di $h - l'$.

(36) Anche qui si può osservare che se V possiede punti multipli e su Φ se ne trovano $\infty^{l'}$, la formola dei ceti è applicabile per tutti i valori di l inferiori ad $h - l'$.

Si capisce che, almeno nel caso che V non abbia punti multipli, anche gli altri caratteri d'immersione di Φ in V si possano esprimere in funzione di ϱ_0 e degli ordini delle f. Perciò basta saper calcolare l'ordine del luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto alle f passano per uno spazio $[s]$ di una data figura fondamentale $[a_0, a_1, \cdots, a_s]$, il quale ordine non è stato finora calcolato, per quanto io sappia. Si potrebbe ottenerlo applicando il principio di corrispondenza fra gli $[s]$ di $[r]$, principio da me dimostrato nella Nota IV.

CAPITOLO TERZO

§ 8. – LE RELAZIONI CHE LEGANO I CARATTERI DI DUE CURVE CHE INSIEME COSTITUISCANO LA COMPLETA INTERSEZIONE DI DUE VARIETÀ.

17. Nello S_r si abbiano due varietà V_k e $V'_{k'+1}$ $(k + k' = r)$, di ordini rispettivi ϱ_0 , ϱ'_0 e di prime classi ϱ_1 e ϱ'_1, le quali, all'infuori di una curva C di ordine μ_0 e classe (1° rango) μ_1, che sia linea s–pla ordinaria per V (cioè cogli spazî tangenti a V in ogni punto di C, distinti) e s'–pla ordinaria per V', si seghino (semplicemente) in una curva C' d'ordine μ'_0 e classe μ'_1, la quale si appoggi in d punti a C. Noi supponiamo che ognuno degli s spazî tangenti a V in un punto qualunque di C non giaccia in un iperpiano con qualcuno degli s' spazî tangenti a V' nello stesso punto, eccezion fatta, naturalmente, pei d punti comuni a C e C', in ognuno dei quali accadrà che uno spazio tangente a V e uno spazio tangente a V' giacciano in un medesimo iperpiano.

18. Siano z_1 e ζ_1 le classi d'immersione di C in V e V' rispettivamente e z'_1 , ζ'_1 le classi d'immersione di C'. Si tratta di calcolare μ'_0 , μ'_1 , d , z'_1 ; ζ'_1, in funzione dei caratteri analoghi di C e degli ordini e prime classi di V e V'.

Fissato nello S_r uno spazio generico Π_{r-2}, diciamo che uno S_{k-2} di Π è *associato* ad uno $S_{k'-1}$ di Π, quando per lo S_{k-2} passa uno S_k tangente a V e per lo $S_{k'-1}$ passa uno $S_{k'+1}$ tangente a V' in uno stesso punto di C. Cerchiamo quante volte accade che due spazî associati abbiano comune un punto, ossia giacciano in un medesimo iperpiano di Π. Appaiamo gli S_{r-3} di Π in guisa che una coppia sia costituita da uno S_{r-3} , α, passante per lo S_{k-2} traccia su Π di uno S_k tangente a V in un punto di C, e da uno S_{r-3} , α', passante per uno $S_{k'-1}$ associato a S_{k-2} .

Gli indici della corrispondenza son tutti nulli (ved. al n° 12), tranne due. L'uno denota quante coppie $\alpha\alpha'$ hanno lo spazio α passante per un dato S_{r-k-1}, mentre α' passa per un dato S_{k-3}; il quale indice uguaglia il numero dei punti comuni a C e alla M_{k-1} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V e appoggiati al dato S_{r-k-1} in un punto, moltiplicato, quel numero, per s', giacché per ogni S_k tangente a V in un punto di C e appoggiato al dato S_{r-k-1}, si hanno s' spazî tangenti a V', che dànno su Π altrettanti spazî α' essendo fissato un S_{k-3} per cui questi α' debbon passare. Inoltre non è nullo l'indice che denota quante coppie hanno lo spazio α passante per un dato S_{r-k-2}, mentre α' passa per un dato S_{k-2}; il qual numero si ottiene analogamente scambiando l'ufficio di V e V'.

Le coincidenze si hanno negli S_{r-3} di cui ognuno congiunge uno S_{k-2} e uno $S_{k'-1}$ associati, relativi ad un punto di C la cui tangente si appoggia a Π, e negli S_{r-2} tracce su Π degli iperpiani tangenti comuni a V e V' nei

d punti comuni a C e C'. Onde:

$$\mu_1 ss' + d = z_1 s' + \zeta_1 s, \tag{1}$$

dalla quale:

$$d = z_1 s' + \zeta_1 s - \mu_1 ss'.$$

Analogamente ragionando sulla curva C', che abbiamo supposta semplice per V e V', avremo:

$$\mu'_1 + d = z'_1 + \zeta'_1. \tag{2}$$

Sicchè, sommando a membro a membro la (1) e la (2), verrà:

$$\mu_1 ss' + \mu'_1 + 2d = z_1 s' + \zeta_1 s + z'_1 + \zeta'_1. \tag{3}$$

La M_{k-1} dei punti di contatto degli S_k tangenti a V, appoggiati a un dato S_{r-k-1}, taglia la varietà V' in $\varrho_1 \varrho'_0$ punti di cui z_1 (da contarsi ognuno s' volte) cadono in punti di C e z'_1 in punti di C'. E dunque:

$$z_1 s' + z'_1 = \varrho_1 \varrho'_0.$$

Analogamente:

$$\zeta_1 s + \zeta'_1 = \varrho'_1 \varrho_0,$$

dalle quali si traggono le:

$$z'_1 = \varrho_1 \varrho'_0 - z_1 s', \qquad \zeta'_1 = \varrho'_1 \varrho_0 - \zeta_1 s.$$

Mediante le precedenti, la (3) diviene:

$$\mu_1 ss' + \mu'_1 + 2d = \varrho_1 \varrho'_0 + \varrho'_1 \varrho_0,$$

la quale si poteva con facilità dedurre direttamente dalle formole del n° 12; e nella precedente uguaglianza sostituendo il valore di d, avremo:

$$\mu'_1 = \varrho_1 \varrho'_0 + \varrho'_1 \varrho_0 + \mu_1 ss' - 2 z_1 s' - 2 \zeta_1 s \ (37).$$

(37) Se C, come si è già supposto, è semplice per V e V' ed ha in queste varietà posizione generica, introducendo il carattere λ di C in V (ved. la nota alla fine del n° 9), e l'analogo λ' in V', avremo:

$$z_1 = \mu_0 (\varrho_0 - 1) - \lambda, \qquad \zeta_1 = \mu_0 (\varrho'_0 - 1) - \lambda', \qquad d = \mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \lambda - \lambda' - \mu_1,$$

$$\mu'_1 = \varrho_1 \varrho'_0 + \varrho'_1 \varrho_0 + \mu_1 - 2 \mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) + 2\lambda + 2\lambda',$$

e, più particolarmente, se V' è una forma generale nel suo ordine, avremo:

$$d = \mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \lambda - \mu_1,$$

$$\mu_1 = \varrho_1 \varrho'_0 + \varrho_0 \varrho'_0 (\varrho'_0 - 1) + \mu_1 - 2 \mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) + 2\lambda.$$

Per lo spazio S_4, ved. CAPORALI, *loc. cit.*

Concludendo:

Una V_k di origine ϱ_0 e prima classe ϱ_1, e una $V'_{k'+1}$ di ordine ϱ'_0 e prima classe ϱ'_1, immerse in uno S_r $(r = k + k')$, che abbiano in comune una curva s–pla ordinaria per V, e s'–pla ordinaria per V', e che siano in posizione generica, si tagliano altrove in una curva di ordine μ'_0 di, classe μ'_1, di classi d'immersione in V e V' rispettivamente z'_1 e ζ'_1, avente con la curva primitiva d punti comuni, e i caratteri dell'ultima curva si esprimono in funzione dei caratteri analoghi μ_0, μ_1, z_1, ζ_1 della primitiva, con le formole:

$$\mu'_0 = \varrho_0\,\varrho'_0 - \mu_0\,ss', \qquad \mu'_1 = \varrho_1\,\varrho'_0 + \varrho_0\,\varrho'_1 + \mu_1\,ss' - 2\,z_1\,s' - 2\,\zeta_1\,s,$$

$$z'_1 = \varrho_1\,\varrho'_0 - z_1\,s', \qquad \zeta'_1 = \varrho'_1\,\varrho_0 - \zeta_1\,s, \qquad d = z_1\,s' + \zeta_1\,s - \mu_1\,ss'.$$

Si noti che nelle espressioni precedenti non compariscono numeri la cui definizione implichi la considerazione simultanea di V e V'.

19. Il metodo seguito al n° precedente, permette di risolvere un problema notevole nello spazio ordinario.

Sono ben note le formole di Salmon che legano i caratteri di una curva che sia doppia per una superficie e semplice per un'altra, ai caratteri della ulteriore intersezione di queste due superfici [38]. Ma un problema che presenta maggiore interesse e che non è risoluto dalle formole suddette, è quello di trovare i caratteri della ulteriore intersezione di due superficie F, F', che hanno comune una linea nodale per F *dotata di un numero finito di punti tripli e triplanari* (per essa e per F) *e di un numero finito di punti cuspidali*. Questo caso è veramente notevole, giacché, se la superficie F non ha altre singolarità che quella linea doppia, la superficie F' è una *superficie aggiunta* ad F. Mediante le formole che noi troveremo si potrebbero quindi studiare proiettivamente (cioè fissandosi sullo speciale modello F) molte proprietà che appartengono alla geometria sopra un superficie, poiché è noto che per trasformazioni birazionali una superficie dotata di singolarità qualsiansi può sempre ridursi ad una superficie con una linea nodale, avente un numero finito di punti tripli e cuspidali.

La F sia d'ordine n, abbia una linea nodale γ di ordine b, rango q, con j punti cuspidali e t punti tripli [39]; e la superficie F' sia di ordine m. La F' avrà necessariamente, poiché passa per γ, t punti doppi, nei punti tripli di γ. Diciamo γ' l'ulteriore intersezione di F e F', b' il suo ordine, q' il suo rango, ω il numero dei punti in cui essa incontra la linea γ. Si vuole esprimere b', q', ω in funzione dei caratteri di F, e di m. Notiamo subito che:

$$b' = mn - 2\,b.$$

(38) Cfr. SALMON, *Géométrie à trois dimensions*, 2me partie, n° 357.

(39) Qui usiamo per indicare i caratteri di F le stesse notazioni che trovansi nel trattato del Salmon-Fiedler, e in ZEUTHEN, *Révision et extension des formules numérique de la théorie des surfaces réciproques*, Mathematische Annalen, 10 (1876), pp. 446–546.

Eppoi, assunta nello spazio una retta s, si chiamino omologhi due punti P, P' di essa quando per P passi il piano tangente ad F in un punto di γ' e per P' il piano tangente a F' nello stesso punto. La prima polare di P rispetto ad F seca γ', fuori degli ω punti d'appoggio su γ, in $b'(n-1)-\omega$ punti, e il piano tangente a F in ognuno di questi punti seca s in un punto P' omologo di P. La prima polare di P' rispetto ad F' seca γ' in $b'(m-1)$ punti, ciascuno dei quali dà origine ad un punto P. Sicché sono:

$$b'(n+m-2)-\omega$$

le coincidenze. Di queste se ne hanno q' nei punti in cui s incontra la sviluppabile osculatrice a γ', e ω nei punti in cui i piani tangenti comuni a F e F' tagliano s. Onde:

$$b'(n+m-2)-\omega = q'+\omega \quad (40).$$

Ed ora sulla s consideriamo un'altra corrispondenza fra le coppie di punti RR', essendo R segnato su s da un piano tangente ad F in un punto di γ ed R' dal piano tangente ad F' nello stesso punto.

Se diciamo ϱ la classe della sviluppabile dei piani tangenti ad F nei punti della linea doppia, saranno manifestamente ϱ i punti R' omologhi di un dato R. I piani tangenti ad F' in punti di γ, i quali passano per un dato punto R', sono $b(m-1)-3t$, perché la prima polare di R' rispetto ad F' passa semplicemente pei t punti tripli di γ; e da ognuno dei punti di contatto di questi piani tangenti provengono due punti R corrispondenti ad R'. E dunque sono:

$$\varrho + 2b(m-1) - 6t$$

le coincidenze; delle quali se ne hanno $2q$ nei punti in cui s incontra la sviluppabile osculatrice a γ, e ω nei punti in cui i piani tangenti comuni a F e F' incontrano s. Sicché:

$$\varrho + 2b(m-1) - 6t = 2q + \omega.$$

Per le note formole di Salmon–Zeuthen sulle singolarità delle superficie, si ha:

$$3t = b(n-2) - \varrho\,, \qquad \varrho = q + \frac{1}{2}j,$$

e quindi, sostituendo nella precedente relazione, verrà:

$$\omega = 2b(m-n+1) + q + \frac{3}{2}j.$$

(40) Questa relazione si poteva anche ottenere con la considerazione della Jacobiana di F, F' ed una retta; ma non così per la relazione successiva.

E siccome:

$$q' = (mn - 2b)(m + n - 2) - 2\omega,$$

sostituendo il valore di ω, otterremo:

$$q' = mn(m + n - 2) - 2b(3m - n) - 2q - 3j \text{ (41)}.$$

§ 9. – Relazioni fra i caratteri di due superficie che insieme costituiscano la completa intersezione di due forme nello S_4.

20. Trattiamo a parte questo caso, che rientra nel problema di determinare i legami fra i caratteri di due superficie che insieme costituiscono la completa intersezione di due varietà nello S_r, anzitutto perché, volendosi mettere nelle condizioni più generali, le superficie parti, se siamo nello S_4, vanno supposte dotate di punti doppi improprî, eppoi perché una forma dello S_4 che passi per una superficie è obbligata ad avere punti doppi in punti semplici della superficie, il che non accade se la dimensione dello spazio ambiente supera il 4 (42).

(41) Applicando queste formole determinai la postulazione di una superficie F irriducibile dello S_r per le forme di ordine m, ossia il numero delle condizioni che s'impongono ad una forma di ordine m (abbastanza grande) obbligandola a contenere la F. Il prof. Enriques, al quale scrissi di questa ricerca, mi avvertì che da alcune proposizioni di geometria sopra una superficie, combinate insieme, facilmente si deduceva la postulazione di F. Poiché si tratta di cosa interessante, che non è stata *esplicitamente* notata, riporto qui la sostanza di quanto mi scrisse il prof. Enriques.

Anzitutto si osservi che se nello S_r è data una superficie F^n irriducibile, priva di linee multiple, le forme di ordine $m \geq n - 2$, segnano su essa un sistema lineare, $|C|$, completo. Difatti è noto che sopra una sezione iperpiana generica, nelle nostre ipotesi, le forme di ordine $m \geq n - 2$ segnano una serie lineare completa (non speciale), e quindi $|C|$ non può esser contenuto *totalmente* in un sistema più ampio (ved. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*). Siccome poi il multiplo secondo k di un sistema lineare, almeno ∞^2, privo di curve fondamentali proprie, è regolare, quando k è abbastanza grande (Castelnuovo), ne viene che se F è dotata di soli punti multipli improprî, ed m è abbastanza grande, le forme di ordine m segnano su F un sistema $|C|$ completo e regolare. Il grado di $|C|$ è nm^2, il genere è $n\binom{m}{2} + m(p - 1) + 1$, se p è il genere di una sezione iperpiana di F, e quindi la dimensione di $|C|$ è:

$$nm^2 - \left[n\binom{m}{2} + m(p - 1) + 1\right] + p_n + 1 = n\binom{m+1}{2} - m(p - 1) + p_n,$$

ove p_n è il genere numerico di F. Sicché la postulazione è espressa da:

$$n\binom{m+1}{2} - m(p - 1) + p_n + 1.$$

(42) Il Caporali, nell'ultimo numero dei citati frammenti, si occupa del problema che ora trattiamo; ma dalle poche cose scritte si rileva che egli escludeva che le due parti superficiali avessero punti doppi, e che le forme che s'intersecano dovessero avere punti doppi

Siano F ed F' due forme di ordini rispettivi ϱ_0 e ϱ'_0 dello S_4, le quali s'intersechino secondo una superficie spezzata in due parti: una parte Φ di ordine μ_0, di classi μ_1, μ_2, di secondo ceto ν_2, e una superficie Φ' i cui caratteri, analoghi ai precedenti, siano μ'_0, μ'_1, μ'_2, ν'_2. Supponiamo pure che Φ e Φ' siano due superficie generali dello S_4. Queste ipotesi si potranno relizzare nel modo seguente. Si parta dalla superficie generale Φ e per essa, in modo affatto generico, si conducano le due forme F, F' di ordini così grandi che questa costruzione sia possibile. Queste due forme s'intersecheranno ulteriormente in una superficie Φ', che taglierà Φ in una curva C (di ordine ε_0 e classe o primo rango ε_1) lungo la quale F ed F' si toccheranno, e la Φ' avrà punti doppi soltanto nei punti doppi impropri di Φ (ved. la mia Nota di Palermo, al n° 14). Si tratta di vedere che i punti doppi di Φ' sono impropri, per poter dire che Φ' è generale. La cosa è evidente se i punti doppi di Φ sono impropri di 1ª specie; chè allora, detto P uno di essi, i coni quadrici tangenti a F e F' in P avendo già comuni due piani di differenti sistemi, si secano ulteriormente secondo due altri piani di differenti sistemi, che son tangenti, a Φ' in P, il quale punto sarà dunque per Φ' improprio di 1ª specie.

Ma in ogni caso, secando con uno S_3 generico per P, e formando lo Jacobiano delle due forme f e f' (sezioni rispettive di F e F') e di due piani, facilmente si scorgerà ch'esso possiede un punto doppio in P; e quindi siccome P è doppio per φ (sezione di Φ) quattro intersezioni di quello Jacobiano con φ cadranno in P; le altre intersezioni proveranno dai punti di contatto delle μ_1 tangenti di φ appoggiate alla retta comune ai due piani (giacché, P essendo doppio improprio per Φ, la φ ha la stessa classe di una sezione spaziale generica), eppoi dai punti in cui f, f' hanno lo stesso piano tangente. E dunque avremo:

$$\mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \mu_1 - 4$$

punti in cui f, f', e quindi F e F', si toccano (fuori di P).

Se noi avessimo secato con uno S_3 generico, applicando alle superficie sezioni e alle curve ad esse comuni, formole note dello spazio ordinario (che sono casi particolari delle formole del n° 18), avremmo ottenuto:

$$(1) \qquad \mu'_0 = \varrho_0 \varrho'_0 - \mu_0 , \qquad \mu'_1 = (\varrho_0 \varrho'_0 - 2\mu_0)(\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) + \mu_1 ,$$

$$\varepsilon_0 = \mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \mu_1 ,$$

e quindi il numero dei punti di uno S_3 condotto genericamente per P, nei quali si toccano, fuori di P, le due forme F e F' è uguale ad $\varepsilon_0 - 4$, dal che rilevasi che *il punto P giace su C ed anzi è quadruplo per questa curva.*

in punti semplici delle due superficie. Se la prima ipotesi restringeva il problema relativamente alla natura delle superficie considerate, la seconda riduceva la trattazione valida solo per *particolari valori* degli ordini delle due forme (ad esempio le due forme avrebbero dovuto avere lo stesso ordine, ma ciò neppure sarebbe bastato) come lo mostra la proposizione del n° 7.

Ciò posto, ripetendo sopra la curva φ' (sezione di Φ' con lo S_3 condotto per P), della quale diciamo (μ_1') il rango, il ragionamento già fatto sopra la φ, si arriva alla conclusione che sono:

$$\mu_0' (\varrho_0 + \varrho_0' - 2) - (\mu_1') - 4$$

i punti del dato S_3, diversi da P, nei quali si toccano F e F'. Sicché:

$$\mu_0 (\varrho_0 + \varrho_0' - 2) - \mu_1 - 4 = \mu_0' (\varrho_0 + \varrho_0' - 2) - (\mu_1') - 4,$$

dalla quale:

$$(\mu_1') = (\varrho_0 \varrho_0' - 2\mu_0) (\varrho_0 + \varrho_0' - 2) + \mu_1,$$

ossia, in virtù delle (1):

$$(\mu_1') = \mu_1'.$$

la quale prova che P è un punto doppio improprio anche per Φ'.

Profittando delle stesse considerazioni fatte nel caso che P sia doppio improprio per Φ e Φ', si trova che, secando con uno S_3 generico per P, se questo è semplice per Φ e Φ' e per F, F', le due ultime forme, fuori di P, si toccano in $\varepsilon_0 - 1$ punti del dato S_3; il che prova che P giace semplicemente su C.

E così, se P è semplice per Φ e Φ' e doppio per una (sola) tra le forme F, F', si trova pure che P giace semplicemente sopra C.

Avendo ora fatte sopra il punto P comune a Φ e Φ' tutte le possibili ipotesi, si potrà concludere che *le due superficie Φ e Φ' non hanno fuori di C punti (isolati) in comune.*

Il problema di cui ora ci occupiamo ha per iscopo il calcolo dei caratteri di Φ', dei caratteri ε_0, ε_1 di C, e delle classi d'immersione di C in Φ e Φ', in funzione dei caratteri assegnati di Φ e degli ordini di F e F'. Le (1) sono dunque tra le formole che ci siamo proposti di stabilire.

Passiamo ora a calcolare gli altri numeri incogniti.

Se d indica il numero dei punti doppi improprî di Φ, tale sarà il numero dei punti doppi improprî di Φ' e avremo le relazioni:

$$\nu_2 + 2d = \mu_0 (\mu_0 - 1) - \mu_1$$

$$\nu_2' + 2d = \mu_0' (\mu_0' - 1) - \mu_1',$$

dalle quali rilevasi:

$$\nu_2' - \nu_2 = \mu_0' (\mu_0' - 1) - \mu_1' - \mu_0 (\mu_0 - 1) + \mu_1,$$

ossia, tenendo presenti le (1), otteniamo:

$$\nu_2' = \nu_2 + (\varrho_0 \varrho_0' - 2\mu_0) (\varrho_0 - 1) (\varrho_0' - 1). \tag{2}$$

Sia δ il numero dei punti doppi che F è obbligata ad avere in punti semplici di Φ [43] e δ' il numero dei punti doppi che F' è obbligata ad avere in punti semplici di Φ. Dicendo X la classe dell'inviluppo degli S_3 tangenti a F e R' nei punti di C, verrà:

$$X + 4d + \delta = \varepsilon_0 (\varrho_0 - 1),$$

giacché delle intersezioni di C con la prima polare di un punto generico dello spazio rispetto ad F, $4d$ cadono nei punti doppi improprî di Φ, perché ognuno di essi, che è 4-plo per C, appartiene alla polare suddetta essendo doppio per F, δ cadono nei punti semplici di Φ che sono doppi per F [44], e infine le altre intersezioni, provenendo da punti semplici di Φ e di F, corrispondono ai punti di contatto degli S_3 tangenti comuni a F e F' e passanti pel dato punto. Analogamente:

$$X + 4d + \delta' = \varepsilon_0 (\varrho_0' - 1).$$

Considerando le intersezioni di Φ con la superficie comune alle prime polari di un punto dello S_4 rispetto ad F e F', le quali sono in numero di $\mu_0 (\varrho_0 - 1) (\varrho_0' - 1)$, troviamo che di queste intersezioni X cadono nei punti di contatto degli S_3 tangenti comuni a F e F', passanti pel dato punto, $2d$ nei punti doppi improprî di F, e ν_2 nei punti di contatto dei piani tangenti a Φ passanti pel dato punto. Onde:

$$X + 2d + \nu_2 = \mu_0 (\varrho_0 - 1) (\varrho_0' - 1).$$

Ricordando poi che $\nu_2 + 2d = \mu_0 (\mu_0 - 1) - \mu_1$, avremo:

$$X = \mu_0' \mu_0 - \varepsilon_0.$$

Ed ora consideriamo le ∞^1 coppie di piani, incidenti secondo una retta, di cui una è costituita da un piano Π tangente a Φ, in un punto di C, e da un piano Π' tangente a Φ' nello stesso punto. Non vi sono coincidenze e di più il numero delle coppie il cui Π appoggiasi ad una retta data, uguaglia l'ordine della M_3 dei piani tangenti a Φ nei punti di C, ossia la classe d'immersione z_1 di C in Φ; il numero delle coppie il cui Π' appoggiasi a una retta data uguaglia la classe d'immersione z_1' in Φ'; il numero delle coppie in cui S_3 passa per un punto dato, uguaglia X; e infine il numero delle coppie la cui retta appoggiasi a un dato piano, uguaglia la classe ε_1 di C. Dunque:

$$0 = z_1 + z_1' - X - \varepsilon_1 \quad [45]. \tag{3}$$

(43) Noi già conosciamo l'espressione di δ in funzione dei caratteri di Φ e dell'ordine di F (ved. al n° 7), ma vedremo che nel seguito è inutile questa espressione. Fra le altre giungeremo a ritrovare, per altra via, anche la formola che dà δ.

(44) Ogni punto semplice di Φ, che sia doppio per F, giace sopra C, perché la completa intersezione di F e F' deve avere in esso un punto doppio.

(45) Il carattere d'immersione λ di C in Φ, ossia il numero delle rette per un punto dato appoggiate a C e altrove a Φ, è, in tal caso, legato a z_1 dalla relazione:

$$z_1 + \lambda + 4d = \varepsilon_0 (\mu_0 - 1).$$

Il cono che dal punto dato O proietta la C, taglia F, fuori di C, in una curva C' d'ordine $\varepsilon_0 \varrho_0 - \varepsilon_0$, e per ogni punto in cui C' taglia F', all'infuori dei punti in cui C' incontra C, si ha una retta per O appoggiata a C e altrove a Φ o a Φ'. Ora C' incontra C nei δ punti che son doppi per F senza esserlo per Φ, e per ciascuno di tali punti C' passa semplicemente; nei punti doppi improprî di Φ, ed anzi in ciascuno di essi C' ha un punto quadruplo, perché la completa intersezione di F e del cono suddetto, deve ivi avere un punto multiplo secondo 2.4; e infine negli X punti di contatto degli S_3 tangenti comuni a F e F' passanti per O, ciascuno dei quali punti fra le intersezioni di C' e F' conta due volte, perché in essi C' tocca F'; ciascuno dei d punti quadrupli di C' assorbe 8 intersezioni di C' e F', perchè è doppio anche per F'. Se introduciamo i caratteri d'immersione λ, λ' di C in Φ e Φ' rispettivamente, avremo:

$$\lambda + \lambda' = \varepsilon_0 (\varrho_0 - 1) \varrho_0' - \delta - 2X - 8d,$$

e ricordando che:

$$X + \delta + 4d = \varepsilon_0 (\varrho_0 - 1),$$

verrà:

$$\lambda + \lambda' + X = \varepsilon_0 (\varrho_0 - 1)(\varrho_0' - 1) - 4d.$$

La uguaglianza (3) alla quale eravamo pervenuti precedentemente, tenendo conto della nota a piè di pagina, relativa alla (3), diviene:

$$\lambda + \lambda' + X = \varepsilon_0 (\varrho_0 \varrho_0' - 2) - \varepsilon_1 - 8d.$$

E quindi, confrontando con quella ultimamente ottenuta, ne trarremo:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 (\varrho_0 + \varrho_0' - 3) - 4d,$$

ossia, giacché ε_0 e d si conoscono,

$$(4) \qquad \varepsilon_1 = \mu_0 (\varrho_0 + \varrho_0' - 2)(\varrho_0 + \varrho_0' - 3) - 2\mu_0 (\mu_0 - 1) - \\ - \mu_1 (\varrho_0 + \varrho_0' - 5) + 2\nu_2.$$

Ora si consideri la curva Γ luogo dei punti di contatto dei piani tangenti a Φ appoggiati a una data retta generica a, e in ogni punto di Γ tiriamo lo S_3, Σ, tangente a F in esso, e lo S_3, Σ', tangente ad F'. Avremo una ∞^1 di coppie $\Sigma\Sigma'$, in cui si presentano z_1 coincidenze, nei punti in cui Γ incontra C. Il numero z_1 è dunque uguale al numero delle coppie $\Sigma\Sigma'$ il cui Σ passa per un dato punto, che è espresso da $\mu_1 (\varrho_0 - 1)$, essendo μ_1 l'ordine di Γ, più il numero delle coppie il cui Σ' passa per un dato punto, che è espresso da $\mu_1 (\varrho_0' - 1)$, meno il numero delle coppie il cui piano $\Sigma\Sigma'$ appoggiasi a una data retta generica b, che è espresso da $\mu_2 + \nu_2$, come vedesi facendo appoggiare b alle retta a. Dunque:

$$(5) \qquad z_1 = \mu_1 (\varrho_0 + \varrho_0' - 2) - \mu_2 - \nu_2.$$

Analogamente:

$$z'_1 = \mu'_1 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \mu'_2 - \nu'_2. \tag{6}$$

E sommando a membro a membro:

$$z_1 + z'_1 = (\mu_1 + \mu'_1)(\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \mu_2 - \mu'_2 - \nu_2 - \nu'_2,$$

ossia:

$$X + \varepsilon_1 = (\mu_1 + \mu'_1)(\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \mu_2 - \mu'_2 - \nu_2 - \nu'_2,$$

dalla quale, sostituendo al posto di X, ε_1, μ'_2, ν'_2 i valori già calcolati, si trae una espressione di μ'_2 in funzione dei numeri che abbiamo assunti come noti. Non stiamo a trascrivere questa espressione di μ'_2, e la espressione (in funzione degli stessi numeri) di z'_1, la quale si otterrebbe dalla (6) sostituendovi i valori calcolati di μ'_1, μ'_1, ν'_2, perché, nell'applicare le formole a casi numerici, sarà più conveniente calcolarsi i varî caratteri incogniti seguendo l'ordine col quale abbiamo ottenuto gli stessi caratteri in generale.

Riassumendo:

Se per la superficie generale Φ dello S_4, di caratteri μ_0, μ_1, μ_2, ν_2, dotata di d punti doppi improprî, si fanno passare genericamente due forme F e F' rispettivamente di ordini ϱ_0 e ϱ'_0, esse si secano ulteriormente in una superficie Φ' che ha d punti doppi improprî negli stessi punti doppi di Φ, ed ha comune con Φ una curva C, ma nessun punto esterno a C. La C è dotata di d punti quadrupli nei punti doppi improprî di Φ. I caratteri μ'_0, μ'_1, μ'_2, ν'_2 di Φ', i caratteri ε_0, ε_1 di C, e le sue classi di immersione z_1 e z'_1 in Φ e Φ', si sanno tutti calcolare, mediante le formole di questo n°, in funzione dei soli numeri μ_0, μ_1, μ_2, ν_2, ϱ_0, ϱ'_0.

Nelle espressioni dei numeri incogniti non compariscono dunque numeri la cui definizione dipenda dalla considerazione simultanea di F e F', come sarebbe ad esempio il numero denotato con X.

21. Dall'eguaglianza:

$$X + 4d + \delta = \varepsilon_0 (\varrho_0 - 1),$$

sostituendovi i valori di X, ε_0, d, dati dalle formole:

$$X = \mu_0 (\varrho_0 \varrho'_0 - \mu_0) - \mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) + \mu_1 \quad , \quad \varepsilon_0 = \mu_0 (\varrho_0 + \varrho'_0 - 2) - \mu_1,$$

$$d = \frac{1}{2}\mu_0 (\mu_0 - 1) - \frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\nu_2,$$

si trae:

$$\delta = \mu_0 \{\varrho_0 (\varrho_0 - 2) - \mu_0\} - \mu_1 \varrho_0 + 2 (\mu_0 + \mu_1 + \nu_2),$$

ossia tanti sono i punti doppi che s'impongono, in punti semplici di Φ, alla forma F, di ordine ϱ_0, obbligata a passare per Φ. Il qual numero si ottiene anche dalla formola del n° 7, ponendovi $r = 4$, $k = 2$.

22. APPLICAZIONE: *Costruzione delle superficie di 3° e 4° ordine irriducibili, non coniche, immerse nello* S_4, *come intersezioni delle forme di ordine minimo passanti per esse.*

Nello S_4 havvi una sola superficie irriducibile, non conica, di 3° ordine, ed è, come si sa, la rigata razionale normale. Essa è priva di punti doppi, e giace in ∞^2 quadriche che sono i coni che la proiettano dai suoi punti. Si può dunque ottenere come intersezione parziale di due di questi coni; l'ulteriore intersezione è un piano che taglia la superficie cubica secondo una conica.

Di superficie del 4° ordine, irriducibili, non coniche, abbiamo, com'è noto, le seguenti:

a) La *superficie di* Segre a sezioni spaziali ellittiche, razionale, normale nello S_4, la quale si costruisce come completa intersezione di due forme quadratiche. Come caso particolare di questa superficie si presenta la Φ^4 con una retta doppia, proiezione della superficie del Veronese da un punto di una sua corda. Per la superficie di Segre:

$$\mu_0 = 4 \quad , \quad \mu_1 = 8 \quad , \quad \mu_2 = 12 \quad , \quad \nu_2 = 4 \quad , \quad d = 0.$$

b) La superficie Φ rigata, razionale, normale nello S_5, dotata di un punto doppio improprio. Di quadriche per la Φ ne passa una sola, che è il cono che la proietta dal suo punto doppio improprio P. Di forme cubiche passanti per Φ e diverse dagli ∞^2 coni che la proiettano dai suoi punti, ce ne sono certo, come risulta dalla formola di postulazione (ved. la nota alla fine del n° 19). Da quanto si stabilì al n° 20 segue che l'ulteriore intersezione di una forma cubica F, passante per Φ, e del cono quadrico su cui Φ giace, è una superficie Φ' di 2° ordine, con un punto doppio improprio, ossia una coppia di piani che hanno comune soltanto il punto P. La Φ' taglierà Φ in una curva C di 6° ordine e classe 8, la quale dovrà avere in P un punto quadruplo. Siccome i piani d'un sistema di F' tagliano Φ secondo cubiche razionali aventi in P un punto doppio, mentre i piani dell'altro sistema contengono le generatrici di Φ, segue che C sarà l'insieme di due cubiche piane razionali.

Giacché i caratteri di Φ' si conoscono, se ne possono desumere quelli di Φ, che sono del resto noti, e si ha:

$$\mu_0 = 4 \, , \quad \mu_1 = 6 \, , \quad \mu_2 = 4 \, , \quad \nu_2 = 4 \, , \quad d = 1 \, .$$

La forma cubica F ha sopra Φ 7 punti doppi, di cui uno in P, altri 3 in punti semplici di una delle cubiche costituenti C, altri 3 in punti semplici dell'altra.

c) La Φ^4 proiezione generica della superficie del Veronese, normale nello S_5. Essa non giace in nessuna quadrica, ma per essa passano forme cubiche che non sono coni. La Φ^4 possiamo ottenerla come parziale intersezione di due forme cubiche F, F' (non coni) passanti per essa, Poiché per questa Φ^4:

$$\mu_0 = 4 \, , \quad \mu_1 = 6 \, , \quad \mu_2 = 3 \, , \quad \nu_2 = 6 \, , \quad d = 0 \, ,$$

tanto F che F' avranno, sopra Φ, 10 punti doppi.

Le due forme F, F' si taglieranno altrove in una Φ'^5 della quale, conoscendo i caratteri di Φ, si potranno, mediante le formole del n° 20, determinare i caratteri. Si trova così:

$$\mu'_0 = 5\,, \qquad \mu'_1 = 10\,, \qquad \mu'_2 = 5\,, \qquad \nu'_2 = 10\,, \qquad d = 0\,.$$

La Φ' sarà rigata, perché, se non lo fosse, avendo le sezioni spaziali ellittiche, sarebbe razionale (per un teorema di Castelnuovo) e quindi normale nello S_5; dovrebbe allora (ved. la mia Nota di Palermo) possedere qualche punto doppio improprio.

La Φ' taglia Φ in una curva G, i cui caratteri sono:

$$\varepsilon_0 = 10\,, \qquad \varepsilon_1 = 30\,, \qquad z_1 = 15\,, \qquad z'_1 = 25\,.$$

§ 10. – Relazioni fra i caratteri di due superficie che insieme costituiscano la completa intersezione di $r-2$ forme dello S_r $(r>4)$ (46).

23. Nell'ambiente lineare ad r dimensioni $(r>4)$ siano date $r-2$ forme $F_1 = 0\,,\ F_2 = 0\,, \cdots,\ F_{r-2} = 0$, generali nei loro ordini, o per lo meno che non posseggano punti multipli sopra le superficie $\Phi\,,\ \Phi'$ che costituiscono la loro completa intersezione.

Questa ipotesi non limita i valori da attribuirsi agli ordini $n_1\,,\ n_2\,, \cdots,\ n_{r-2}$ delle forme F, appunto perché si è supposto $r>4$.

Se le forme F furon condotte genericamente per la superficie generale Φ, neanche Φ' avrà punti multipli; ma le due superficie avranno comune una curva C, lungo la quale le F avranno gli iperpiani tangenti linearmente dipendenti (con uno S_3 comune).

Diciamo μ_0 l'ordine di $\Phi\,,\ \mu_1\,,\ \mu_2$ le sue classi, ν_2 il suo 2° ceto; $\mu'_0\,,\ \mu'_1\,,\ \mu'_2\,,\ \nu'_2$ i caratteri analoghi di Φ'; $\varepsilon_0\,,\ \varepsilon_1$ l'ordine e la classe di C; x_1 e x'_1 le classi d'immersione di C in Φ e Φ' rispettivamente.

Si tratta di esprimere $\mu'_0\,,\ \mu'_1\,,\ \mu'_2\,,\ \nu'_2\,,\ \varepsilon_0\,,\ \varepsilon_1\,,\ x_1\,,\ x'_1$ in funzione dei rimanenti numeri introdotti.

Secando tutto con uno S_{r-1} e applicando formole note (di Veronese) che risultano anche dalle nostre del n° 18 si ottiene:

$$\mu'_0 = n_1\, n_2 \cdots n_{r-2} - \mu_0\,, \qquad \mu'_1 = \mu_1 + (n_1\, n_2 \cdots n_{r-2} - 2\,\mu_0) \sum_1^{r-2}{}_i\,(n_i - 1),$$

$$\varepsilon_0 = \mu_0\, \Sigma\,(n_i - 1) - \mu_1\,.$$

(46) Abbiamo citato nell'introduzione le *Vorlesungen über die Algebra* di Salmon-Fiedler, e abbiamo già detto che il metodo seguito in questo trattato non esaurisce la questione, giacchè si suppone che le superficie di cui si parla siano definite ciascuna come completa intersezione di $r-2$ forme.

La Jacobiana delle $r-2$ forme F e di uno S_{r-4} generico Ω, ossia il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto alle F s'incontrano in un medesimo punto di Ω, è una M_{r-2} di ordine:

$$\sum (n_1 - 1)(n_2 - 1) \quad (47).$$

Essa incontra la superficie Φ nei ν_2 punti di contatto dei piani tangenti di Φ appoggiati ad Ω, e negli X punti di contatto degli S_3 appoggiati ad Ω e tangenti comuni alle F in punti di C. Cosicché:

$$X + \nu_2 = \mu_0 \sum (n_1 - 1)(n_2 - 1),$$

donde:

$$X = \mu_0 \sum (n_1 - 1)(n_2 - 1) - \nu_2 .$$

Analogamente:

$$X + \nu_2' = \mu_0' \sum (n_1 - 1)(n_2 - 1),$$

e quindi, sostituendo in questa l'espressione di X, verrà:

$$\nu_2' = \nu_2 + (n_1 n_2 \cdots n_{r-2} - 2\mu_0) \sum (n_1 - 1)(n_2 - 1) \quad (48).$$

Consideriamo ora la curva Γ luogo dei punti di contatto dei piani tangenti a Φ appoggiati a un dato Π_{r-3}, e lo Jacobiano Ψ delle F e di uno S_{r-3}, β (determinante funzionale delle F e di tre iperpiani indipendenti per β), ossia il luogo dei punti in cui iperpiani polari rispetto alle F si tagliano in punti di β.

Questo Jacobiano è d'ordine $\sum (n_1 - 1)$, e passa semplicemente per C, giacché nei punti di C v'è dipendenza lineare fra gli iperpiani tangenti alle F. Esso dunque seca Γ in $\mu_1 \sum (n_1 - 1)$ punti, dei quali alcuni cadono nei punti comuni a Γ e a C, e son tanti quant'è la classe d'immersione di C in Φ, e gli altri son punti di contatto dei piani tangenti a Φ che si appoggiano a Π e a β. Facendo incidere Π e β secondo uno S_{r-4}, otterremo, quali piani tangenti

(47) Ved. al n° 15.

(48) Pel caso più generale in cui nello S_r si hanno $r-h$ forme, di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_{r-h}$, che si secano secondo una varietà generale Φ_h $(2h < r)$ d'ordine μ_0, e ulteriormente secondo una Φ_h' di ordine μ_0' avente con Φ comune una C_{h-1}, dicendo X l'ordine della M_{2h} degli S_{h+1} tangenti comuni alle forme stesse in punti di C, e ν_h l'ultimo ceto di Φ, ν_h' l'ultimo ceto di Φ', con la considerazione della M_{r-h} luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto alle date forme si appoggiano in un punto a un dato S_{r-2h}, si ha subito:

$$X + \nu_h = \mu_0 \sum (n_1 - 1) \cdots (n_h - 1)$$

$$X + \nu_h' = \mu_0' \sum (n_1 - 1) \cdots (n_h - 1),$$

dalle quali:

$$\nu_h' = \nu_h + (n_1 n_2 \cdots n_{r-h} - 2\mu_0) \sum (n_1 - 1) \cdots (n_h - 1).$$

Lo stesso ragionamento applicato alle sezioni lineari delle varietà Φ, Φ', C, permette di assegnare i ceti successivi di Φ' in funzione dei ceti di Φ e degli ordini delle forme date.

a Φ appoggiati a Π e a β, o quelli che si appoggiano allo S_{r-4} comune a Π e a β, e sono ν_2, oppure quelli che incontrano lo S_{r-2} congiungente secondo una retta, e sono μ_2. Per cui:

$$\mu_2 + \nu_2 + x_1 = \mu_1 \sum (n_1 - 1), \tag{1}$$

donde:

$$x_1 = \mu_1 \sum (n_1 - 1) - \mu_2 - \nu_2 .$$

Similmente:

$$\mu'_2 + \nu'_2 + x'_1 = \mu'_1 \sum (n_1 - 1). \tag{2}$$

Lo Jacobiano Ψ, considerato or ora, taglia Φ già in C e altrove in una curva C', la quale è evidentemente il luogo dei punti di contatto dei piani tangenti a Φ che si appoggiano a β. E dunque nei punti comuni a C e C' il piano tangente a Φ appoggiasi a β; tali punti son pertanto in numero di x_1. D'altronde le formole del n° 18 permettono di calcolare il numero dei punti comuni a C e C', in funzione dei caratteri di C, Φ, Ψ, sotto la forma:

$$x_1 + \varepsilon_0 \{ \sum (n_1 - 1) - 1 \} - \varepsilon_1 ,$$

dappoiché la classe di immersione di C in Ψ è $\varepsilon_0 \{ \sum (n_1 - 1) - 1 \}$. Sarà perciò

$$x_1 + \varepsilon_0 \{ \sum (n_1 - 1) - 1 \} - \varepsilon_1 = x_1 ,$$

da cui:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 (\sum n_1 - r + 1).$$

Se poi accoppiamo due punti P, P' di uno S_{r-2} quando per P passa il piano tangente a Φ in un punto di C e per P' il piano tangente a Φ' nello stesso punto, applicando alle ∞^1 coppie P, P' il principio di corrispondenza, avremo:

$$\varepsilon_1 + X = x_1 + x'_1 ,$$

e questa, giacché ormai si conoscono ε_1, X, x_1, permette di calcolare x'_1.

Ma allora nella (2) comparisce la sola incognita μ'_2, che si esprimerà dunque in funzione dei caratteri delle F e di Φ.

Le formole ottenute servono ad esprimere μ'_0, μ'_1, μ'_2, ν'_2, ε_0, ε_1, x_1, x'_1, *in funzione soltanto di* μ_0, μ_1, μ_2, ν_2, n_1, n_2, $\cdots$, n_{r-2}, *cioè di numeri la cui definizione non dipende dalla considerazione simultanea di due o più forme* F.

24. Possiamo applicare le formole precedenti ad ottenere alcune superficie dei primi ordini, dello S_5, come intersezione delle forme di ordine minimo passanti per esse.

Nello S_5 vi sono due superficie del quarto ordine, irriducibili, non coniche.

a) La rigata Φ razionale normale, per la quale è:

$$\mu_0 = 4 , \qquad \mu_1 = 6 , \qquad \mu_2 = 4 , \qquad \nu_2 = 4 .$$

Per essa passano ∞^5 forme quadratiche (tante quante ne passano per la sua sezione iperpiana che è una curva normale, come segue da un teorema di Enriques), onde la si può ottenere come intersezione di tre forme quadratiche F_1, F_2, F_3. La ulteriore intersezione è una superficie Φ', i cui caratteri si desumono mercè le formole del n° precedente, e sono:

$$\mu'_0 = 4\,, \qquad \mu'_1 = 6\,, \qquad \mu'_2 = 4\,, \qquad \nu'_2 = 4,$$

ossia è un'altra rigata razionale normale.

La curva C comune a Φ e Φ' ha i caratteri:

$$\varepsilon_0 = 6\,, \qquad \varepsilon_1 = 12\,, \qquad x_1 = 10\,, \qquad x'_1 = 10.$$

b) La superficie Φ^4 del Veronese, normale nello S_5, per la quale:

$$\mu_0 = 4\,, \qquad \mu_1 = 6\,, \qquad \mu_2 = 3\,, \qquad \nu_2 = 6.$$

Per essa passano ∞^5 forme quadratiche, e quindi la si può ottenere come intersezione di 3 forme quadratiche F_1, F_2, F_3 per essa. La ulteriore intersezione è una superficie Φ', i cui caratteri sono:

$$\mu'_0 = 4\,, \qquad \mu'_1 = 6\,, \qquad \mu'_2 = 3\,, \qquad \nu'_2 = 6,$$

ossia è un'altra superficie del Veronese.

La curva C', comune a Φ e Φ', ha i caratteri:

$$\varepsilon_2 = 6\,, \qquad \varepsilon_1 = 12\,, \qquad x_1 = 9\,, \qquad x'_1 = 9.$$

Anche la Φ^5 a sezioni ellittiche, dello S_5, si può ottenere come intersezione di 3 delle ∞^4 quadriche passanti per essa. I suoi caratteri sono:

$$\mu_0 = 5\,, \qquad \mu_1 = 10\,, \qquad \mu_2 = 12\,, \qquad \nu_2 = 8,$$

e quindi la ulteriore intersezione è una Φ'^3, i cui caratteri sono:

$$\mu'_0 = 3\,, \qquad \mu'_1 = 4\,, \qquad \mu'_2 = 3\,, \qquad \nu'_2 = 2,$$

ossia è una rigata cubica (dello S_4).

La curva C comune a Φ e Φ' ha i caratteri:

$$\varepsilon_0 = 5\,, \qquad \varepsilon_1 = 10\,, \qquad x_1 = 10\,, \qquad x'_1 = 7.$$

25. Allorquando $r-3$ forme $F_1 = 0\,, \cdots, F_{r-3} = 0$ dello S_r $(r > 4)$ passano per una superficie Φ, di caratteri μ_0, μ_1, μ_2, ν_2, in un numero finito di punti di Φ accade che gli iperpiani tangenti ad esse passano per un medesimo S_4, come abbiamo già veduto al § 3. Le formole del n° 23 permettono di ritrovare questo risultato per una via differente, che merita di esser segnalata.

Lo Jacobiano J, di ordine $\sum_1^{r-3} (n_i - 1)$, di $r-3$, $F_1, \cdots, F_{r-3}$, delle forme che consideravamo al n° 23, e di uno S_{r-4}, Ω, ossia il luogo di un punto i cui iperpiani polari rispetto ad $F_1, \cdots, F_{r-3}$ si tagliano in un mede-

simo punto di Ω, interseca la curva C comune alle due parti Φ, Φ' secondo cui si tagliano le forme $F_1, \cdots, F_{r-3}, F_{r-2}$, passanti per Φ, negli X punti di contatto degli S_3 tangenti comuni alle F in punti di C, che si appoggiano ad Ω; ma ci saranno *in generale* altre intersezioni, perché, se così non fosse, sarebbe:

$$X = \varepsilon_0 \sum_1^{r-3} (n_i - 1).$$

Allora, considerando invece delle $r-3$ forme $F_1, \cdots, F_{r-3}$ le forme $F_2, \cdots, F_{r-2}$, e formando il determinante funzionale di queste e di 4 iperpiani indipendenti per Ω, avremmo pure:

$$X = \varepsilon_0 \sum_2^{r-2} (n_i - 1),$$

e quindi dovrebbe essere:

$$n_1 = n_{r-2},$$

mentre, per essere la forma F_{r-2} arbitraria fra quelle passanti per Φ, si può supporre che il suo ordine sia diverso da n_1.

Le rimanenti δ intersezioni di J e C proverranno da quei punti di C in cui gli iperpiani tangenti a $F_1, \cdots, F_{r-3}$ son linearmente dipendenti, perché i punti comuni ad J e C nei quali gli iperpiani tangenti alle forme suddette sono indipendenti, figurano precisamente fra le intersezioni precedenti. Si avrà dunque:

$$X + \delta = \varepsilon_0 \sum_1^{r-3} (n_i - 1).$$

E poiché (n° 23):

$$X = \mu_0 \sum_1^{r-2} (n_1 - 1)(n_2 - 1) - \nu_2, \qquad \varepsilon_0 = \mu_0 \sum_1^{r-2} (n_i - 1) - \mu_1,$$

sostituendo e riducendo verrà:

$$\delta = \mu_0 \left[\sum_1^{r-3} (n_i - 1)\right]^2 - \mu_1 \sum_1^{r-3} (n_i - 1) - \mu_0 \sum_1^{r-3} (n_1 - 1)(n_2 - 1) + \nu_2,$$

ossia:

$$\delta = \mu_0 \sigma_2 - \mu_1 \sigma_1 + \nu_2,$$

ove σ_1 sta, come al solito, per la somma di $n_1 - 1$, $n_2 - 1 \ldots$, $n_{r-3} - 1$, e σ_2 per la somma dei prodotti degli stessi numeri combinati a 2 a 2 con ripetizione.

Così, ad esempio, una M_3 dello S_5 completa intersezione di due quadriche, è obbligata ad avere sopra una Φ^4 del Veronese, per cui passi, sei punti doppi; se la suddetta M_3 passa per una Φ^4 rigata razionale dello S_5, essa ha su questa quattro punti doppi; ecc. ecc.

26. Quanto al problema più generale di trovare i legami che corrono fra i caratteri di due superficie F, F', che insieme costituiscano la completa intersezione di una V_k e di una $V_{k'+2}$ nello S_r ($r = k + k'$), del quale problema abbiamo trattato dei casi ai nn. precedenti, nell'applicare il metodo sintetico quasi sempre seguito, avremmo dovuto considerare il numero dei punti della superficie F (o di F') tali che uno S_k tangente a V in ciascuno di essi si appoggi ad un dato S_{r-k-1}, mentre uno $S_{k'+2}$ tangente a V' nello stesso punto si appoggia a un dato S_{k-3}. Il luogo dei punti di contatto degli S_k tangenti a V in punti di F e appoggiati al dato S_{r-k-1} è una curva Γ il cui ordine è un carattere d'immersione di F in V, e così il luogo dei punti di contatto degli $S_{k'+2}$ tangenti a V' in punti di F e appoggiati al dato S_{k-3} è una curva Γ' il cui ordine è un carattere d'immersione di F in V'.

Il numero di cui poco fa parlavamo, uguaglia il numero dei punti comuni a Γ e Γ'; e dunque, volendo risolvere il problema nel senso precisato in principio, bisognerebbe sapere esprimere questo numero in funzione di caratteri la cui definizione non dipendesse dalla considerazione simultanea di Γ e Γ', la quale equivarrebbe alla considerazione simultanea di V e V'. Perciò bisognerebbe poter profittare di un teorema, analogo a quello di Bézout per le curve piane, e che potremmo chiamare il *teorema di Bézout per gli spazî non lineari*. Si tratterebbe nel caso attuale di cercare un sistema di caratteri intrinseci delle due curve Γ e Γ' (cioè caratteri delle due curve in relazione con gli ambienti lineari in cui esse sono immerse), di caratteri di F, e di caratteri (d'immersione) di Γ, Γ', definibili considerando *separatamente* ognuna delle due curve in relazione con la F, su cui esse son tracciate, in guisa che col *solo* mezzo di essi si potesse esprimere il numero dei punti comuni a Γ e Γ', Un teorema di questa natura è ben noto sulle rigate.

Più in generale, la risolvibilità di tutti i problemi sulle intersezioni (appartenenti alla 2ª e alla 3ª classe) nel senso precisato in principio, almeno applicando metodi analoghi a quelli usati in questo lavoro, dipende dalla conoscenza del teorema di Bézout negli spazî non lineari, e ci sembra che questo sia il campo verso il quale dovrebbe dirigere i suoi sforzi chi volesse continuare ad approfondire le importanti questioni, alle quali questa Memoria porta un primo contributo.

CAPITOLO QUARTO

§ 11. – Numero dei punti in cui si secano due varietà convenientemente estese fuori di una curva per cui esse passino con molteplicità date.

27. La curva C, di ordine μ_0 e classe μ_1, sia s–pla (ordinaria) per V_k e s'–pla per $V_{k'}$ ($k + k' = r$); z_1 e z'_1 siano rispettivamente le classi d'immersione di C in V e V' (ved. al nº 9). Diciamo ancora ϱ_0 e ϱ_1 l'ordine e la prima classe di V, e ϱ'_0, ϱ'_1 i caratteri analoghi di V'. Le due varietà abbiano singolarità qualunque, ma siano in posizione generica nel senso che in un punto qualunque di C uno S_k ed uno $S_{k'}$ tangenti rispettivamente a V e V', non giacciano in uno

stesso S_{r-2} e fuori di C esse si taglino solamente in un numero finito N di punti. Si vuole esprimere N in funzione dei caratteri definiti di V, V', C.

Il prof. Pieri nella, Nota di Palermo già citata, stabilisce una proposizione, di cui è caso particolare la seguente:

Le due varietà V e V', di cui sopra, si tagliano fuori di C in

$$\varrho_0\,\varrho_0' - \mu_0\,ss' - X$$

punti, ove X denota la classe dell'inviluppo degli iperpiani tangenti comuni a V e V' in punti di C.

Ma questa proposizione non risolve, dal nostro punto di vista, il problema che ci siamo proposti, giacché nella espressione di N comparisce il numero X, che si definisce considerando insieme V e V'; ma è facile trovare una espressione di X in funzione dei numeri introdotti prima.

Se da un punto generico O dello spazio proiettiamo tutto in uno S_{r-1}, e denotiamo con lettere minuscole le proiezioni degli enti che oggettivamente denotavamo con lettere maiuscole, le due varietà v e v' si tagliano in una curva c, s–pla per l'una, s'–pla per l'altra, la quale incontra l'ulteriore intersezione c' in quei punti in cui uno S_k tangente a v e uno $S_{k'}$ tangente a v' giacciono in uno stesso S_{r-2}; che sono le proiezioni dei punti di contatto degli iperpiani tangenti comuni a V e V' passanti pel centro di proiezione O. E quindi in virtù della formola (1) stabilita al nº 18, avremo:

$$X = z_1\,s' + z_1'\,s - \mu_1\,ss'.$$

Sostituendo nella precedente espressione di N, verrà:

$$N = \varrho_0\,\varrho_0' - \mu_0\,ss' - z_1\,s' - z_1'\,s + \mu_1\,ss',$$

e questa relazione è della forma che noi desideravamo [49].

§ 12. – Caratteri della curva in cui si secano r — 1 forme dello S_r $(r > 2h)$ fuori di una M_h per cui passano. Numero dei punti in cui si secano r forme fuori di una M_h ad esse comune [50].

28. Se $h = 1$ i problemi di cui ora ci vogliamo occupare sono risoluti, con quel grado di generalità che qui si otterrà per h qualunque, nella ben nota Memoria del prof. Veronese.

(49) Se, nell'ipotesi speciale $s = s' = 1$, s'introduce il carattere d'immersione λ di C in V, cioè il numero degli S_{r-k-1} per un dato S_{r-k-2} appoggiati a C e altrove a V, e il carattere λ' analogo di C in V', supposto poi che C abbia posizione generica in V e V', avremo:

$$N = \varrho_0\,\varrho_0' - \mu_0\,(\varrho_0 + \varrho_0' - 1) + \mu_1 + \lambda + \lambda',$$

la quale, quando $r = 4$, $k = 2$, riducesi ad una delle formole date dal Caporali nei Frammenti citati.

(50) Nel citato trattato di Salmon-Fiedler, i problemi di cui ci occupiamo in questo paragrafo sono risoluti *nel caso* $h = 1, 2$, se la M_h comune alle forme delle quali si studia lo intersecarsi *è completa intersezione di forme*. Nei frammenti del Caporali (per lo S_4) il problema nel caso $h = 2$ è trattato in modo che, se pur fosse condotto a termine, la risoluzione non sarebbe valida che in casi particolarissimi.

Se $h = 2$, ormai senza alcuna difficoltà, in virtù dei risultati a cui siamo pervenuti nei paragrafi precedenti, potremo assegnare l'ordine ε'_0 e la classe ε'_1 (51) della curva C' in cui si secano le forme $F_1, \cdots, F_{r-2}, F_{r-1}$, di ordini rispettivi $n_1, n_2, \cdots, n_{r-1}$, fuori di una superficie Φ generale, di ordine μ_0, classi μ_1, μ_2, 2^0 ceto ν_2, per cui esse passano, e il numero d dei punti d'appoggio di C' su Φ.

Infatti le $r-2$ forme $F_1, \cdots, F_{r-2}$, fuori di Φ, si secano in una superficie Φ' che ha comune con Φ una curva C, e di Φ' e di C abbiamo imparato a calcolare i caratteri al n° 23. Conservando, per indicare i caratteri di Φ' e di C, le stesse notazioni di tale n°, e applicando, per trovare i caratteri della ulteriore intersezione C' della forma F_{r-1} e della superficie Φ', le formole del n° 18, avremo.

$$\varepsilon'_0 = \mu'_0 n_{r-1} - \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon'_1 = n_{r-1}(n_{r-1} - 1)\mu'_0 + n_{r-1}\mu'_1 + \varepsilon_1 - 2x'_1 - 2\varepsilon_0(n_{r-1} - 1),$$

$$d = x'_1 + \varepsilon_0(n_{r-1} - 1) - \varepsilon_1,$$

dalle quali, applicando le formole del n° 23, si traggono le:

$$\varepsilon'_0 = n_1 n_2 \cdots n_{r-1} - \mu_0 \sum_1^{r-1}(n_1 - 1) + \mu_1 - \mu_0,$$

$$\varepsilon'_1 = \left[n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + 3\mu_1 - \mu_0\left(\sum_1^{r-1} n_1 - r + 2\right)\right]\sum_1^{r-1}(n_1 - 1) -$$

$$- 2\mu_0 \sum_1^{r-1}(n_1 - 1)(n_2 - 1) - 2\mu_2,$$

$$d = \mu_0 \sum_1^{r-1}(n_1 - 1)(n_2 - 1) - \mu_1 \sum_1^{r-1}(n_1 - 1) + \mu_2 \text{ (52)}.$$

29. Se poi per la superficie Φ, di ordine μ_0, classi μ_1, μ_2, 2^0 ceto ν_2, passano r forme $F_1, \cdots, F_r$ di ordini rispettivi $n_1, \cdots, n_r$, le quali altrove si taglino in un numero finito N di punti, detta ancora C' la curva in cui si secano, fuori di Φ', le forme $F_1, \cdots, F_{r-1}$, avremo evidentemente:

$$N = \varepsilon'_0 n_r - d,$$

ove ε'_0, d hanno il significato che loro abbiamo attribuito al n° precedente.

(51) Si rammenti che per noi la classe di una curva è l'ordine della sviluppabile delle sue tangenti.

(52) Qui ed in seguito, col simbolo $\sum_1^l (n_1 - 1)\cdots(n_q - 1)$ indichiamo la somma dei prodotti corrispondenti alle combinazioni semplici di classe q degli l numeri $n_1 - 1, \cdots, n_l - 1$.

Mediante i valori già trovati di ε'_0, d, dopo facili riduzioni si ottiene:

$$N=n_1 n_2 \cdots n_r - \mu_0 \sum_1^r (n_1 - 1)(n_2 - 1) + (\mu_1 - \mu_0) \sum_1^r (n_1 - 1) - \mu_0 + \mu_1 - \mu_2 .$$

30. E veniamo ora al caso generale di $r - 1$ forme $F_1, \cdots, F_{r-1}$, di ordini $n_1, \cdots, n_{r-1}$, passanti per una varietà generale Φ_h $(2h < r)$ di classi $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_h$ (μ_0 è l'ordine, o classe 0–esima) (53), e secantisi ulteriormente in una curva C', di ordine ε'_0, di classe ε'_1, appoggiata a Φ in d punti. Supponendo che le forme F non abbiano sopra Φ punti multipli non si viene ad imporre nessuna limitazione ai valori dei loro ordini, sempre per l'ipotesi $2h < r$ (54).

Il metodo che terremo in generale, particolarizzato per $h = 2$, darebbe *per altra via* le formole trovate ai nn. 28, 29.

Le h forme $F_1, \cdots, F_h$ si secano secondo una varietà Ψ_{r-h} passante per Φ, e le rimanenti forme secondo una varietà Ψ'_{h+1} passante pure per Φ; le due varietà Ψ e Ψ' si secano fuori di Φ lungo la curva C'. Lo S_{r-h} tangente a Ψ e lo S_{h+1} tangente a Ψ' in un punto generico di Φ son congiunti da uno spazio S_{r-h+1}; fanno eccezione i punti comuni a Φ e C', nei quali lo S_{r-h} tangente a Ψ contiene lo S_{h+1} tangente a Ψ'. *Associeremo* ad ogni spazio Σ tangente a Ψ in un punto di Φ, lo spazio Σ' tangente a Ψ' nello stesso punto: così avremo ∞^h coppie di spazî associati. Quando occorrerà nominare lo S_h comune ad una coppia generica Σ, Σ' lo indicheremo con K, e quando occorrerà nominare lo spazio congiungente della stessa coppia lo indicheremo con L.

Nel seguito il simbolo $\{i_1, i_2, \cdots, i_h\}'$ denoterà l'ordine della varietà, a $\sum i - h(r - h - 1)$ dimensioni, luogo dei punti di contatto degli S_h tangenti a Φ (spazî K) che si appoggiano a dati spazî $[i_1], \cdots, [i_2]$ $[i_h]$ secondo punti (55). Inoltre il simbolo $\{i_1, i_2, \cdots, i_h\}_1$ denoterà l'ordine della varietà, a $\sum i - h(r - h) + r + 1$ dimensioni, generata dagli spazî L relativi ai K soddisfacenti alla condizione di appoggiarsi agli spazî $[i_1], \cdots, [i_h]$.

(53) Introduciamo solamente questi caratteri di Φ, perché nella formola finale non compariranno che essi.

(54) Se fosse $2h \geq r$, il ragionamento che faremo dovrebbe subire sostanziali modificazioni, dipendenti anche dal fatto che, se Φ fosse generica fra le varietà h volte estese, di classi $\mu_0, \cdots, \mu_h$, essa avrebbe una M_{2h-r} di punti doppi che sarebbero pure tali per ciascuna delle F; e inoltre le F avrebbero, ciascuna, una M_{2h-r} doppia in punti semplici di Φ (ved. al § 3).

(55) L'ordine $\{i_1, i_2, \cdots, i_h\}'$ potrà esprimersi come una somma di *caratteri* di Φ, di quelli definiti al § 1, giacchè, come risulta dalla soluzione del problema delle caratteristiche per gli spazî lineari, la condizione a cui si assoggetta un $[h]$ imponendogli di appoggiarsi in punti a dati spazi, si esprime mediante una somma di condizioni fondamentali. In ogni caso numerico l'effettiva espressione di $\{i_1, i_2, \cdots, i_h\}'$, in funzione dei caratteri di Φ, potrà ottenersi coi procedimenti indicati dal Pieri nella prima delle Note citate; ma a noi non occorre.

Secando le ∞^h coppie Σ , Σ' con un generico Ω_{r-h-1} e chiamando corrispondenti due punti A , A' di Ω quando giacciono rispettivamente in un Σ e in un Σ' associato, poiché sono ∞^h i punti A' e ad ognun d'essi rispondono ∞^{r-2h-1} punti A, avremo ∞^{r-h-1} coppie A , A'.

In questa varietà di coppie c'è una M_{h-1} di coincidenze, costituita dalla sezione con Ω della M_{2h} delle tangenti di Φ. Ad ogni punto di tale varietà di coincidenze sono annesse infinite *rette principali* (contenenti due punti A , A' infinitamente vicini), le quali fanno stella attorno a quel punto, nello spazio S_{r-2h} traccia su Ω dello spazio L relativo a quella coincidenza. Vi sono poi d coincidenze isolate (perfette) nei punti d'appoggio su Ω di quegli spazî Σ' che giacciono nei Σ associati.

Calcoliamo lo i-esimo indice della varietà di coppie A , A', ossia il numero delle coppie il cui A giace in un dato $[i]$ mentre A' giace in un dato $[r-h-1-i]$. Anzitutto, poiché i punti A' sono ∞^h, saranno nulli tutti gli indici corrispondenti a valori di i più grandi di h; dovrà dunque essere $0 \leq i \leq h$.

Il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto a $F_1, \cdots, F_h$ s'incontrano in un punto del dato $[i]$ è una M_{r-h+i} di ordine $\sum_1^h (n_1 - 1) \cdots (n_{h-i} - 1)$ (56) e, similmente, il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto a $F_{h+1}, \cdots, F_{r-1}$ s'incontrano in un punto del dato $[r-h-1-i]$, è una M_{r-i} di ordine $\sum_{h+1}^{r-1} (n_{h+1} - 1) \cdots (n_{h+i} - 1)$.

Le due varietà nominate e la Φ, si tagliano in un numero finito:

$$\mu_0 \sum_1^h (n_1 - 1) \cdots (n_{h-i} - 1) \sum_{h+1}^{r-1} (n_{h+1} - 1) \cdots (n_{h+i} - 1)$$

di punti. La somma degli indici è dunque uguale a

$$\mu_0 \sum_0^h {}_i \left\{ \sum_1^h (n_1 - 1) \cdots (n_{h-i} - 1) \sum_{h+1}^{r-1} (n_{h+1} - 1) \cdots (n_{h+i} - 1) \right\} =$$

$$= \mu_0 \sum_1^{r-1} (n_1 - 1)(n_2 - 1) \cdots (n_h - 1) \quad (57).$$

(56) Ved. al n° 15. Mi preme, per un'osservazione che farò dopo, di notare che questo ordine si può determinare con procedimenti geometrici del tutto indipendenti da quelli di Roberts, come ha mostrato il prof. Pieri nella Nota: *Sull'ordine della varietà generata da più sistemi lineari omografici*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, II (1897), pp. 58-63.

(57) L'identità

$$\sum_0^h {}_i \left\{ \sum_1^h (n_1 - 1) \cdots (n_{h-i} - 1) \sum_{h+1}^{r-1} (n_{h+1} - 1) \cdots (n_{h+i} - 1) \right\} = \sum_1^{r-1} (n_1 - 1) \cdots (n_h - 1),$$

della quale si fa uso nel testo, si prova nel modo seguente. Per un dato valore di i, moltiplicando le due somme $\sum_1^h$ e $\sum_{h+1}^{r-1}$ si otterranno $\binom{h}{h-i}\binom{r-h-1}{i}$ prodotti distinti, conte-

Ora calcoleremo lo i_1–esimo rango della varietà di coincidenze ossia il numero dei punti di un S_{i_1}, preso entro Ω, in cui coincidono due punti A , A' in guisa che la loro congiungente si appoggi a un dato $S_{r-h-1-i_1}$, pure entro Ω. Siccome le coincidenze sono ∞^{h-1}, saran nulli i ranghi corrispondenti a valori di i_1 più piccoli di $r-2h$; dovrà dunque essere $r-2h \leq i_1 \leq r-h-1$.

Per $i_1 = r-h-1$, verremo a considerare i punti di Ω in cui avviene una tal coincidenza A , A', che una retta principale relativa ad essa passi per un dato punto; e detti punti di Ω saranno i d in cui avvengono coincidenze isolate, eppoi i punti della M_{h-1} di coincidenze dai quali escono rette principali passanti pel dato punto. Il numero di tali punti non è altro che l'ordine $\{r-h-1\ ,\ r-h\ ,\cdots,\ r-h\}_1$ della varietà, ad r dimensioni come luogo di punti, costituita dagli spazî L relativi agli spazi K appoggiati ad Ω.

Lo i_1–esimo rango, se $i_1 < r-h-1$, è poi semplicemente espresso dall'ordine $\{i_1\ ,\ r-h\ ,\cdots,\ r-h\}_1$ della varietà degli L relativi ai K, che si appoggiano a un dato S_{i_1}.

Sicché [58]:

$$(1)\qquad d + \sum_{r-2h}^{r-h-1}{}_{i_1} \{i_1\ ,\ r-h\ ,\cdots,\ r-h\}_1 =$$

$$= \{r-h\ ,\ r-h\ ,\cdots,\ r-h\}' \sum_{1}^{r-1} (n_1 - 1)\cdots(n_h - 1).$$

Questa relazione, in cui comparisce d, non risolve da sola il problema della determinazione del numero d, nel senso da noi richiesto, perché in essa compaiono i numeri $\{i_1\ ,\ r-h\ ,\cdots,\ r-h\}_1$ la cui definizione implica la considerazione simultanea di tutte le F. Nel n° successivo stabiliremo altre relazioni che permettono il calcolo del numero d sotto la forma desiderata.

31. Le coppie Σ , Σ', relative agli spazî K appoggiati a spazî dati Ω_{i_1} , Ω_{i_2} ,$\cdots$, Ω_{i_s}, in numero $s \leq h$, e dimensioni, minori di $r-h$, indicate

nenti ciascuno h fattori tutti differenti, del tipo $n_1 - 1$. Che poi uno dei prodotti di h fattori che si ottengono per il valore i, non possa essere uguale ad uno dei prodotti analoghi ottenuti per valore diverso i', risulta dal fatto che nel primo prodotto saranno contenuti $h-i$ fattori presi dalla successione $n_1 - 1$, $n_2 - 1$,$\cdots$, $n_h - 1$; mentre nei prodotti corrispondenti al valore i' ce ne saranno contenuti $h-i'$. Dunque il primo membro della relazione di cui s'è fatto uso, contiene $\sum_0^h{}_i \binom{h}{h-i}\binom{r-h-1}{i}$ prodotti differenti di h diversi fattori scelti nella successione $n_1 - 1$, $\cdots$, $n_{r-1} - 1$; siccome, notoriamente, $\sum_0^h{}_i \binom{h}{h-i}\binom{r-h-1}{i} = \binom{r-1}{h}$, il primo membro suddetto uguaglierà la somma dei prodotti analoghi ad $(n_1 - 1)\cdots(n_h - 1)$, corrispondenti alle combinazioni semplici di classe h degli indici 1 ,$\cdots$, $r-1$.

(58) PIERI, Ved. nota (8). — Si noti che nella formola del testo, per renderla dello stesso tipo di altre che troveremo poi, si è scritto $\{r-h\ ,\cdots,\ r-h\}'$ invece di μ_0.

dagli indici, quando sia

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_s \geq s\,(r - h) - h,$$

sono in numero $j_s = h + i_1 + i_2 + \cdots + i_s - s\,(r - h)$ volte infinito.

Sechiamo questa varietà ∞^{j_s} di spazî associati Σ, Σ' con un generico spazio Ω, ad $r - h - 1$ dimensioni, e chiamiamo omologhi due punti A, A' di Ω quando per essi passano rispettivamente un Σ e un Σ' associati della varietà ∞^{j_s}. Giacché i punti A' sono ∞^{j_s} e ad ogni punto A' rispondono ∞^{r-2h-1} punti A, le coppie A, A' saranno in numero $j_s + r - 2h - 1$ volte infinito. Nell'insieme delle coppie A, A', se $j_s \geq 1$, si trova una varietà Λ, di dimensione $j_s - 1$, costituita da coincidenze, che sono i punti in cui Ω seca la varietà dei K già appoggiati a $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_s}$. Di coincidenze isolate non ve ne sono, se gli spazî $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_s}$ furono assunti genericamente. Le coincidenze mancano del tutto se, come può darsi, $j_s = 0$.

Consideriamo dapprima il caso più semplice $j_s = 0$. L'ordine $\{i_1, \cdots, i_s, r - h, \cdots, r - h\}_1$ della varietà degli L relativi agli spazî K appoggiati a $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_s}$, uguaglia in tal caso il numero degli spazî L suddetti, il qual numero non è altro, evidentemente, se non il numero dei K appoggiati a $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_s}$. Dunque, se $j_s = 0$:

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_s, r - h, \cdots, r - h\}_1 = \{i_1, i_2, \cdots, i_s, r - h, \cdots, r - h\}'.$$

Osserviamo ancora che, se fosse $s = h$, dovrebbe certamente aversi:

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_s = r - h - 1.$$

Infatti, se gli spazî $\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \cdots, \Omega_{i_s}$ hanno da essere, come si è supposto, di dimensione minore di $r - h$, ciascuno di essi imporrà una qualche condizione ai K obbligati ad incontrarlo; ora questa condizione non potrà esser che semplice, giacché i K sono ∞^h, e quindi ognuno degli spazî suddetti non potrà essere meno che $r - h - 1$ volte esteso. Se $s = h$ sarà perciò soddisfatta la condizione $j_s = 0$, e in conseguenza sarà:

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}_1 = \{i_1, i_2, \cdots, i_s\}'.$$

Pensiamo ora al caso $j_s > 0$, e, *conseguentemente*, $s < h$. Dato uno spazio $[h - j_s - 1]$ di Ω (si noti che la cosa ha senso perché $h \geq j_s + 1$) si proiettino le coppie A, A' da quello sopra uno spazio duale Ω' (di dimensione $j_s + r - 2h - 1$). Ivi avremo, come proiezioni delle coppie A, A', $\infty^{j_s+r-2h-1}$ coppie A_1, A'_1, con una varietà di coincidenze Λ_1, proiezione di Λ; e le rette principali relative ai punti di Λ_1 saranno le proiezioni delle rette principali relative ai punti di Λ, le quali ultime sono ∞^{r-2h-1} per ogni punto di Λ e formano una stella nella S_{r-2h} traccia su Ω dello spazio L relativo a quel punto. Eppoi nella varietà di coppie A_1, A'_1 ci saranno delle coincidenze isolate, in numero di $\{i_1, i_2, \cdots, i_s, r - h, \cdots, r - h\}_1$, corrispondenti alle rette AA' appoggiate al centro di proiezione.

Il numero delle coppie A_1 , A_1' il cui punto A_1 giace in un dato $[i]$ mentre A_1' giace in un dato $[j_s + r - 2h - 1 - i]$, uguaglia il numero delle coppie A , A' il cui punto A giace in un dato $[h - j_s + i]$ mentre A' giace in un dato $[r - h - 1 - i]$.

Siccome i punti A' sono ∞^{j_s}, se non vogliamo ottenere indici nulli dovremo supporre $j_s + r - h - i - 1 \geq r - h - 1$; quindi $0 \leq i \leq j_s$. Il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto a $F_1, \cdots, F_h$ incontrano il dato $[h - j_s + i]$ in un punto, è una M_{r-j_s+i} di ordine $\sum_1^h (n_1 - 1) \cdots (n_{j_s-i} - 1)$; e il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto alle forme $F_{h+1}, \cdots, F_{r-1}$ s'incontrano in un punto del dato $[r - h - 1 - i]$, è una M_{r-i} di ordine $\sum_{h+1}^{r-1} (n_{h+1} - 1) \cdots (n_{h+i} - 1)$. Queste varietà e la varietà d'ordine $\{i_1, i_2, \cdots, i_s, r-h, \cdots, r-h\}'$ e di dimensione j_s, luogo dei punti di contatto su Φ dei K appoggiati a $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_s}$, hanno comune un numero finito:

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_s, r-h, \cdots, r-h\}' \sum_1^h (n_1 - 1) \cdots (n_{j_s-i} - 1) \sum_{h+1}^{r-1} (n_{h+1} - 1) \cdots \cdots (n_{h+i} - 1)$$

di punti; tale è l'i–esimo indice della varietà di coppie A_1 , A_1'. Sicché la somma degli indici è:

$$\sum_0^{j_s} i \left[\{i_1, \cdots, i_s, r-h, \cdots, r-h\}' \sum_1^h (n_1 - 1) \cdots (n_{j_s-i} - 1) \sum_{h+1}^{r-1} (n_{h+1} - 1) \cdots \cdots (n_{h+i} - 1) \right] = \{i_1, i_2, \cdots, i_s, r-h, \cdots, r-h\}' \sum_1^{r-1} (n_1 - 1) \cdots (n_{j_s} - 1).$$

Lo i–esimo rango della varietà di coincidenze, ossia il numero dei punti di un dato $[i]$ in cui coincidono due punti A_1 , A_1' in modo che la loro congiungente incontri un dato $[j_s + r - 2h - 1 - i]$, poiché A_1 è di dimensione $j_s - 1$, sarà nullo se $i < r - 2h$; se poi:

$$r - 2h \leq i \leq j_s + r - 2h - 2,$$

uguaglierà il numero dei punti di un dato $[h - j_s + i]$ in cui coincidono due punti A , A' in guisa che la loro congiungente incontri un dato $[r - h - 1 - i]$, il qual numero si vede subito non essere altro che l'ordine $\{i_1, i_2, \cdots, i_s, h - j_s + i, r-h, \cdots, r-h\}_1$ della varietà degli L relativi agli spazî K appoggiati a $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_s}$ e al dato $[h - j_s + i]$. E infine lo $(j_s + r - 2h - 1)$–esimo rango, che è l'unico non nullo quando $j_s = 1$, è in ogni caso uguale a

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_s, r-h, \cdots, r-h\}_1 + \{i_1, i_2, \cdots, i_s, r-h-1, r-h, \cdots, r-h\}_1.$$

Se poniamo $h - j_s + i = i_{s+1}$, dovrà i_{s+1} variare da $r - h - j_s$ a $r - h - 1$, e avremo:

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_s, r-h, \cdots, r-h\}_1 + \\ + \sum_{r-h-j_s}^{r-h-1} i_{s+1} \{i_1, i_2, \cdots, i_s, i_{s+1}, r-h, \cdots, r-h\}_1 = \\ = \{i_1, i_2, \cdots, i_s, r-h, \cdots, r-h\}' \sum_1^{r-1} (n_1 - 1) \cdots (n_{j_s} - 1). \tag{2}$$

32. Se $s = 1$, la relazione precedente, e l'osservazione che esaurisce il caso $j_s = 0$, ci permetteranno di esprimere i numeri $\{i_1, r-h, \cdots, r-h\}_1$ che compaiono nel 1° membro della (1) (n° 30), in funzione dei numeri $\{i_1, i_2, r-h, \cdots, r-h\}_1$, $\{i_1, r-h, \cdots, r-h\}'$ e degli ordini delle F. La medesima relazione (2), insieme all'osservazione relativa al caso $j_s = 0$, per $s = 2$ permettono di esprimere i numeri $\{i_1, i_2, r-h, \cdots, r-h\}_1$ in funzione dei numeri $\{i_1, i_2, i_3, r-h, \cdots, r-h\}_1$, dei numeri $\{i_1, i_2, r-h, \cdots, r-h\}'$ e degli ordini delle F; e quindi si sapranno anche esprimere i numeri $\{i_1, r-h, \cdots, r-h\}_1$ della (1), in funzione dei numeri:

$$\{i_1, r-h, \cdots, r-h\}', \{i_1, i_2, r-h, \cdots, r-h\}', \\ \{i_1, i_2, i_3, r-h, \cdots, r-h\}_1$$

e degli ordini delle F. Così proseguendo, riusciremo ad esprimere in numeri $\{i_1, r-h, \cdots, r-h\}_1$ in funzione degli ordini:

$$\{i_1, r-h, \cdots, r-h\}', \cdots, \{i_1, \cdots, i_{h-2}, r-h, r-h\}', \\ \{i_1, \cdots, i_{h-2}, i_{h-1}, r-h\}_1$$

e degli ordini delle F.

Quanto poi ai numeri $\{i_1, \cdots, i_{h-2}, i_{h-1}, r-h\}_1$, la (2) per $s = h-1$, e la solita osservazione quando fosse $j_{h-1} = 0$, li esprimono in funzione di $\{i_1, \cdots, i_{h-1}, r-h\}'$, degli ordini delle F, e di $\{i_1, \cdots, i_h\}_1$ ove tutte le i sono minori di $r-h$. Siccome già si è visto che $\{i_1, \cdots, i_h\}_1 = \{i_1, \cdots, i_h\}'$, in conclusione i numeri $\{i_1, r-h, \cdots, r-h\}_1$ si esprimeranno mediante i numeri $\{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots, r-h\}'$, $n_1, \cdots, n_{r-1}$; ove $p = 1, 2, \cdots, h$ e le i assumono tutti i possibili valori compatibili coi legami che loro impone il ragionamento dei nn. 30, 31.

Grazie alla (1), si può allora concludere:

Il numero d può esprimersi in funzione soltanto di caratteri di Φ e degli ordini delle F.

Nei nn. seguenti si darà l'effettiva espressione di d.

33. Nella espressione di d della quale si è provata ora l'esistenza, compaiono evidentemente come coefficienti degli ordini $\{i_1, i_2, \cdots, i_p, r-h, \cdots \cdots, r-h\}'$ i numeri s_l $(l = 1, \cdots, h-1)$, il simbolo s_l indicando la somma

dei prodotti di $n_1 - 1, \cdots, n_{r-1} - 1$ combinate semplicemente ad l ad l; ci sarà poi un certo polinomio costituito dagli ordini $\{i_1, i_2, \cdots, i_p, r-h, \cdots\}'$ e indipendente dai numeri suddetti; e infine il coefficiente di s_h (somma dei prodotti di $n_1 - 1, \cdots, n_{r-1} - 1$ combinate semplicemente ad h ad h) sarà $\mu_0 = \{r-h, \cdots, r-h\}'$.

Si tratta anzitutto di vedere quale è il polinomio formato dagli ordini $\{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots, r-h\}'$, che moltiplica s_{h-l} per un dato valore di l. All'uopo bisognerà, per tutti i possibili valori di p, cercare quei numeri $\{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots\}'$ pei quali $j_p\ (= i_1 + \cdots + i_p + h - p(r-h))$ uguaglia $h-l$, giacché, come rilevasi dalla formola generale (2), ogni numero del tipo $\{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots\}'$ moltiplica s_{j_p}. Dovrà dunque essere:

$$i_1 + \cdots + i_p = p(r-h) - l,$$

ossia, siccome $i_1 = r - h - i_1', \cdots, i_p = r - h - i_p'$, $(i_1', \cdots, i_p' \geq 1)$, dovrà essere $i_1' + \cdots + i_p' = l$, il che è impossibile se $p > l$; quindi intanto $p \leq l$.

Dal modo col quale si forma l'espressione di d, risulta poi che gli ordini $\{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots, r-h\}'$ che contengono un numero impari di i (relative a spazî $\Omega_{i_1}, \cdots$ di dimensioni inferiori ad $r-h$), compaiono con coefficiente negativo e quelli che contengono un numero pari di i con coefficiente positivo. Ma dunque, il polinomio formato con gli ordini $\{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots, r-h\}'$, il quale moltiplica s_{h-l}, sarà:

$$(-1)^l [\{r-h-1, r-h-1, \cdots, r-h-1, r-h, \cdots, r-h\}' -$$
$$- \sum \{i_1, \cdots, i_{l-1}, r-h, \cdots\}' + \sum \{i_1, \cdots, i_{l-2}, r-h, \cdots\}' - \cdots$$
$$+ (-1)^l \sum \{i_1, i_2, r-h, \cdots\}' + (-1)^{l+1} \{r-h-l, r-h, \cdots, r-h\}'],$$

ove i sommatorî si estendono ordinatamente alle soluzioni delle equazioni:

$$i_1 + \cdots + i_{l-1} = (l-1)(r-h) - l, \cdots, i_1 + \cdots + i_p =$$
$$= p(r-h) - l, \cdots, i_1 + i_2 = 2(r-h) - l \ (59).$$

Similmente si vede che il polinomio formato con gli ordini $\{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots\}'$ e indipendente dalle s, è

$$(-1)^h [\{r-h-1, \cdots, r-h-1\}' - \sum \{i_1, \cdots, i_{h-1}, r-h\}' +$$
$$+ \cdots + (-1)^{h+1} \{r-2h, r-h, \cdots\}'],$$

i sommatorî essendo estesi in modo analogo.

34. Si rappresenti con $x_{h,l}$ la condizione perché un $[h]$ dello S_r incontri un dato $[r-h+l-2]$ secondo uno $[l-1]$, con $\{i_1\}$ la condizione perché un $[h]$ si appoggi a un $[i_1]$ dato, e con γ_i la condizione perché un $[h]$ sia

(59) Ora e nel numero successivo, parlando delle soluzioni delle suddette equazioni, s'intenderà di soluzioni intere e positive non superiori ad $r-h-1$. Per la piena intelligibilità di quanto s'è affermato nel testo, occorre notare che l'unica soluzione (in numeri interi e positivi minori di $r-h$) dell'equazione $i_1 + \cdots + i_l = l(r-h) - l$ è $i_1 = i_2 = \cdots = i_l = r-h-1$.

tangente a Φ in guisa che il punto di contatto giaccia in un dato $[r-i]$. Riandando alla definizione dei numeri $\mu_1, \cdots, \mu_h, \{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots\}'$, avremo:

$$\mu_l = \gamma_{h-l}\, x_{h,l}, \{i_1, \cdots, i_p, r-h, \cdots]' = \gamma_{j_p} \{i_1\}\{i_2\}\cdots\{i_p\}.$$

Applicando il procedimento ricorrente indicato dal prof. Pieri nella seconda delle Note citate sugli spazî secanti (60), avremo:

$$(\alpha) \qquad x_{h,l} = x_{h,l-1}\{r-h-1\} - x_{h,l-2}\{r-h-2\} + \cdots$$
$$+ (-1)^l \{r-h-1\}\{r-h-l+1\} + (-1)^{l+1}\{r-h-l\},$$

mediante la quale, salendo a valori sempre più alti di l, s'intuisce la formola generale:

$$(\alpha') \quad x_{h,l} = \{r-h-1\}^l - \sum \{i_1\}\{i_2\}\cdots\{i_{l-1}\} + \sum \{i_1\}\cdots\{i_{l-2}\} - \cdots$$
$$+ (-1)^l \sum \{i_1\}\{i_2\} + (-1)^{l+1}\{r-h-l\},$$

ove i sommatorî si estendono rispettivamente alle soluzioni delle equazioni:

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_{l-1} = (l-1)(r-h) - l, \cdots, i_1 + i_2 = 2(r-h) - l.$$

La validità di questa formola sarà provata quando, ammessala vera, se ne dedurrà l'altra:

$$(\alpha'') \quad x_{h,l+1} = \{r-h-1\}^{l+1} - \sum \{i_1\}\cdots\{i_l\} + \cdots + (-1)^{l+2}\{r-h-1\},$$

ove i sommatorî si estendono ordinatamente alle soluzioni delle equazioni:

$$i_1 + \cdots + i_l = l(r-h) - l - 1, \cdots, i_1 + i_2 = 2(r-h) - l - 1.$$

Come rilevasi dalla relazione (α), tenendo conto della (α'), in $x_{h,l+1}$ i prodotti di $l+1$ fattori del tipo $\{i\}$ si posson solo ottenere dal prodotto $x_{h,l}\{r-h-1\}$, e precisamente da quei termini di $x_{h,l}$ che contengono l fattori; sicché, di termini con $l+1$ fattori in $x_{h,l+1}$, c'è soltanto $\{r-h-1\}^{l+1}$. I termini con l fattori contenuti in $x_{h,l-1}$ si posson avere soltanto dai prodotti $x_{h,l}\{r-h-1\}$, $-x_{h,l-1}\{r-h-2\}$, e precisamente da quei termini di $x_{h,l}$ che contengono $l-1$ fattori, e da quelli di $x_{h,l-1}$ che ne contengono pure $l-1$. Dunque la somma dei termini con l fattori in $x_{h,l+1}$ è

$$-[\sum \{i_1\}\cdots\{i_{l-1}\}\{r-h-1\} + \{r-h-1\}^{l-1}\{r-h-2\}],$$

ove il sommatorio si estende alle soluzioni dell'equazione $i_1 + \cdots + i_{l-1} = (l-1)(r-h) - l$.

Quali sono le soluzioni dell'equazione $i_1 + \cdots + i_l = l(r-h) - l - 1$ relativa al primo sommatorio che comparisce nella (α'')?

(60) Si noti che il procedimento a cui alludiamo non ricorre alla conservazione del numero.

Siccome $i_l = r - h - i'_l\,(i'_l \geq 1)$, e inoltre $i_1 + \cdots + i_{l-1} \leq (l-1)\cdot(r-h-1)$, dovrà essere $i'_l \leq 2$, e quindi $i_l = r-h-1\,,\ r-h-2$. Se $i_l = r-h-1$, sarà $i_1 + \cdots + i_{l-1} = (l-1)(r-h) - l$; se poi $i_l = r-h-2$, sarà $i_1 + \cdots + i_{l-1} = (l-1)(r-h-1)$ e quindi necessariamente $i_1 = \cdots = i_{l-1} = r-h-1$.

Usando della (α) e della (α'), si giunge dunque alla conclusione che i termini con l fattori in $x_{h,l+1}$ dànno per somma $-\sum \{i_1\}\cdots\{i_{l-1}\}\{i_l\}$, ove il sommatorio si estende alle soluzioni dell'equazione $i_1 + \cdots + i_l = l(r-h) - l - 1$. Così proseguendo, si giunge a giustificare tutti i termini del secondo membro della (α'').

Moltiplicando simbolicamente i due membri della (α') per la condizione γ_{h-l}, avremo:

$$\mu_l = \{r-h-1\,,\cdots,r-h-1\,,r-h\,,\cdots,r-h\}' -$$
$$-\sum\{i_1\,,\cdots,i_{l-1}\,,r-h\,,\cdots\}' + \sum\{i_1\,,\cdots,i_{l-2}\,,r-h\,,\cdots\}'\cdots +$$
$$+ (-1)^{l+1}\{r-h-l\,,r-h\,,\cdots,r-h\}',$$

ove i sommatorî si estendono come nella (α'). Se ricordiamo che il 2° membro della precedente uguaglianza è il coefficiente di $(-1)^l s_{h-l}$ nella espressione di d, potremo scrivere

$$d = \mu_0 s_h - \mu_1 s_{h-1} + \mu_2 s_{h-2} - \cdots + (-1)^l \mu_l s_{h-l} + \cdots +$$
$$+ (-1)^{h-1}\mu_{h-1} s_1 + (-1)^h \mu_h .$$

Da questa formola, molto semplice, dedurremo tosto con facilità le altre che risolvono i problemi di cui ci occupiamo in questo paragrafo.

35. Se per la varietà Φ, di cui finora si è discorso, oltre alle forme $F_1\,,\cdots,F_{r-1}$, passa la forma F_r, di ordine n_r, essa taglia la curva C' di ulteriore incontro di $F_1\,,\cdots,F_{r-1}$, fuori dei d punti di appoggio di C' su Φ, in N punti ove

$$N = \varepsilon'_0\, n_r - d.$$

Suppongasi d'aver provato che, se $r-1$ forme di ordini $n_1\,,\cdots,n_{r-1}$, dello S_{r-1}, passano per una varietà $h-1$ volte estesa $(2(h-1) < r-1)$ di ordine μ_0 e classi $\mu_1\,,\cdots,\mu_{h-1}$ e fuori di essa si secano in un numero finito di punti, questo numero è espresso dalla formola:

$$n_1 n_2 \cdots n_{r-1} - [\mu_0 s_{h-1} + (\mu_0 - \mu_1) s_{h-2} + (\mu_0 - \mu_1 + \mu_2) s_{h-3} - \cdots$$
$$\cdots + (\mu_0 - \mu_1 + \mu_2 - \cdots \pm \mu_{h-2}) s_1 + (\mu_0 - \mu_1 + \mu_2 - \cdots \mp \mu_{h-1})],$$

ove s_i denota la somma dei prodotti delle $n_1 - 1\,,\cdots,n_{r-1} - 1$ combinate semplicemente ad i ad i.

Allora, secando le forme $F_1\,,\cdots,F_{r-1}$, la Φ e la curva C' con un iperpiano generico si troverà che anche ε'_0 è espresso dalla formola ora scritta, e quindi sostituendo nella uguaglianza che dà N, e tenendo presente l'espressione

di d, si otterrà:

$$N = n_1 n_2 \cdots n_r - [\mu_0 s'_h + (\mu_0 - \mu_1) s'_{h-1} + (\mu_0 - \mu_1 + \mu_2) s'_{h-2} - \cdots$$
$$\cdots + (\mu_0 - \cdots \pm \mu_{h-1}) s'_1 + (\mu_0 - \cdots \mp \mu_h)],$$

ove s'_i denota la somma dei prodotti delle $n_1 - 1, \cdots, n_r - 1$ combinate semplicemente ad i ad i.

E poiché la relazione precedente è vera quando $h = 1$, si conclude:

Se r forme dello S_r, di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_r$, hanno comune una varietà generale Φ_h $(2\,h < r)$ di ordine μ_0 e classi $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h$, e fuori di questa si secano ancora in un numero finito di punti, questo numero è espresso da:

$$n_1 n_2 \cdots n_r - [\mu_0 s'_h + (\mu_0 - \mu_1) s'_{h-1} + \cdots + (\mu_0 - \mu_1 + \cdots \pm \mu_{h-1}) s'_1 +$$
$$+ (\mu_0 - \mu_1 + \cdots \mp \mu_h)],$$

ove s'_i denota la somma dei prodotti delle $n_1 - 1, \cdots, n_r - 1$ combinate semplicemente ad i ad i.

36. Consideriamo ora lo Jacobiano J delle forme $F_1, \cdots, F_{r-1}$ e di due iperpiani per uno S_{r-2} generico. Poiché gli iperpiani tangenti alle F in un punto generico di Φ appartengono ad un sistema lineare ∞^{r-h-1}, nei punti di Φ son nulli tutti i determinanti d'ordine almeno uguale ad $r - h + 1$ estratti dalla matrice:

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, r-1 \\ j = 1, \cdots, r+1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue, per la regola di derivazione dei determinanti, che nei punti di Φ saranno nulle, per tutti i possibili valori di $l_1, l_2, \cdots$, le derivate:

$$\frac{\partial^{h-2} J}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \cdots},$$

e quindi J avrà Φ come varietà $(h-1)$-pla (almeno). Nei punti comuni a Φ e C', fra gli iperpiani tangenti alle F se ne troveranno al più $r - h - 1$ indipendenti, e quindi la matrice $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\|$ avrà (al più) la caratteristica $r - h - 1$; dal che segue che sarà $\frac{\partial^{h-1} J}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \cdots} = 0$, per tutti i possibili valori di $l_1, l_2, \cdots$; ossia i punti suddetti saranno h-pli per J.

Fuori dei punti comuni a Φ e C', la forma J incontra C' in punti tali che le tangenti a C' in essi si appoggiano al dato S_{r-2}, e dunque:

$$\varepsilon'_0 \sum_1^{r-1} (n_i - 1) = \varepsilon'_1 + hd.$$

Concludendo possiamo enunciare:

Se $r - 1$ forme dello S_r, di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_{r-1}$, passano per una varietà generale Φ_h $(2\,h < r)$ di ordine μ_0 e classi $\mu_1, \cdots, \mu_h$, e fuori di essa si tagliano in una curva di ordine ε'_0, classe ε'_1, appoggiata a Φ in d punti,

le espressioni di ε'_0 , d , ε'_1 *si calcolano mediante le formole*:

$$\varepsilon'_0 = n_1 \cdots n_{r-1} - [\mu_0 s_{h-1} + (\mu_0 - \mu_1) s_{h-2} + \cdots$$
$$\cdots + (\mu_0 - \mu_1 + \cdots \pm \mu_{h-2}) s_1 + (\mu_0 - \cdots \mp \mu_{h-1})],$$
$$d = \mu_0 s_h - \mu_1 s_{h-1} + \mu_2 s_{h-2} - \cdots + (-1)^h \mu_h ,$$
$$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_0 s_1 - hd,$$

ove s_i *denota la somma dei prodotti delle* $n_1 - 1 , \cdots , n_{r-1} - 1$ *combinate semplicemente ad* i *ad* i.

37. Merita uno speciale cenno il caso particolare in cui Φ sia completa intersezione delle forme $H_1 , \cdots , H_{r-h}$, di ordini $m_1 , \cdots , m_{r-h}$, situate genericamente, in modo che Φ non abbia punti multipli. Allora le forme $F_1 , \cdots , F_{r-1}$ passanti per Φ, si potranno esprimere mediante le formole:

$$F_i \equiv A_{i1} H_1 + \cdots + A_{i,r-h} H_{r-h} \quad (61),$$

e se vogliamo che siano soddisfatte le equazioni $F_i = 0$ senza che lo siano le equazioni $H_1 = 0 , \cdots , H_{r-h} = 0$, la matrice $\| A_{ij} \| \begin{pmatrix} i = 1 , \cdots , r-1 \\ j = 1 , \cdots , r-h \end{pmatrix}$ dovrà avere la caratteristica $r - h - 1$.

Il luogo dei punti x che rendono la matrice suddetta di caratteristica $r - h - 1$ è, pel citato teorema di Roberts, dell'ordine:

$$s_h - s_{h-1} \sigma_1 + s_{h-2} \sigma_2 - \cdots + (-1)^{h-1} s_1 \sigma_{h-1} + (-1)^h \sigma_h ,$$

ove s_i denota la somma di tutti i prodotti delle $n_1 - 1 , n_2 - 1 , \cdots , n_{r-1} - 1$ combinate semplicemente ad i ad i e σ_i la somma di tutti i prodotti delle $m_1 - 1 , \cdots , m_{r-h} - 1$ combinate con ripetizione ad i ad i.

La $M_{r-h} \| A_{ij} \| = 0$ taglia Φ in un numero finito di punti, i quali apparterranno alla varietà dei punti in cui $F_1 , \cdots , F_{r-1}$ si secano fuori di Φ, ossia alla curva C'. Dunque attualmente il numero che in generale si rappresenta con d è espresso da:

$$d = m_1 m_2 \cdots m_{r-h} [s_h - s_{h-1} \sigma_1 + s_{h-2} \sigma_2 - \cdots + (-1)^h \sigma_h].$$

Introducendo l'ordine μ_0 e le classi $\mu_1 , \mu_2 , \cdots , \mu_h$ di Φ, e profittando delle formole del § 6 (che si sanno anche ottenere indipendentemente dal teorema di Roberts) avremo:

$$d = \mu_0 s_h - \mu_1 s_{h-1} + \mu_2 s_{h-2} - \cdots + (-1)^h \mu_h ,$$

che è della forma già ottenuta in generale (62).

(61) Ved. la mia Nota IX.

(62) Se non conoscessimo l'ordine φ della varietà $\| A_{ij} \| = 0$, mediante la espressione calcolata per d ai nn. precedenti, e le formole del § 6, avremmo:

$$m_1 m_2 \cdots m_{r-h} \varphi = m_1 m_2 \cdots m_{r-h} [s_h - s_{h-1} \sigma_1 + \cdots + (-1)^h \sigma_h] ,$$

donde una *dimostrazione* indiretta della formola di Roberts (sotto un aspetto algebricamente differente).

§ 13. – Numero dei punti comuni ad r forme dello S_r fuori di una M_h $(2h < r)$ per cui alcune di esse passino doppiamente e le altre semplicemente.

38. Per la varietà Φ_h $(2h < r)$ dello S_r passino doppiamente le forme $F_1, \cdots, F_p$, di ordini rispettivi $n_1, \cdots, n_p$ e semplicemente le forme $F_{p+1}, \cdots, F_r$, di ordini $n_{p+1}, \cdots, n_r$.

Fuori di Φ, le F si taglino in un numero finito di punti. Rappresenteremo con $N(h; n_1, \cdots, n_p; n_{p+1}, \cdots, n_r)$ $(p \geq 1)$ questo numero, e con $N_0(h; n_1, \cdots, n_r)$ rappresenteremo il numero, che abbiamo calcolato al paragrafo precedente, dei punti in cui si tagliano, fuori di Φ, r forme di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_r$ condotte genericamente per Φ.

È facile, mediante considerazioni geometriche semplicissime, trovare una relazione ricorrente alla quale soddisfa il numero attualmente incognito. Infatti le forme $F_1, \cdots, F_{p-1}, F_{p+1}, \cdots, F_r$ si secano, fuori di Φ, in una curva $C^{(p-1)}$, il cui ordine è espresso da:

$$N(h-1; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_{p+1}, \cdots, n_r),$$

come vedesi secando con un iperpiano generico.

Se la forma F_p passasse semplicemente per Φ, essa incontrerebbe, fuori di Φ, la curva $C^{(p-1)}$ in

$$N(h; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_p, n_{p+1}, \cdots, n_r)$$

punti e avremmo:

$$N(h; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_p, \cdots, n_r) =$$
$$= n_p N(h-1; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_{p+1}, \cdots, n_r) - d^{(p-1)},$$

ove $d^{(p-1)}$ indica il numero dei punti comuni a Φ e $C^{(p-1)}$. Se ne trae:

$$d^{(p-1)} = N(h-1; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_{p+1}, \cdots, n_r) n_p -$$
$$- N(h; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_p, \cdots, n_r).$$

Ma giacché la forma F_p passa doppiamente per Φ, delle sue intersezioni con $C^{(p-1)}$, $2d^{(p-1)}$ cadono su Φ, e si ha:

$$N(h; n_1, \cdots, n_p; n_{p+1}, \cdots, n_r) =$$
$$N(h-1; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_{p+1}, \cdots, n_r) n_p - 2d^{(p-1)},$$

dalla quale, tenendo presente l'espressione di $d^{(p-1)}$, si rileva:

$$N(h; n_1, \cdots, n_p; n_{p+1}, \cdots, n_r) =$$
$$= 2N(h; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_p, \cdots, n_r) - N(h-1; n_1, \cdots, n_{p-1}; n_{p+1}, \cdots, n_r) n_p.$$

Questa relazione, applicata per valori decrescenti di p, dà facilmente l'uguaglianza:

$$N(h\,;\,n_1,\cdots,n_p\,;\,n_{p+1},\,\cdots,\,n_r) = 2^p\,N_0(h\,;\,n_1,\cdots,n_r) -$$

$$-\sum_0^{p-1} 2^{p-i-1}\,n_{i+1}\,N(h-1\,;\,n_1,\cdots,n_i\,;\,n_{i+2},\cdots,n_r)\ ^{(63)},$$

la quale serve a risolvere il problema in ogni caso.

Così, applicando la relazione precedente, si trova per $h = 1$:

Se la curva Φ, di ordine μ_0 e classe μ_1, è doppia per le forme $F_1,\cdots,F_p$ di ordini rispettivi $n_1,\cdots,n_p$ e semplice per le forme $F_{p+1},\cdots,F_r$ di ordini rispettivi $n_{p+1},\cdots,n_r$, e inoltre fuori di Φ le r forme suddette si tagliano in numero finito di punti, questo è espresso dalla formola:

$$n_1\,n_2\cdots n_r - 2^p\,\mu_0\sum_1^r(n_i-1) + 2^{p-1}\,\mu_0\sum_1^p n_i - 2^p\,(\mu_0-\mu_1).$$

Per $h = 2$ si ha:

Se la superficie Φ, di ordine μ_0, classi μ_1 e μ_2, è doppia per le forme $F_1,\cdots,F_p$ di ordini rispettivi $n_1,\cdots,n_p$, e semplice per le forme $F_{p+1},\cdots,F_r$ di ordini rispettivi $n_{p+1},\cdots,n_r$, e inoltre fuori di Φ le r forme suddette si tagliano in numero finito di punti, questo è espresso da:

$$n_1\,n_2\cdots n_r - 2^p\,\mu_0\sum_1^r(n_1-1)(n_2-1) + 2^{p-1}(\mu_0-\mu_1)\sum_1^p n_i +$$

$$+\,2^p(\mu_1-\mu_0)\sum_1^r(n_i-1) + 2^{p-1}\,\mu_0\sum_1^p n_i\sum_{p+1}^r(n_i-1) +$$

$$+\,3.2^{p-2}\,\mu_0\sum_1^p n_1\,n_2 - 2^{p-1}(p-1)\,\mu_0\sum_1^p n_i - 2^p(\mu_0-\mu_1+\mu_2)\ ^{(64)}.$$

(63) Al simbolo $N(h-1;\,n_1,\cdots,n_i\,;\,n_{i+2},\cdots,n_r)$, quando $i = 0$, si dovrà attribuire il significato stesso del simbolo $N_0(h-1;\,n_2,\cdots,n_r)$.

(64) Svariatissime sono le applicazioni che si possono fare dei risultati contenuti in questa Memoria, specialmente alla geometria numerativa, di cui può dirsi che ogni problema è una questione d'intersezione di varietà algebriche.

Ma noi, per cagion di brevità, non ci possiamo dilungare sulle applicazioni. Vogliamo solo mostrare come la formola ultimamente ottenuta nel testo, dia facilmente la risoluzione del problema, che ha una certa importanza storica, di determinare quante coniche di un piano toccano 5 coniche date genericamente in esso.

Il numero delle coniche che soddisfanno a questa condizione, allorché si rappresentino le coniche del dato piano coi punti di uno S_5, si vede facilmente che uguaglia il numero delle intersezioni di 5 forme di 6° ordine, F_1, $F_2,\cdots,F_5$, le quali passano doppiamente per una superficie Φ^4 del Veronese. Nella formola del testo dovremo dunque fare

$$p = r = 5\,,\qquad n_1 = n_2 = \cdots = n_5 = 6\,,\qquad \mu_0 = 4\,,\qquad \mu_1 = 6\,,\qquad \mu_2 = 3.$$

Otterremo fuori di Φ:

$$6^5 - 2^5.4.5.5.10 - 2^4.2.6.5 + 2^5.2.5.5 - 2^5 + 3.2^3.4.6.6.10 - 2^4.4.4.6.5 =$$

$$= 7776 - 32000 - 960 + 1600 - 32 + 34560 - 7680 = 3264 \text{ intersezioni.}$$

Si ritrova così il numero noto delle coniche di un piano che toccano 5 coniche date.

Se vogliamo che questa formola abbracci anche i casi estremi $p = 1$, $p = r$, bisognerà porre:

$$\sum_{1}^{1} n_1 n_2 = 0 \quad , \quad \sum_{r+1}^{r} (n_i - 1) = 0 .$$

39. Seguendo lo stesso procedimento si potrebbero senza difficoltà trovare le formule che dànno il numero dei punti comuni alle forme $F_1, \cdots, F_r$, fuori di una Φ_h p_1–pla per F_1, p_2–pla per $F_2, \cdots, p_r$–pla per F. Però le espressioni che si otterrebbero sarebbero algebricamente assai complicate.

Indice della Memoria precedente

Capitolo primo

§ 1. Caratteri di una varietà algebrica . . . . . pag. 34
§ 2. Di alcune singolarità proiettive d'una varietà . . . . . » 37
§ 3. Dei punti che s'impongono ad una varietà convenientemente estesa, sopra un'altra varietà per cui la prima debba passare . . . . . » 43
§ 4. Caratteri d'immersione d'una varietà in un'altra . . . . . » 48

Capitolo secondo

§ 5. Caratteri della varietà completa intersezione di due o più altre . . . . . » 50
§ 6. Applicazione al caso di una varietà completa intersezione di forme . . . » 58
§ 7. Le classi e i ceti d'immersione d'una varietà in un'altra completa intersezione di forme . . . . . » 60

Capitolo terzo

§ 8. Le relazioni che legano i caratteri di due curve che insieme costituiscano la completa intersezione di due varietà . . . . . » 61
§ 9. Relazioni fra i caratteri di due superficie che insieme costituiscano la completa intersezione di due forme nello S_4 . . . . . » 65
§ 10. Relazioni fra i caratteri di due superficie che insieme costituiscano la completa intersezione di $r - 2$ forme dello S_r $(r > 4)$ . . . . . » 72

Capitolo quarto

§ 11. Numero dei punti in cui si secano due varietà convenientemente estese fuori di una curva per cui esse passino con date molteplicità . . . . . » 77
§ 12. Caratteri della curva in cui si secano $r - 1$ forme dello S_r $(r > 2h)$ fuori di una M_h per cui passano. Numero dei punti in cui si secano r forme fuori di una M_h ad esse comune . . . . . » 78
§ 13. Numero dei punti comuni ad r forme dello S_r fuori di una M_h $(2h < r)$ per cui alcune di esse passino doppiamente e le altre semplicemente . . . . » 91

Osservazioni complementari

Qualche asserzione della precedente Memoria deve naturalmente porsi in relazione coll'epoca in cui la Memoria vide la luce. Si tratta di asserzioni inerenti al concetto di « generico » e di altre presupponenti implicitamente la variabilità di una varietà algebrica irriducibile di un S_r lineare in una famiglia irriducibile, infinita (cui appartengono per lo meno le trasformate omografiche della data varietà). Soltanto in epoca più recente tutto ciò è stato esplicitamente precisato, secondo le moderne esigenze critiche (ved. pag. 329, nota (3) della Memoria dell'Autore: *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni per sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione*. Ann. di Mat., (4) *26* (1947), pp. 221–270). Comunque nessuna dimostrazione deve essere sottoposta a sostanziali cangiamenti e nessuna conclusione deve essere alterata.

Nel n. 7 della Memoria si attribuisce la qualifica di « generale » (si badi bene non « generica », chè qui l'attributo sarebbe fuor di luogo, mancando la precisazione di cui più sotto) ad una V_k irriducibile di S_r se è priva di punti multipli, per $2k < r$, oppure dotata di una M_{2k-r} di punti doppi improprî, se $2k \geq r$. L'esistenza di varietà « generali » deriva dall'esistenza di modelli privi di punti multipli in uno spazio superiore, modelli birazionalmente equivalenti ad una varietà comunque data: Nöther, Levi B., Zariski, Deuring). Una proiezione generica di un tal modello in S_r fornisce appunto una varietà generale. Resta tuttavia il difficile ed importante problema di sapere se in una famiglia completa irriducibile di V_k la varietà generica sia generale: questione che non è stata risoluta in tutte le ipotesi neppure per $k = 1$.

Nel n. 26 si adombrano per la prima volta le difficoltà che in più elevati problemi d'intersezione nascevano allora dalla mancanza di un teorema di Bézout sopra varietà non lineari. Sono i problemi che le ricerche successive dell'Autore, fecero rientrare nell'ambito della teoria della base (vedasi il n. 30 della memoria dell'Autore, *I fondamenti della Geometria Numerativa*, Ann. di Mat., (4) *19* (1940), pp. 153–242) della quale a quel tempo non si parlava ancora.

Il significato funzionale del gruppo dei punti doppi improprî di una M_k di S_{2k} e del gruppo dei punti doppi che una forma contenente M_k possiede in punti semplici di questa fu assegnato da M. Eger (Boll. Un. Mat. Italiana, 1936).

IX.

RAPPRESENTAZIONE DI UNA FORMA QUALUNQUE PER COMBINAZIONE LINEARE DI PIÙ ALTRE (*).

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 91 (1902), pp. 105–113 (**).

La ricerca delle condizioni perché una forma, particolarmente ternaria, si possa esprimere come combinazione lineare di altre due forme date, ha occupato molti geometri, e fra i più insigni.

Ai noti lavori, fondamentali, di Nöther, han fatto seguito altri (di Nöther stesso, di Voss, Stickelberger, Zeuthen, Bertini, Brill, ecc.) nei quali il problema fu considerato dal punto di vista puramente algebrico ed anche sotto altri aspetti.

Recentemente nei Mathematische Annalen, i quali accolsero la maggior parte dei lavori precedenti, vide la luce una breve Nota della sig.na Scott (1), nella quale è dimostrato il « *Fundamentalsatz* » di Nöther, per le forme ternarie, con mezzi molto semplici.

1. Date $h\,(\leq r)$ forme $F_1, F_2, \cdots, F_h$ delle $r+1$ variabili $x_0, x_1, \cdots, x_r$, supposto che le equazioni

$$(1) \qquad F_1 = 0, \cdots, F_h = 0, \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_h}{\partial x_0} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_h}{\partial x_r} \end{matrix} \right\| = 0$$

abbiano meno che ∞^{r-h} soluzioni comuni, trovare le condizioni necessarie e sufficienti perché una forma F, delle medesime variabili, si possa esprimere come combinazione lineare di $F_1, F_2, \cdots, F_h$; ossia affinché esistano certe forme $A_1, A_2, \cdots, A_h$ in guisa che:

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_h F_h .$$

Tale è il problema che ci occuperà nella presente Nota.

(*) Ristampato in F. SEVERI, *Memorie Scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, pp. 445–454, con la Nota (***) a piè di p. 96, aggiunta dall'Autore in quell'occasione. (N.d.R.).

(**) Nota presentata dal Socio C. Segre nella seduta del 2 febbraio 1902.

(1) *A proof of Nöther's fundamental Theorem*, Mathematische Annalen, *52* (1899) pp. 593–597.

Esso assume un aspetto geometrico quando $x_0, x_1, \cdots, x_r$ s'interpretino come coordinate omogenee di punto in uno spazio S_r. Alla totalità delle soluzioni dell'equazione $F_1 = 0$ viene a corrispondere una ∞^{r-1} di punti dello S_r, i quali diremo costituire una *ipersuperficie* (2), che denoteremo con la lettera $\boldsymbol{F}_1$; e analogamente per le equazioni $F_2 = 0, \cdots, F_h = 0$.

Mentre la forma F_1 determina $\boldsymbol{F}_1$, a questa corrispondono infinite forme che differiscono tra loro per fattori costanti.

Se in un punto comune a $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$ sono soddisfatte le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0, \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, h \\ j = 0, \cdots, r \end{pmatrix}$, quel punto o sarà multiplo per qualcuna delle $\boldsymbol{F}$, oppure in esso gli iperpiani tangenti alle $\boldsymbol{F}$ saranno linearmente dipendenti; e quindi o il punto sarà multiplo per la varietà Φ comune alle $\boldsymbol{F}$ (***), oppure apparterrà ad una varietà, più che $r - h$ volte estesa, costituita da punti comuni alle $\boldsymbol{F}$. Questa osservazione prova che se le equazioni (1) hanno meno che ∞^{r-h} soluzioni, la varietà Φ comune alle $\boldsymbol{F}$ sarà precisamente di dimensione $r - h$ e non avrà parti multiple (3), potendo del resto possedere singolarità qualunque; e viceversa. Sicché geometricamente le condizioni a cui sono assoggettate le F si traducono in ciò che *la varietà Φ è di dimensione $r - h$ e non ha parti multiple.*

2. Per rispondere alla domanda che abbiam fatto al numero precedente, ci occorreranno alcune nozioni sulla teoria dei moduli, e, per comodità del lettore, le riuniremo qui (4).

Si dice che un sistema illimitato di forme costituisce un *modulo* quando combinando linearmente un numero qualsiasi di forme del sistema si ottiene una forma di questo.

Si dimostra allora (5) che tra le forme di un modulo se ne può sempre trovare un numero finito $F_1, \cdots, F_h$, talché ogni forma F del modulo possa

(2) Non adoperiamo, come si usa anche di fare, la parola *forma* per indicare l'insieme delle soluzioni di $F_1 = 0$, e analoghe, perché *in questo lavoro* è utile non confondere la concezione della forma F_1, con la concezione della totalità de' suoi zeri.

(***) Qui, a scanso d'equivoci, è opportuno sottolineare che l'Autore si riferiva fin d'allora al concetto di molteplicità in un punto dell'interferenza di più forme, implicito nella geometria italiana, che la memoria dell'Autore: *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni per sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione* (Annali di Matematica, (4) *26* (1947), 221–270) ha reso esplicito. Il punto, cioè, può esser semplice per l'interferenza in sé considerata.

(3) Ora e nel seguito parlando di *parte* di una varietà, s'intenderà di parlare di una varietà di *ugual dimensione*, in essa contenuta.

(4) Vedasi l'importante Memoria di HILBERT, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* Mathematische Annalen, *36* (1890), pp. 473–534 od anche Gesammelte Abhandlungen, Vol. II, Springer, Berlino, 1933, pp. 199–257. Ivi si troveranno le citazioni relative ai lavori anteriori di Kronecker, Dedekind e Weber.

(5) HILBERT, *loc. cit.*, pag. 479.

esprimersi come combinazione lineare di quelle:

$$F \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h .$$

Le forme $F_1 , \cdots , F_h$ posson dirsi gli *elementi fondamentali* del modulo, che s'indicherà con $(F_1 , F_2 , \cdots , F_h)$.

Interpretando le variabili $x_0 , \cdots , x_r$ delle quali le F son funzioni, come coordinate di punti in uno S_r, avremo le ipersuperficie $\boldsymbol{F}_1 , \cdots , \boldsymbol{F}_h$ corrispondenti agli elementi fondamentali, e se c'è una varietà M comune alle $\boldsymbol{F}$ potrà chiamarsi la *varietà base* del modulo.

Considerando la totalità delle ipersuperficie passanti per M [6], verremo a considerare in corrispondenza un certo sistema di forme, il quale subito si scorge essere un modulo: bisogna però ben badare di non confondere questo modulo col modulo $(F_1 , F_2 , \cdots , F_h)$; ci saranno dei casi in cui i due moduli coincidono, ma è facile persuadersi sopra esempi, che non è sempre così.

Nella Memoria citata di Hilbert [7] si dimostra inoltre che il numero $\chi(l)$ delle condizioni indipendenti che s'impongono ad una forma d'ordine l (ai suoi coefficienti), obbligandola ad appartenere ad un certo modulo, se l è abbastanza grande, si rappresenta così:

$$\chi(l) = \chi_0 + \chi_1 \binom{l}{1} + \chi_2 \binom{l}{2} + \cdots + \chi_d \binom{l}{d},$$

ove $\chi_0 , \chi_1 , \cdots , \chi_d$ sono certi numeri indipendenti da l, caratteristici del modulo dato, del quale $\chi(l)$ si chiama la *funzione caratteristica*.

3. La questione del n. 1 è risoluta dal teorema seguente:

Se le ipersuperficie $\boldsymbol{F}_1 , \cdots , \boldsymbol{F}_h$ $(h \leq r)$ *corrispondenti alle forme* $F_1 , \cdots , F_h$ *delle* $r + 1$ *variabili* $x_0 , \cdots , x_r$, *si tagliano in una varietà di dimensione* $r - h$, *priva di parti multiple, la condizione necessaria e sufficiente perché una ipersuperficie* $\boldsymbol{F}$ *corrisponda ad una forma* F *tale che*

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_h F_h ,$$

le $A_1 , \cdots , A_h$ *essendo forme di convenienti ordini, è che* $\boldsymbol{F}$ *passi per la varietà comune ad* $\boldsymbol{F}_1 , \boldsymbol{F}_2 , \cdots , \boldsymbol{F}_h$ [8].

(6) Dicendo « ipersuperficie *passante* per M » intendiamo, come è d'uso nella geometria iperspaziale, alludere ad una ipersuperficie corrispondente ad una forma che si annulla in tutti i punti di M, senza che sia *necessariamente* soddisfatta qualche altra condizione circa l'annullarsi della forma nei punti di M.

(7) Ved. a pag. 512.

(8) Nella Memoria di HILBERT, *Ueber die vollen Invariantensysteme*, Mathematische Annalen, *42* (1892), pp. 313–373, ved. a pag. 320; oppure Gesammelte Abhandlungen, Vol. II, Springer, Berlino, 1933, pp. 287–344 si dimostra un teorema di cui è caso particolare il seguente: *Se una forma* F *di* $x_0 , x_1 , \cdots , x_r$ *si annulla per gli stessi valori delle* x *per i quali*

Insieme alla proposizione enunciata noi dimostreremo quest'altra:

La funzione caratteristica del modulo $(F_1, F_2, \cdots, F_h)$ *ove* $F_1, \cdots, F_h$ *sono* h $(\leq r)$ *forme* (*di* $r+1$ *variabili*), *rispettivamente degli ordini* $n_1, n_2, \cdots, n_h$, *alle quali corrispondono le ipersuperficie* $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$ *intersecantesi secondo una varietà* $r - h$ *volte estesa e priva di parti multiple, è*:

$$\binom{l+r}{r} - \Sigma\binom{l-n_i+r}{r} +$$

$$+\Sigma\binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + (-1)^h\binom{l-n_1-\cdots-n_h+r}{r},$$

ove i sommatori s'estendono alle combinazioni semplici di $1^a, 2^a, \cdots (h-1)^a$ *classe degli indici* $1, 2, \cdots, h$ (9).

La dimostrazione delle due proposizione antecedenti si farà simultaneamente e per induzione completa. Si osservi che l'un teorema e l'altro sono veri quando $h = 1$; perciò li avremo dimostrati in ogni caso quando, ammettendoli veri per $h - 1$ forme, di un numero qualsiasi di variabili, riusciremo a dimostrarli anche per h forme.

4. Le ipersuperficie $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$, di ordini $n_1, \cdots, n_h$ e di equazioni $F_1 = 0, \cdots, F_h = 0$, s'intersechino secondo la varietà Φ, ad $r - h$ dimensioni e senza parti multiple.

Una ipersuperficie $\boldsymbol{F}$, d'ordine l, insieme ad un iperpiano che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple, corrisponda ad una forma appartenente al modulo $(F_1, \cdots, F_h)$; allora io dico che anche *la forma* F, *corrispondente a* $\boldsymbol{F}$, *appartiene a questo modulo.*

Supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sia generico, in guisa che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple; per ipotesi la forma $x_0 F$ apparterrà allora al modulo $(F_1, \cdots, F_h)$, ossia avremo:

$$x_0 F \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h, \tag{1}$$

si annullano simultaneamente le forme $F_1, \cdots, F_h$ *delle medesime variabili, si può sempre determinare un numero intero* s *tale che* $F^s \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h$.

Nella Nota, di poco anteriore, del prof. BERTINI, *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Letterei, (2) *24* (1891), pp. 1095–1115, il numero s, di cui parla il teorema precedente, è determinato quando $h = 2$ e F_1, F_2, F son forme ternarie. Il teorema da noi dato nel testo dice che, quando $h \leq r$ e le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$ passano per meno che ∞^{r-h} zeri di $F_1, \cdots, F_h$, il numero s di Hilbert è uguale ad 1.

(9) Nella Memoria di WIRTINGER, *Untersuchungen über Thetafunktionen*, Leipzig, Teubner 1895, a pag. 20, trovasi una formola che esprime la funzione caratteristica della intersezione di una varietà, di data funzione caratteristica, con un certo numero di forme generiche. Ma la dimostrazione della formola suddetta mi sembra in qualche punto dubbia, sicchè non ne ho fatto uso.

donde:

$$A_1(0, x_1, \cdots, x_r) F_1(0, x_1, \cdots, x_r) + \cdots +$$
$$+ A_h(0, x_1, \cdots, x_r) F_h(0, x_1, \cdots, x_r) \equiv 0,$$

dalla quale rilevasi che alla forma $A_1(0, x_1, \cdots, x_r) F_1(0, x_1, \cdots, x_r)$ corrisponderà una ipersuperficie passante per la M_{r-h}, *senza parti multiple*, comune alle ipersuperficie, che nell'iperpiano $x_0 = 0$, son determinate dalle forme $F_2, \cdots, F_h$, delle quali (al pari della F_1) nessuna, nelle nostre ipotesi, si annulla identicamente ponendovi $x_0 = 0$. Siccome la sezione di F_1 con $x_0 = 0$ non passa per la suddetta M_{r-h}, chè altrimenti $x_0 = 0$ secherebbe Φ secondo una varietà più che $r - h - 1$ volte estesa, dovrà l'ipersuperficie corrispondente ad $A_1(0, x_1, \cdots, x_r)$ passare per la M_{r-h} più volte nominata; e, pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, sarà:

$$A_1(0, x_1, \cdots, x_r) \equiv B_2(x_1, \cdots, x_r) F_2(0, x_1, \cdots, x_r) + \cdots +$$
$$+ B_h(x_1, \cdots, x_r) F_h(0, x_1, \cdots, x_r),$$

ossia:

$$A_1(x_0, x_1, \cdots, x_r) \equiv B_2(x_1, \cdots, x_r) F_2(x_0, x_1, \cdots, x_r) + \cdots +$$
$$+ B_h(x_1, \cdots, x_r) F_h(x_0, \cdots, x_r) + x_0 A'_1(x_0, \cdots, x_r).$$

Sostituendo nella (1), verrà:

$$x_0 F \equiv x_0 A'_1 F_1 + (A_2 + B_2 F_1) F_2 + \cdots + (A_h + B_h F_1) F_h,$$

la quale prova che la ipersuperficie corrispondente alla forma $x_0 (F - A'_1 F_1)$ passa per la M_{r-h+1}, *priva di parti multiple*, comune a $\boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_h$. Siccome $x_0 = 0$ non passa per la M_{r-h+1} suddetta, ci passerà l'ipersuperficie di equazione $F - A'_1 F_1 = 0$, ossia sempre pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, $F - A'_1 F_1$ apparterrà al modulo $(F_2, \cdots, F_h)$:

$$F - A'_1 F_1 \equiv A'_2 F_2 + \cdots + A'_h F_h,$$

donde:

$$F \equiv A'_1 F_1 + A'_2 F_2 + \cdots + A'_h F_h,$$

che dimostra quanto abbiamo enunciato al principio di questo numero.

5. Per l'ipotesi fatta sulla Φ, comune a $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$, le $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_{h-1}$, come già abbiamo osservato, s'intersecheranno secondo una varietà ψ, ad $r - h + 1$ dimensioni, priva di parti multiple.

Il modulo $(F_1, \cdots, F_h)$, di cui indichiamo con $\chi_1(l)$ la funzione caratteristica è il «*grosste gemeinsame Modul*» [10] rispetto ai due moduli (F_h) e $(F_1, \cdots, F_{h-1})$, dei quali sono $\binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$ e $\chi(l)$ rispettivamente le funzioni caratteristiche. Il «*kleinste enthaltende Modul*» dei due

(10) HILBERT, ved. nota (4), pag. 517.

(F_h) e $(F_1, \cdots, F_{h-1})$, ossia il sistema delle forme appartenenti contemporaneamente ai moduli suddetti, è costituito dalle forme B tali che:

$$B \equiv A_h F_h \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_{h-1} F_{h-1}.$$

Ad ogni forma B risponderà una ipersuperficie $\boldsymbol{B}$ passante per ψ; e siccome la ipersuperficie $\boldsymbol{F}_h$ non passa per ψ, dovrà la A_h passare per ψ, e *quindi*, pel teorema ammesso per $h-1$ forme, sarà A_h nel modulo $(F_1, \cdots, F_{h-1})$; ossia il « kleinste enthaltende Modul », del quale parlavamo, è, nelle nostre ipotesi $(F_1 F_h, \cdots, F_{h-1} F_h)$. Una *data* forma d'ordine l di questo modulo dipende da tante costanti quante sono quelle contenute in una forma d'ordine $l - n_h$ del modulo $(F_1, \cdots, F_{h-1})$ sicché la funzione caratteristica del modulo suddetto è $\chi(l-n_h) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$.

Applicando la relazione fondamentale di Hilbert (*loc. cit.*, pag. 519), avremo:

$$\chi(l) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r} = \chi_1(l) + \chi(l-n_h) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r},$$

donde, in virtù della espressione ammessa per $\chi(l)$, si trae:

$$\chi_1(l) = \binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + (-1)^h \binom{l-n_1-\cdots-n_h+r}{r},$$

ove i sommatorî si estendono alle combinazioni semplici di 1^a, $2^a, \cdots, (h-1)^a$ classe degli indici $1, 2, \cdots, h$.

6. Suppongasi $r = h$. In tal caso è facile vedere che se nella $\chi_1(l)$ si pone una qualunque delle n uguale a 0, i termini si elidono a due a due, e si ha $\chi_1(l) = 0$. Siccome $\chi_1(l)$ è funzione intera di grado h nelle $n_1, n_2, \cdots, n_h$, si deduce $\chi_1(l) = C n_1 n_2 \cdots n_h$, essendo C indipendente da $n_1, \cdots, n_h$. Esaminando poi l'espressione trovata di $\chi(l)$, si vede che in essa il coefficiente di $n_1 \cdots n_h$ è 1. Dunque:

$$\chi_1(l) = n_1 n_2 \cdots n_h.$$

Ciò posto, nelle ipotesi nostre, le ipersuperficie $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$ si tagliano in $n_1 n_2 \cdots n_h$ punti P tutti distinti. Questi punti alle ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \cdots n_h - 1$, obbligate a contenerli, impongono $n_1 n_2 \cdots n_h$ condizioni semplici, perché è possibile costruire una ipersuperficie d'ordine l per $n_1 n_2 \cdots n_h - 1$ punti P e non pel rimanente; per esempio mediante $n_1 n_2 \cdots n_h - 1$ iperpiani per altrettanti punti P e una ipersuperficie generica d'ordine $l - n_1 \cdots n_h + 1$.

Sicché le ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \cdots n_h - 1$ passanti pei P, formano un sistema lineare di dimensione

$$\binom{l+h}{h} - 1 - n_1 n_2 \cdots n_h ;$$

cioè un sistema così esteso come il sistema delle ipersuperficie, pure passanti pei P, che corrispondono a forme d'ordine l, abbastanza alto, appartenenti al modulo $(F_1, \cdots, F_h)$. Ne segue che ogni forma $F(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ d'ordine $l \geq N$, ove N è un conveniente limite, passante per gli $n_1 n_2 \cdots n_h$ zeri, tutti distinti, comuni alle forme $F_1(x_0, x_1, \cdots, x_r), \cdots, F_h(x_0, x_1, \cdots, x_r)$, appartiene al modulo $(F_1, \cdots, F_h)$ (11).

Se F è una forma d'ordine $N - 1$ passante per gli zeri comuni a $F_1, \cdots, F_h$, considerandola insieme ad una forma lineare generica, avremo una forma d'ordine N passante per gli zeri comuni a $F_1, \cdots, F_h$, e quindi appartenente al modulo $(F_1, \cdots, F_h)$. Ma allora per la proposizione del n. 4 anche F apparterrà a questo modulo. Analogamente dalle forme di ordine $N - 1$ si passa a quelle di ordine $N - 2$, ecc. Onde si può enunciare:

Ogni forma $F(x_0, \cdots, x_r)$ *passante per gli* $n_1 n_2 \cdots n_h$ *zeri* $(h = r)$, *tutti distinti, comuni alle forme* $F_1, \cdots, F_h$, *appartiene al modulo* $(F_1, \cdots, F_h)$.

7. Infine, sia $r = h + k$ $(k \geq 1)$, e supponiamo di aver dimostrato che se h forme delle r variabili $x_1, \cdots, x_r$, corrispondono ad altrettante ipersuperficie che si secano secondo una M_{r-h-1} priva di parti multiple, ogni forma di $x_1, \cdots, x_r$, corrispondente a una ipersuperficie per questa M_{r-h-1}, appartiene al modulo delle h forme primitive; il che (grazie alla proposizione ammessa per $h - 1$ forme) si è dimostrato quando $k = 1$, al numero precedente.

Le ipersuperficie $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$ di ordini $n_1, \cdots, n_h$, corrispondenti alle forme $F_1, \cdots, F_h$, si sechino secondo una varietà Φ di dimensione $r - h$, priva di parti multiple, e supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sechi Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple. Se $\boldsymbol{F}$ è una ipersuperficie, di ordine l, passante per Φ, considerando le sezioni di $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$ con $x_0 = 0$ si potrà scrivere, nelle nostre ipotesi,

$$F(0, x_1, \cdots, x_r) \equiv A_1(x_1, \cdots, x_r) F_1(0, x_1, \cdots, x_r) + \cdots + \\ + A_h(x_1, \cdots, x_r) F_h(0, x_1, \cdots, x_r),$$

donde:

$$F(x_0, \cdots, x_r) \equiv A_1(x_1, \cdots, x_r) F_1(x_0, x_1, \cdots, x_r) + \cdots + \\ + A_h(x_1, \cdots, x_r) F_h(x_0, x_1, \cdots, x_r) + x_0 F'(x_0, x_1, \cdots, x_r),$$

la quale mostra che la ipersuperficie $\boldsymbol{F}'$, di ordine $l - 1$, passa per Φ.

(11) Questo ragionamento è analogo a quello fatto dalla Scott (*loc. cit.*), nel caso di due forme ternarie.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE · PISA · BIBLIOTECA

Se $l = m$, essendo m l'ordine minimo delle ipersuperficie passanti per Φ, dovrà dunque essere $F' \equiv 0$, se poi $l = m + q$ $(q > 0)$, ragionando su F' come su F, e così di seguito, avremo una successione di forme $F, F', F'', \cdots$, corrispondenti ad altrettante ipersuperficie passanti per Φ, e di ordini decrescenti, di una unità alla volta. Al più questa successione di forme si spingerà fino alla forma $F^{(q)}$, giacché la forma successiva $F^{(q+1)}$, per essere di ordine $m - 1$, sarà identicamente nulla. Ne viene successivamente che $F^{(q)}, \cdots$ $\cdots, F'', F', F$ apparterranno al modulo $(F_1, \cdots, F_h)$.

I teoremi enunciati al n. 3 risultano così pienamente dimostrati.

8. Una conseguenza immediata del primo di questi teoremi è che il modulo $(F_1, \cdots, F_h)$, quando le forme F_i corrispondano ad h ipersuperficie che si taglino secondo una varietà Φ_{r-h}, priva di parti multiple, coincide col modulo delle forme a cui corrispondono ipersuperficie per Φ.

Dunque pel secondo dei teoremi del n. 3 abbiamo:

La postulazione di una varietà Φ_{r-h} priva di parti multiple, ma avente singolarità qualsiasi, che sia completa intersezione di h ipersuperficie di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_h$, per le ipersuperficie di ordine l abbastanza alto, è espressa da

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots +$$

$$+ (-1)^h \binom{l-n_1-\cdots-n_h+r}{r},$$

i sommatori essendo estesi come al n. 3.

Osservazioni sul caso di due forme.

9. Il caso di due forme si può trattare particolarizzando i ragionamenti fatti in generale, per una via del tutto elementare, senza neppure ricorrere alla teoria dei moduli. Basta osservare che, nel caso di due forme, la dimostrazione dell'esistenza della funzione caratteristica $\chi(l)$ del modulo (F_1, F_2) e il calcolo effettivo di essa, si posson condurre molto semplicemente, partendosi dall'ipotesi (più larga di quella che abbiam fatto nel caso generale di un numero qualsiasi di forme) che le due forme non abbiano *fattori comuni*; giacché allora se una forma F, d'ordine l, appartiene al modulo (F_1, F_2), ossia se

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2,$$

ogni altra rappresentazione della F, quando $l \geq n_1 + n_2$, è data dalla identità:

$$F \equiv (A_1 + XF_2) F_1 + (A_2 - XF_1) F_2,$$

ove X è una forma arbitraria di ordine $l - n_1 - n_2$; sicché il numero delle costanti indipendenti che determinano F, si ottiene togliendo dalla somma

dei numeri delle costanti che compaiono in A_1 e in A_2, il numero delle costanti che compaiono in X; e quindi:

$$\chi(l) = \binom{l+r}{r} - \left[\binom{l-n_1+r}{r} + \binom{l-n_2+r}{r} - \binom{l-n_1-n_2+r}{r}\right].$$

Il ragionamento del n. 6, nel caso di due forme, ci dà facilmente la dimostrazione della rappresentabilità di una forma ternaria, che passi per gli zeri comuni a due altre, come combinazione lineare di queste, non solo nella ipotesi che le ultime due forme abbian comuni zeri tutti distinti, ma anche nelle ipotesi più generali di Nöther. E infine il ragionamento del n. 7 permette di risalire dal caso di due forme ternarie, al caso di Nöther per due forme qualunque [12].

(12) Nella *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, di PICARD e SIMART, alla pag. 17 del t. II, si estende alle forme quaternarie il *Fundamentalsatz*, deducendolo dall'analogo per le forme ternarie, con un procedimento che si può ripetere per *due* forme qualunque. Ma questo procedimento non è certo più semplice di quello che ci dà in tal caso il ragionamento del n. 7, né si può estendere facilmente al caso di un numero *qualsiasi* di forme.

X.

IL GENERE ARITMETICO ED IL GENERE LINEARE IN RELAZIONE ALLE RETI DI CURVE TRACCIATE SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *37* (1902), pp. 433–451 (*).

Nella teoria delle superficie algebriche si suol dare due definizioni del genere aritmetico superficiale: l'una dovuta a Zeuthen e Nöther e l'altra dovuta a Enriques. Ma nè l'una né l'altra sono analoghe a quella definizione del genere di una curva che ricorre al confronto di due serie lineari, semplicemente infinite, contenute in essa (1); nella quale, si può dire, è contenuta anche la proprietà d'invarianza del genere nelle trasformazioni birazionali della curva.

Nella presente Nota mi propongo appunto di dare una definizione del genere aritmetico d'una superficie ricorrendo al confronto di due reti di curve tracciate sulla superficie stessa: definizione che al tempo stesso conterrà in sè la proprietà d'invarianza del genere aritmetico rispetto ad ogni trasformazione birazionale della superficie (2). Attorno a questa definizione raggrupperò altri resultati, relativi al genere lineare d'una superficie, e, alla fine, alcuni resultati numerativi sulle reti di curve (3).

Già fin dal 1893 il prof. Segre aveva pensato di ottenere caratteri di una superficie ricorrendo al confronto di due reti contenute in essa, proseguendo nell'ordine di idee che per le curve svolse nella *Introduzione* e per le superficie aveva iniziato con le ricerche che pubblicò poi nella Nota: *Intorno ad un carattere delle superficie*, ecc. («Atti della R. Accademia di Torino», 1896). E quando, pochi mesi or sono, dette a me il consiglio di studiare le reti di curve sopra una superficie algebrica, mi comunicò alcuni fogli manoscritti, datati dal '93, nei quali, come naturale estensione della definizione già rammentata del genere di una curva, egli iniziava la ricerca del n° delle coppie comuni alle due involuzioni che due reti determinano sopra una superficie.

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 15 giugno 1902.

(1) Cfr. C. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Mat., (2) *22* (1894), pp. 41–143.

(2) Ved. per il confronto di questa definizione con quella di Zeuthen e Nöther, il n° 9 di questa Nota.

(3) *L'unico* strumento di ricerca usato in questa Nota è il principio di corrispondenza di Chasles. Si presuppone la definizione del genere di una curva.

Io però, nella presente Nota, non giungo alla nuova definizione del genere aritmetico proseguendo la ricerca del professore Segre; ma adottando un metodo che poggia essenzialmente sulla considerazione delle curve di una rete dotate di cuspide (4).

1. Sulla superficie F che, per semplicità, supponiamo dotata di sole singolarità ordinarie (5), consideriamo una rete di curve, cioè una ∞^2 di curve segnate su F da un sistema lineare ∞^2 di forme passanti, eventualmente, per qualche curva fissa. Se la parte variabile della curva generica è irriducibile, vi è da considerare la *jacobiana* della rete (6), ossia il luogo dei punti *semplici* di F ognun dei quali è doppio per qualche curva della rete: il punto generico di questo luogo è anche definito dalla condizione di esser punto di contatto (proprio) delle ∞^1 curve della rete per esso.

Siano $|C|$ e $|C'|$ due reti di curve tracciate su F, e le parti variabili delle loro curve generiche siano irriducibili; sia poi K una curva di F, che non passi per alcuno degli eventuali punti base di $|C|$ e $|C'|$.

Fissato entro alla rete $|C|$ un fascio $|\overline{C}|$, per un punto A di K passerà una C e vi sarà una C', che chiameremo C'_1, tangente a quella $\overline{C}$ nel punto suddetto, ed una C', che diremo C'_2, tangente a K nel punto medesimo. Variando A su K avremo entro alla rete $|C'|$ una semplice infinità di coppie $C'_1 C'_2$. Due curve di una stessa coppia vengono certamente a coincidere quando, variando A su K, la $\overline{C}$ per A tocca ivi K; ma non possiamo esimerci dall'esaminare se una coincidenza si abbia in corrispondenza ad un punto A di K nel quale non c'è contatto fra K e la $\overline{C}$ passante per quello. Allora la C' nella quale dovrebbe aversi la coincidenza avrebbe punto doppio in A, e quindi A sarebbe uno dei (K, J') punti comuni a K e alla jacobiana J' di $|C'|$ (7): effettivamente in corrispondenza a un tal punto di K si ha una coincidenza. Se indichiamo con ϱ il genere di K, giacché sono $2(C, K) + 2\varrho - 2$ i punti nei quali K è toccata da una $\overline{C}$, potremo dire che nella ∞^1 di coppie $C'_1 C'_2$ si presentano

$$2(C, K) + (J', K) + 2\varrho - 2$$

(4) Nelle sue Lezioni di quest'anno scolastico (1901–1902) il prof. Segre ha esposto i principali resultati che avevo ottenuto nello studio da lui consigliatomi; e li ha esposti con alcune modificazioni d'indole didattica, delle quali io qua e là ho profittato nella attuale redazione.

(5) Cioè una linea doppia con un n° finito di punti tripli se F è nello S_3; un n° finito di punti doppi improprî se è nello S_4; senza punti multipli se è in uno spazio superiore. — La dimensione dello spazio ambiente non ha, dopo ciò, influenza sul nostro studio. — Nel seguito quando ci avverrà di considerare una trasformata birazionale di F, supporremo che anch'essa abbia singolarità ordinarie. Questa ipotesi, come si sa, non è restrittiva. Così facendo su ciascuna delle due superficie le curve fondamentali saranno *eccezionali*.

(6) Nei fogli manoscritti del prof. Segre già trovavasi considerato questo luogo. — Il prof. ENRIQUES nella sua Nota: *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, 37 (1901), pp. 19–40) ha introdotto la jacobiana di una rete per semplificare notevolmente la teoria dei sistemi ad un dato sistema di curve.

(7) D'ordinario con la notazione (H, K) denoteremo il n° dei punti comuni alle due curve H e K.

coincidenze. – Lo stesso numero si può calcolare per altra via, mediante l'applicazione del principio di Chasles. Infatti la rete $|C'|$ è assimilabile ad un piano di cui le C' sono gli elementi (punti); sicché tenendo conto di una forma ben nota del principio di corrispondenza [8] si avrà che il n° delle coincidenze $C_1' C_2'$ è uguale alla somma del n° delle coppie la cui C_1' appartiene ad un dato fascio (di $|C'|$) e del n° delle coppie la cui C_2' appartiene ad un dato fascio, diminuita del n° delle coppie che stanno in un fascio con una data C'.

Se diciamo θ il n° delle curve C' di un fascio che toccano le curve $\overline{C}$ in punti di K, numero che è definito simmetricamente rispetto alle due reti, avremo dunque:

$$\theta + \{2(C', K) + 2\varrho - 2\} - (C', K)$$

come altra espressione del n° delle coincidenze $C_1' C_2'$. Se ne deduce:

$$\theta + (C', K) = 2(C, K) + (J', K).$$

Mutando le veci delle due reti verrà:

$$\theta + (C, K) = 2(C', K) + (J, K),$$

ove J denota la jacobiana di $|C|$. E sottraendo membro a membro:

$$(J, K) - 3(C, K) = (J', K) - 3(C', K).$$

Possiamo dunque dire:

Data su F una curva K ed una rete qualsiasi, il numero delle intersezioni di K con la jacobiana della rete diminuito di tre volte il numero delle intersezioni di K con una curva generica della rete, non muta al mutar della rete su F [9].

Questa differenza è dunque un carattere relativo alla curva K in quanto è tracciata sopra F: lo diremo perciò il *carattere di immersione* di K su F [10].

È utile aggiungere alcune osservazioni sulla precedente proposizione. Anzitutto si ricordi che noi siamo partiti dall'ipotesi che né $|C|$ né $|C'|$ avessero punti base su K. Non è che questa ipotesi sia necessaria pel ragionamento, ma noi l'abbiamo fatta per evitare l'esame, un po' minuto, delle coincidenze $C_1' C_2'$ che avrebbero avuto luogo in corrispondenza ai

(8) Avendosi nel piano una ∞^1 algebrica di coppie PP' di punti, si trova facilmente mediante l'applicazione del principio di corrispondenza nel fascio dei raggi che da un punto del piano projettano i P e i P', che il n° delle coincidenze PP' è uguale alla somma del n° delle coppie il cui P sta in una data retta e del n° delle coppie il cui P' sta in una data retta, diminuita del n° delle coppie la cui retta PP' passa per un dato punto.

(9) Nello esporre questa proposizione nelle sue Lezioni, il prof. Segre ne ha dato una dimostrazione diversa, poggiandosi sulla considerazione della jacobiana di quattro superficie. — Si noti l'intimo nesso che corre fra la proposizione del testo e quella data dal prof. Enriques al n° 16 della Nota citata.

(10) Dal punto di vista projettivo ho considerati i caratteri d'immersione di una varietà in un'altra, nella mia Memoria: *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità projettive* (Memorie della R. Acc. di Torino, (2) *52*, 1902). Dalla proposizione del testo si può facilmente dedurre l'ordine della jacobiana J di $|C|$.

punti base di $|C'|$ su K; tanto più poi che possedendo il resultato precedente in quella ipotesi, facilmente si dimostra la sua validità in ogni caso. Difatti se la curva K contiene dei punti base della rete $|C|$, è certo che si può sempre costruire un fascio lineare $|L|$ di curve, che non abbia punti base comuni con $|C|$, e del quale *una* curva si spezzi in K e in una parte residua K_1 (che potrebbe anche mancare) non contenente punti base di $|C|$. Sarà evidentemente:

$$(J, L) - 3(C, L) = (J, K + K_1) - 3(C, K + K_1),$$

purché fra le intersezioni della curva composta $K + K_1$ con la curva generica C o con la jacobiana J, non si tralasci di contare quelle che cadono nei punti base di $|C|$. La precedente relazione può anche scriversi

$$(J, K) - 3(C, K) = (J, L) - 3(C, L) - (J, K_1) + 3(C, K_1).$$

E poiché, in virtù di quanto prima s'è stabilito, $(J, L) - 3(C, L)$ ed $(J, K_1) - 3(C, K_1)$ non mutano mutando la rete $|C|$, ne viene che il carattere d'immersione di K può anche calcolarsi col sussidio di una rete avente dei punti base su K, purché si tenga conto anche delle intersezioni che cadono nei punti base.

Il medesimo artifizio ora usato, di considerare cioè il fascio $|L|$ che contenga parzialmente K e soddisfi a certe condizioni rispetto ai punti base di $|C|$, serve per provare che se la curva K è una C, il carattere d'immersione di K si potrà calcolare col sussidio della rete $|C|$, purché al solito si tenga conto delle intersezioni di K con un'altra C o con J, le quali cadono nei punti base di $|C|$.

Ancora un'osservazione. Se la superficie F, dotata di singolarità ordinarie, è nello S_3, si potrà calcolare facilmente il carattere d'immersione della curva K su F, in funzione del n° λ dei punti in cui K incontra la linea doppia di F, dell'ordine n di F e dell'ordine m di K. Infatti il carattere d'immersione di K calcolato col sussidio di una rete di sezioni piane di F, viene uguale a $(K, J) - 3m$, ove J denota la curva di contatto del cono circoscritto a F da un punto O dello spazio. E poiché la J è segata su F, fuori della linea doppia, dalla prima polare di O, avremo $(K, J) = m(n - 1) - \lambda$, e quindi il carattere d'immersione di K sarà espresso da $m(n - 4) - \lambda$.

Se dunque esistono *superficie d'ordine* $n - 4$ *aggiunte a* F, *il carattere d'immersione di* K *esprime precisamente il* n° *delle intersezioni di* K *con un'aggiunta d'ordine* $n - 4$, *fuori della linea doppia* (11).

2. Quando F trasformasi birazionalmente nella F^* la jacobiana J della rete $|C|$ generica rispetto agli elementi fondamentali della trasformazione, si muta in una parte della jacobiana della rete trasformata, la quale deve

(11) Si può anche dire che il carattere d'immersione di K esprime il n° complessivo delle intersezioni di K con una curva canonica e con le curve eccezionali di F.

completarsi aggiungendovi le curve che corrispondono ai punti fondamentali di F [12]. Da ciò segue che se una curva K di F passa con i (≥ 0) rami complessivamente per punti fondamentali di F, e incontra in i^* (≥ 0) punti complessivamente le curve fondamentali esistenti su F, dicendo K^* la sua trasformata si avrà

$$i^* + \text{caratt. d'imm. } K^* = i + \text{caratt. d'imm. } K,$$

la qual relazione prova che il carattere d'immersione di una curva su F è un *invariante relativo* nelle trasformazioni birazionali di F [13].

3. Supponiamo adesso che la rete $|C|$ sia irriducibile, priva di punti base e di curve fondamentali [14]. Dicasi n il grado di $|C|$, p il suo genere, e π il genere della sua jacobiana J. Rappresentando projettivamente le C con le rette di un piano F^*, la superficie F verrà rappresentata sul piano n–plo F^* (privo di punti fondamentali) e la curva di diramazione J^* di questo piano sarà la omologa della jacobiana J. L'ordine di J^* sarà uguale al numero N dei punti in cui J è tagliata da una C; ossia $N = 2n + 2p - 2$; e la classe di J^* uguaglierà il n° delle C dotate di punti doppi (staccati [15]) appartenenti ad un fascio di $|C|$, numero che è espresso da $\delta = n + 4p + I$, essendo I l'*invariante di* Zeuthen–Segre relativo a F (ved. la Nota citata di Segre). – Con la considerazione di due convenienti serie lineari su J^* (o con le formole

(12) Ora e nel seguito parlando di punti fondamentali su F o su F^*, intenderemo che siano *ordinarî*. L'ipotesi non è restrittiva, perché ogni trasformazione birazionale fra F e F^* può sempre riguardarsi come prodotto di un n° finito di trasformazioni birazionali operate in una catena di superficie delle quali la prima sia F, l'ultima F^*, e tali che la trasformazione fra due *successive* non abbia in esse che punti fondamentali ordinarî.

(13) Un'applicazione di quest'invarianza relativa può farsi a determinare la *molteplicità della jacobiana J di $|C|$ in un punto base s–plo O*. Trasformiamo F con una trasformazione birazionale che abbia su essa come unico elemento fondamentale O. La $|C|$ darà una rete $|C^*|$ nella superficie trasformata F^*, e la jacobiana J^* di $|C^*|$ sarà in generale la trasformata della jacobiana J (ma potrebbe in casi particolari contenere anche una curva addizionale). Una curva generica K per O si muterà in una curva K^* di carattere d'immersione superiore d'una unità a quello di K. Dicendo x il n° delle intersezioni di K con J in O, e calcolando il carattere di K^* col sussidio di $|C^*|$ avremo: caratt. $K^* = [(J, K) - x] - 3[(C, K) - s]$, ossia: caratt. K^* = caratt. $K - x + 3s$. e poiché caratt. K^* = caratt. K + 1 verrà $x = 3s - 1$, ossia tale sarà in generale la moltiplicità di J in O.

Se il punto O è punto base s–plo ordinario, con una trasformazione quadratica si vede analogamente che J ha in O punto $(3s - 1)$–plo ordinario, e che le sue tangenti ivi, se $s > 1$, sono le tangenti *comuni* ad altrettante coppie di rami lineari tali che ciascuna coppia appartiene ad una C. Se $s = 1$ le tangenti di J sono le due tangenti alla C con punto doppio in O.

(14) La ipotesi che facciamo relativa alla non esistenza dei due punti base non sarebbe necessaria. Estenderemo poi i resultati anche a reti con punti base. Avvertiamo che siccome da questo momento considereremo sempre *reti irriducibili*, ci dispenseremo dal ripetere l'aggettivo.

(15) Cioè fuori della eventuale linea doppia di F. Nel seguito si sottintenderà questa avvertenza.

di Plücker) si ha:

$$\begin{aligned} \chi + N &= 2\delta + 2\pi - 2 \\ \tau + \delta &= 2N + 2\pi - 2 \end{aligned} \qquad \text{ossia:} \quad (1) \quad \begin{cases} \chi = 6p + 2\pi + 2I \\ \tau = 3n + 2\pi - I - 6, \end{cases}$$

ove χ denota il numero dei flessi, e τ il n° delle cuspidi della curva J^*.

Sia A^* un flesso di J^*. La tangente d'inflessione a^* rappresenterà una C, e sia $\overline{C}$, con punto doppio nel punto A di J (omologo di A^* nella corrispondenza fra J e J^*), e come J^* ha in A^* punto semplice, così la J avrà in A un punto semplice. Di più come la a^* conta due volte fra le tangenti condotte ad J^* per un punto generico di a^*, mentre conta tre volte fra le tangenti condotte ad J^* per A^*, un fascio generico per la $\overline{C}$ conterrà all'infuori di $\overline{C}$ ancora $\delta - 2$ curve con punto doppio, e vi sarà un particolar fascio per C che all'infuori di $\overline{C}$ conterrà solo $\delta - 3$ curve con punto doppio. Tutto ciò non può accadere se la $\overline{C}$ ha in A un nodo; d'altronde, se la rete $|C|$ non presenta particolarità, l'unica ipotesi possibile è ormai che la $\overline{C}$ abbia in A una cuspide ordinaria: se così è il punto A^* sarà effettivamente un flesso di J^* (ved. SEGRE, *Nota cit.*; fine della pag. 5).

Sia adesso A^* una cuspide di J^* e a^* la relativa tangente cuspidale. Rappresenterà una C, e sia $\overline{C}$, con punto doppio nel punto A omologo di J, e come una retta generica per A^* taglia altrove J^* in $N - 2$ punti, e la sola a^* taglia altrove J^* in $N - 3$ punti, così una curva generica fra quelle passanti per A dovrà contenere solo $N - 2$ ulteriori punti di J e soltanto la $\overline{C}$ ne conterrà $N - 3$. Siccome il punto A è semplice per J (chè l'ipotesi contraria porterebbe ad una *particolarità* nella rete $|C|$) si conclude che tutte le C per A toccano ivi J e che anche la $\overline{C}$ ha uno dei due rami uscenti da A, tangenti ad J. Ne viene che la $\overline{C}$ e un'altra C per A si secano, fuori di A, in $n - 3$ punti e quindi che A è punto base d'osculazione di un fascio di curve C.

Sicché concludendo χ e τ denotano rispettivamente il n° delle curve cuspidate della rete $|C|$, e il n° dei fasci di curve C che si osculano.

4. Se la C, che indichiamo con $\overline{C}$, avente punto doppio in un certo punto A di J, tocca ivi J (la quale, se la rete $|C|$ è generica, non ha punti multipli), due casi possono darsi: o tutte le C per A toccano ivi J, oppure non c'è altra C per A che tocchi ivi J. Nel primo caso A sarà evidentemente punto base d'osculazione di un fascio di curve C; nel secondo caso la serie caratteristica sulla $\overline{C}$, che è di genere $p - 1$, avrà *uno* de' suoi $2n + 2(p - 1) - 2$ punti doppi, coincidenti con A, e poiché una generica C per A non ha un contatto (proprio) con $\overline{C}$, chè altrimenti si cadrebbe nel caso precedente, due dei punti d'intersezione con $\overline{C}$ di una C tendente a passare per A, tendono ad A sopra $\overline{C}$ in un ramo di 2° ordine: ossia A è una cuspide ordinaria per $\overline{C}$. – Ma dunque *il n° dei punti per ciascun dei quali accade che la C avente in esso punto doppio abbia un ramo tangente ad J, è precisamente uguale a* $\chi + \tau$.

5. Or consideriamo su F, oltre alla rete $|C|$, un'altra rete $|C'|$ analoga a $|C|$, ma *indipendente* da questa, e diciamone n' il grado, p' il genere, e π' il genere della jacobiana J'.

Per ogni punto A di J escono due curve C', e siano $C'_1 C'_2$, che toccano ciascuna un ramo della C con punto doppio in A, e una C' e sia C'_0, che tocca pure in A la J. Variando A su J si ottengono ∞^1 coppie $C'_1 C'_2$ e ∞^1 coppie $C'_0 C'_1$. Calcoleremo prima il n° delle coincidenze $C'_1 C'_2$, eppoi il n° delle coincidenze $C'_0 C'_1$.

Per calcolare quante sono le coincidenze $C'_1 C'_2$ possiamo applicare entro alla rete $|C'|$, della quale si riguardino le C' come elementi, il principio di Chasles sotto la forma usata al n° 1. – Il n° delle coppie $C'_1 C'_2$ la cui C'_1, o la cui C'_2, appartiene a un dato fascio, uguaglia il n° α delle curve C' di un fascio ognuna delle quali tocca uno dei due rami uscenti dal punto doppio di una qualche C; e il n° delle coppie $C'_1 C'_2$ che stanno in un medesimo fascio con una data C', è uguale al doppio del n° delle intersezioni di J con questa C', atteso che, a causa della simmetria della corrispondenza considerata fra le C', per ogni punto di J si hanno due coppie $C'_1 C'_2$. Ma dunque sono

$$2\alpha - 2(C', J)$$

le coincidenze. – È certo che quando col variare di A su J la C avente punto doppio in A tende ad una C cuspidata, le due curve $C'_1 C'_2$ tendono a coincidere; ma non possiamo escludere che una coincidenza $C'_1 C'_2$ avvenga anche corrispondentemente ad un punto A di J che sia nodo per una C. Allora la C'_1 in cui avverrebbe la coincidenza dovrebbe avere punto doppio in A, e quindi A sarebbe uno degli (J, J') punti comuni alle jacobiane di $|C|$ e $|C'|$. Effettivamente nella C' avente punto doppio in un punto B comune a J e J' avviene una coincidenza, che anzi nel n° complessivo dovrà contarsi due volte, perché la C' soddisfa in due modi alla condizione di toccare in B *uno dei due rami* della C dotata di nodo nel punto stesso. Sicché avremo la relazione:

$$2\alpha - 2(C', J) = 2(J, J') + \chi. \tag{2}$$

Per calcolare quante sono le coincidenze $C'_0 C'_1$ procederemo allo stesso modo, col principio di corrispondenza. Il n° delle coppie $C'_0 C'_1$ la cui C'_0 sta in un dato fascio è uguale al doppio del n° delle C' di quel fascio, tangenti ad J, perché per ogni punto di J si hanno due coppie $C'_0 C'_1$; ossia è uguale a $2[2(C', J) + 2\pi - 2]$, visto che le C' di quel fascio segnano su J una serie lineare d'ordine (C', J). Il n° delle coppie $C'_0 C_1$ la cui C'_1 sta in un dato fascio è uguale evidentemente ad α; e infine il n° delle coppie $C'_0 C'_1$ che stanno in un fascio con un data C' uguaglia il doppio del n° delle intersezioni di questa C' con J, sempre perché per ogni punto di J si hanno due coppie $C'_0 C'_1$. E quindi sono

$$\alpha + 2[2(C', J) + 2\pi - 2] - 2(C', J) = \alpha + 2(C', J) + 4\pi - 4$$

le coincidenze. – Si avranno coincidenze $C'_0 C'_1$ corrispondentemente ai punti

in ciascun dei quali J è toccata da un ramo della C avente punto doppio in quello, che sono in numero di $\chi + \tau$ (ved. al n° 4); ma dobbiamo pure esaminare se possono aversi coincidenze $C_0' C_1$ in modo diverso. Sia dunque, se è possibile, C_0' una C' in cui avviene una coincidenza diversa dalle precedenti: evidentemente C_0' dovrà avere punto doppio nel punto corrispondente di J, ossia questo punto dovrà esser comune ad J e J'. Effettivamente per ciascuno di tali punti si ha una coincidenza, e, come prima, si vede che deve contarsi due volte. Potremo dunque scrivere la relazione:

$$\alpha + 2\,(C', J) + 4\,\pi - 4 = \chi + \tau + 2\,(J, J'). \tag{3}$$

Se fra (2) e (3) eliminiamo α col sottrarre la (2) dalla (3) moltiplicata per 2, verrà:

$$6\,(C', J) + 8\,\pi - 8 = \chi + 2\,\tau + 2\,(J, J'),$$

ossia:

$$3\,(C', J) + 4\,\pi - 4 = \frac{1}{2}\,\chi + \tau + (J, J'). \tag{4}$$

Si osservi ora che il carattere d'immersione d'una generica C' calcolato una volta col sussidio delle rete $|\,C\,|$, e una volta col sussidio di $|\,C'\,|$ (ved. al n° 1), dà luogo all'uguaglianza:

$$(C', J) - 3\,(C', C) = (C', J') - 3\,n'$$

od anche:

$$(C', J) = 3\,(C', C) + (C', J') - 3\,n',$$

e poiché $(C', J') = 2\,n' + 2\,p' - 2$, verrà:

$$(C', J) = 3\,(C', C) + 2\,p' - 2 - n'.$$

Sostituendo nella (4) avremo:

$$9\,(C\,, C') + 6\,p' - 3\,n' + 4\,\pi - 10 = \frac{1}{2}\,\chi + \tau + (J, J').$$

Mutando le veci delle due reti otterremo analogamente:

$$9\,(C\,, C') + 6\,p - 3\,n + 4\,\pi' - 10 = \frac{1}{2}\,\chi' + \tau' + (J, J').$$

E sottraendo membro a membro questa e la precedente, verrà:

$$3\,n + 4\,\pi - 6\,p - \frac{1}{2}\,\chi - \tau = 3\,n' + 4\,\pi' - 6\,p' - \frac{1}{2}\,\chi' - \tau'.$$

Sicché

$$3\,n + 4\,\pi - 6\,p - \frac{1}{2}\,\chi - \tau,$$

che è un'espressione nella quale compajono solo caratteri di $|\,C\,|$, non muta al mutar della rete su F. Se poniamo

$$\Omega = 3\,n + 4\,\pi - 6\,p - \frac{1}{2}\,\chi - \tau + 3, \tag{5}$$

potremo dire che Ω *è un carattere di* F. Se fra le (1) del n° 3 e la precedente eliminiamo χ e τ, avremo:

$$\Omega = \pi - 9p + 9,$$

e potremo enunciare:

Data su F *una rete priva di punti base e di curve fondamentali, se* p *è il suo genere e* π *il genere della sua jacobiana, l'espressione*

$$\pi - 9p + 9$$

non muta al mutar della rete; è cioè un carattere di F.

Eliminando π e τ fra le (1) e la (5), si ha:

$$\Omega = \frac{1}{2}\chi - 12p - I + 9,$$

ossia:

$$\frac{1}{2}\chi - 12p = \Omega + I - 9,$$

dal che si deduce che anche l'espressione $\frac{1}{2}\chi - 12p$ è un carattere di F. Noi porremo

$$\frac{1}{24}\chi - p = P_a,$$

dimodoché verrà:

$$\Omega + I = 12P_a + 9, \tag{6}$$

e si potrà enunciare:

Data su F *una rete priva di punti base e di curve fondamentali, se* p *è il suo genere e* χ *il numero delle sue curve dotate di cuspide, l'espressione*

$$\frac{1}{24}\chi - p$$

non muta al mutar della rete su F.

Questo nuovo carattere della superficie F lo chiameremo il suo *genere aritmetico*.

6. Dalla definizione precedente segue subito che il P_a non varia in quelle trasformazioni birazionali che non hanno né su F, né sulle trasformate punti fondamentali. *Proveremo adesso l'invarianza del* P_a *per tutte le trasformazioni birazionali.*

La rete $|C|$ priva di punti base e di linee fondamentali, che noi consideravamo poc'anzi su F, per effetto di una trasformazione bitazionale di F in F^*, la quale abbia su F un sol punto fondamentale U situato *fuori* di J, ma nessuno su F^*, si muta in una rete $|C^*|$ pure irriducibile, priva di punti base, ma avente *una* curva fondamentale nella u^* omologa del punto U. La rete $|C^*|$ sarà, come $|C|$, del grado n, genere p, e la sua jacobiana si spezzerà nella trasformata J^* di J, e nella curva u^*. Le χ cuspidi di curve C^* cadranno in punti di J^* e così pure i τ punti base d'osculazione di fasci *irriducibili* di curve C^*.

Il resultato del n° precedente non si può *senz'altro* applicare al calcolo del carattere Ω^* di F^*, analogo ad Ω e del genere aritmetico P^* di F^*, col sussidio della rete $|C^*|$, perché essa possieda la curva fondamentale u^*; ma vedremo che di poco occorre modificare il procedimento.

Si assuma su F^* una seconda rete $|C'|$, priva di punti base e di curve fondamentali, dicasi J' la sua jacobiana, e $n', p', \pi', \chi', \tau'$ i caratteri di $|C'|$ analoghi a quelli di $|C^*|$. Considereremo un punto A variabile sulla curva J^*, *parte* della jacobiana di $|C^*|$, e le due coppie $C_1' C_2'$, $C_0' C_1'$ relative a questo punto, costruite come al n° 5. Allora il ragionamento fatto al n° precedente non soffre eccezioni, e si ha la relazione analoga alla (4); cioè:

$$3(C', J^*) + 4\pi - 4 = \frac{1}{2}\chi + \tau + (J', J^*).$$

Ora si osservi che:

$$(C', J^* + u^*) - 3(C', C^*) = (C', J') - 3n' = 2p' - 2 - n',$$

e quindi

$$(C', J^*) = 3(C', C^*) + 2p' - 2 - n' - (C', u^*).$$

Essendo inoltre

$$(J', J^* + u^*) = (J', J^*) + (J', u^*),$$

avremo:

$$9(C', C^*) + 6p' - 3n' + 4\pi - 10 - 3(C', u^*) =$$
$$= \frac{1}{2}\chi + \tau + (J', J^* + u^*) - (J', u^*),$$

ossia giacché

$$(J', u^*) - 3(C', u^*) = -1 \text{ (16)},$$

verrà:

$$9(C', C^*) + 6p' - 3n' + 4\pi - 11 = \tau + \frac{1}{2}\chi + (J', J^* + u^*).$$

Si potrà poi senz'altro scrivere:

$$9(C', C^*) + 6p - 3n + 4\pi' - 10 = \tau' + \frac{1}{2}\chi' + (J', J^* + u^*),$$

appunto perché la $|C'|$ considerata su F^* si trova nelle condizioni che rendono applicabile il procedimento del n° 5. Sottraendo membro a membro questa e la precedente, otterremo:

$$3n + 4\pi - 6p - \frac{1}{2}\chi - \tau - 1 = 3n' + 4\pi' - 6p' - \frac{1}{2}\chi' - \tau',$$

(16) Si dimostra facilmente che il carattere d'immersione di u^* su F^* è -1. Difatti per la jacobiana di una rete di curve del sistema lineare trasformante che si ha su F, il punto U è $(3s-1)$-plo, se il sistema stesso ha in U punto base s-plo: ciò equivale a dire che la curva u^* è d'ordine s, e che la jacobiana di una rete di sezioni iperpiane di F^* la taglia in $3s-1$ punti. Da ciò segue subito l'asserto. – Si noti che ne risulta, in virtù dell'ultima proposizione del n° 1, che le curve eccezionali di una superficie d'ordine n che ammette aggiunte d'ordine $n-4$, stanno su queste aggiunte.

od anche:

$$3\,n' + 4\,\pi' - 6\,p' - \frac{1}{2}\chi' - \tau' + 3 = \Omega - 1.$$

Ma per definizione il primo membro di questa uguaglianza non è altro che Ω^*, e dunque:

$$\Omega^* = \Omega - 1.$$

Siccome il carattere I^* di F^* è legato ad I dalla relazione:

$$I^* = I + 1,$$

otterremo:

$$\Omega^* + I^* = \Omega + I.$$

Il genere P_a^* di F^* in virtù della (6), soddisfa all'uguaglianza:

$$\Omega^* + I^* = 12\,P_a^* + 9,$$

e dunque, sarà:

$$P_a^* = P_a.$$

Se ora su F consideriamo una rete irriducibile $|\,C\,|$ di genere p, dotata di 1 punto base ordinario U, e di χ curve cuspidate [17], ma priva di linee fondamentali, con una trasformazione che abbia su F 1 punto fondamentale in U, ma non linee fondamentali, si passa alla superficie F^* *di ugual genere aritmetico* P_a, e alla rete $|\,C^*\,|$ irriducibile, sprovvista di punti base e di curve fondamentali, il cui genere è p e di cui il n° delle curve cuspidate è χ. Ma dunque su F^* avremo $P_a = \frac{1}{24}\chi - p$, e ciò prova che anche su F, in relazione alla rete $|\,C\,|$, si ha $P_a = \frac{1}{24}\chi - p$.

Considerando una trasformazione di F nella F^*, e supponendo che su F si abbiano 2 soli punti fondamentali U, V, ma non linee fondamentali, una rete $|\,C\,|$ di genere p e con χ curve cuspidate, avente un sol punto base in U, ma senza curve fondamentali dà su F^* una rete $|\,C^*\,|$ irriducibile senza punti base e con una curva fondamentale, che è la omologa v^* del punto V. In virtù di quanto prima si è stabilito il genere aritmetico di F^* si potrà ciò nonostante calcolare col sussidio di $|\,C^*\,|$, e verrà precisamente

$$P_a^* = \frac{1}{24}\chi - p;$$

ma d'altronde il genere aritmetico P_a di F calcolato col sussidio di $|\,C\,|$, il che è ormai lecito, è espresso da $\frac{1}{24}\chi - p$, onde:

$$P_a^* = P_a.$$

(17) Fuori del punto base. D'ora in poi sottintenderemo la restrizione analoga per reti dotate di punti base ordinarî.

Così proseguendo si arriverà a provare che il P_a è invariante per quelle trasformazioni che hanno su F un n° qualsiasi di punti fondamentali, ma non linee fondamentali, e contemporaneamente si proverà che:

Data su F, di genere aritmetico P_a, una rete irriducibile dotata di punti base ordinarî, ma non di linee fondamentali, se p è il suo genere e χ il n° delle sue curve cuspidate, si ha

$$P_a = \frac{1}{24}\chi - p.$$

Adesso si dimostra agevolmente l'invarianza assoluta del P_a. Difatti considerando una rete $|C|$ di F, priva di linee fondamentali, ed avente punti base ordinarî nei punti che son fondamentali per una certa trasformazione birazionale della F, per effetto di questa trasformazione essa rete dà luogo ad una rete irriducibile priva di curve fondamentali, dotata di punti base ordinarî nei punti fondamentali esistenti sulla superficie trasformata, ma il cui genere e il cui numero di curve cuspidate uguagliano gli analoghi caratteri di $|C|$. Ciò basta per concludere che le due superficie di cui si parla hanno lo stesso genere aritmetico. Dunque:

Il genere aritmetico P_a è invariante per tutte le trasformazioni birazionali di F.

7. Dalla relazione (6) segue che *Ω è un invariante relativo che varia in senso contrario ad I*, cioè se F trasformasi nella F^* e su F si hanno l^* punti fondamentali ed l linee fondamentali, otteniamo:

$$\Omega + l = \Omega^* + l^*.$$

Ciò posto se su F si ha una rete $|C|$ irriducibile, dotata di σ punti base ordinarî, ma sprovvista di curve fondamentali, trasformando F nella F^* con una trasformazione che abbia su F σ punti fondamentali nei punti base di $|C|$, ma non linee fondamentali, la rete $|C|$ darà una rete $|C^*|$, la quale ci offrirà il mezzo di trovare l'espressione di Ω^*:

$$\Omega^* = \pi - 9p + 9,$$

e poiché $\Omega = \Omega^* + \sigma$, potremo dire che:

Data su F una rete irriducibile di genere p, con σ punti base ordinarî ma senza curve fondamentali, se π è il genere della sua jacobiana

$$\Omega = \pi - 9p + \sigma + 9 \text{ (18)},$$

ove Ω è il carattere di F già definito col sussidio di reti senza punti base.

(18) Introducendo il *genere virtuale* $\bar{p}$ della rete, e il genere virtuale $\bar{\pi}$ della sua jacobiana, in armonia con la convenzione di riguardare come inesistenti i punti base della rete, si trova, mercè la formola del testo $\Omega = \bar{\pi} - 9\bar{p} + 9$. Il fatto che l'espressione $\bar{\pi} - 9\bar{p} + 9$ è un carattere di F si sarebbe potuto più rapidamente provare usando dei metodi di Castelnuovo-Enriques. Se non l'ho fatto, è stato per esporre la cosa nel modo più elementare possibile.

8. Se la superficie F possiede un n° finito e di curve eccezionali, il n° e è evidentemente un invariante relativo, che varia in senso opposto ad Ω. Sicché $\Omega + e$ *è un invariante assoluto*. Lo chiameremo il *genere lineare* $P^{(l)}$ di F.

9. La definizione da noi data di genere aritmetico di una superficie concorda con le note definizioni. Basta per mostrare ciò calcolare il P_a col sussidio di una rete di sezioni piane: allora si ricade nella espressione già incontrata da Zeuthen e Nöther [19]. La (6) ci dice che l'invariante Ω da noi incontrato non è che l'invariante già considerato da Castelnuovo–Enriques al n° 5 della loro importante Memoria: *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* («Annali di Matematica», (3), t. VI, 1901) [20]. Del resto, come ho già accennato, si può verificare direttamente che Ω non differisce dall'invariante considerato da Castelnuovo–Enriques, profittando delle proposizioni stabilite dal prof. Enriques nei *Fondamenti* citati, le quali pongono una relazione fra la jacobiana di una rete e il sistema aggiunto alle curve della rete stessa. – Ne segue che l'invariante assoluto $P^{(l)}$ ottenuto al n° precedente, è proprio quello che già si considerava sotto il nome di genere lineare, per le superficie con un n° finito di curve eccezionali.

10. Ed ora, per terminare, due parole di applicazione ai problemi numerativi sulle reti di curve tracciate sopra una superficie.

Sulla F di caratteri I, P_a, abbiasi la rete $|C|$ irriducibile priva di curve fondamentali e dotata di σ punti base ordinari. Ne sia n il grado, p il genere, χ il n° delle curve cuspidate, τ il n° dei fasci di curve che si osculano, μ il n° delle curve dotate di due punti doppi, ν il n° dei fasci di curve che hanno fra loro doppio contatto.

Rappresentando le $|C|$ con le rette di un piano F^*, la F verrà rappresentata sul piano n–plo F^*, privo di punti fondamentali, e la cui curva di diramazione J^* di genere π, sarà la trasformata della jacobiana J di $|C|$. Ragionando come al n° 3 si giunge a stabilire che i flessi di J^* rispondono alle cuspidi di curve C, e le cuspidi di J^* ai punti base d'osculazione dei fasci di C che si osculano; e inoltre che a ciascuno dei punti doppi di J^* rispondono su J i due punti di contatto dei fasci di C con doppio contatto, e a ciascuna delle coppie di punti di contatto delle tangenti doppie di J^*

(19) La definizione del P_a con una rete qualunque di curve, anziché con una rete di sezioni piane, si sarebbe potuta dedurre dalla definizione dei citati Autori, *presupponendo dimostrata la invarianza del* P_a. La definizione *ex novo* con una rete qualsiasi, ha il vantaggio di contenere in sé questa proprietà d'invarianza, ed è perciò che abbiamo voluto stabilirla in modo autonomo.

(20) I citati Autori indicano con ω il suddetto invariante. Per evitar confusioni, in questa Nota ho fatto uso di lettere maiuscole pei caratteri della superficie.

due punti che son doppi per una medesima curva C (21). Applicando allora alla J^* le formule di Plücker, e tenendo presenti i precedenti risultati, si esprimeranno χ , ν , μ , τ in funzione di n , p , σ , P_a , I, e si potrà enunciare:

Data sopra una superficie di caratteri P_a , I una rete irriducibile di grado n, priva di curve fondamentali, e dotata di σ punti base ordinarî, vi sono in essa rete

$$24 (p + P_a)$$

curve dotate di cuspide,

$$3 (n + 6 p - \sigma - I + 8 P_a - 2)$$

fasci di curve che si osculano,

$$\frac{1}{2} [(n + \sigma + 4 p + I)^2 - 3 n - \sigma - 78 p - I - 72 P_a + 2]$$ (22)

curve dotate di due punti doppi, e

$$2 [(n + p)^2 - 17 p - 5 n + 2 \sigma + 2 I - 18 P_a + 6]$$

fasci di curve che hanno fra loro doppio contatto.

Per $P_a = 0 , I = -1$ si ricade nelle formole date dal Caporali per le reti di curve piane (*loc. cit.*, nn. 14, 15).

(21) Se però $|C|$ ha punti base semplici, ad ognuno di questi risponde una tangente doppia di J^*. Ai punti base semplici in questioni di questa natura bisogna badare in un modo speciale. Ved. CAPORALI, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* («Collect. math., in mem. CHELINI », 1881).

(22) Risulta dall'osservazione già fatta pei punti base semplici, che ognuno di tali punti abbassa d'un'unità il numero delle curve con due punti doppî. — Nel caso che ogni curva della rete $|C|$ sia la completa intersezione della superficie data F con una superficie d'ordine m, variabile in una rete situata genericamente rispetto ad F, il n° delle curve cuspidate e il n° delle curve con due punti doppi uguagliano rispettivamente il n° delle superficie della rete che hanno con F contatto stazionario o doppio contatto. — In una Nota di ZEUTHEN (C. R., t. 89, pp. 899-901; 1879, 2° semestre) si trova la formola che esprime il n° delle superficie di un sistema ∞^2 qualunque, che hanno contatto stazionario, e la formula che esprime il n° di quelle che hanno doppio contatto con F. L'A. perviene a queste formole col metodo delle degenerazioni. Ponendo nell'ultima formola di Zeuthen $[\mu\nu] = 1$, $[\mu' \nu] = 3 (m - 1)$, $C = 0$, $C' = 12 (m - 1) (m - 2)$, $E = 3 (m - 2)$ e introducendo il genere aritmetico di F e il genere aritmetico di F e il genere della sezione di F con una superficie della rete, si ha una formola concordante con l'analoga del testo. Similmente si può trasformare la penultima formola di Zeuthen.

XI.

SULLA FORMA DELLE RIGATE CUBICHE (*)

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *62* (1903), pp. 863–879.

Ivi si studiano le forme e le proprietà topologiche di connessione delle rigate cubiche dotate di due direttrici distinte o infinitamente vicine (rigate di Cayley).

Il metodo, che sarà poi seguito pei monoidi dal discepolo dello scrivente R. Torelli (1908), fu, secondo afferma, forse con troppo affetto verso il maestro, l'altro valorosissimo discepolo di lui, A. Comessatti, il « fattore propulsivo ed iniziatore » del nuovo indirizzo, per lo studio delle questioni di realtà delle falde delle superficie razionali e delle superficie algebriche qualunque, nel quale Comessatti lasciò risultati che hanno preso posto definitivo nella scienza (1).

È questo un esempio significativo di quanto possa anche una modesta idea (2) quando è gettata in un campo di grande naturale feracità, com'era appunto l'intelletto di A. Comessatti.

Lo studio di cui alla presente Nota fu fatto dallo scrivente per incitamento di Enriques, di cui egli era assistente a Bologna.

(*) In luogo della Nota originale viene qui riprodotto il testo redatto dall'Autore a commento della Nota stessa, apparso nel volume: F. SEVERI, *Memorie scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, p. 393.

(1) Ved. per esempio A. COMESSATTI, *Problemi di realtà per le superficie e le varietà algebriche*, Atti del IX Convegno Volta, promosso dalla R. Accademia d'Italia, 1940.

(2) Il lavoro 10 nacque per procurare all'Autore, in un periodo in cui si guardava forse troppo nei concorsi universitari alla specificità dei titoli, un titolo specifico di geometria descrittiva, che non fosse del tutto banale.

XII.

SULLE SUPERFICIE CHE RAPPRESENTANO LE COPPIE DI PUNTI DI UNA CURVA ALGEBRICA

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *38* (1903), pp. 119–134 (*).

Lo studio delle superficie che rappresentano serie algebriche ∞^2 di gruppi di punti di una curva algebrica, è un argomento interessante perché abbraccia una vasta classe di superficie irregolari, le quali, se la serie di cui si tratta non è contenuta in una serie lineare, ammettono integrali di differenziali totali di 1ª specie. Questa Nota contiene i risultati che ho ottenuto relativamente alla classe più semplice di superficie che si presentano in quest'ordine di ricerche: quelle che rappresentano coppie di punti di una curva (1). A questo lavoro spero di poterne far seguire altri sopra le superficie che rappresentano serie algebriche ∞^2 qualsiansi di gruppi di punti (2).

Giacché le proprietà delle superficie che nascono dalle coppie di punti di una curva del genere due (superficie iperellittiche), sono state oggetto di ricerche esaurienti, specialmente da parte del sig. Humbert, in questa Nota io inizierò lo studio delle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere $\pi \geq 3$.

I caratteri invarianti di queste superficie, dei quali assegno i valori, sono: il genere geometrico P_g, il genere aritmetico P_a e il genere lineare $p^{(1)}$, che vengono espressi dalle formole:

$$P_g = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1), \qquad P_a = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \pi, \qquad p^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

Prendendo come immagine delle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere π, la congruenza delle corde di una curva canonica $\gamma_2^{2\pi-2}$ dello spazio $S_{\pi-1}$, trovo che sulla congruenza suddetta il sistema canonico completo vien segato dai complessi lineari di rette dello $S_{\pi-1}$.

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 25 gennaio 1093.

(1) Mentre stavo redigendo questo scritto, ho saputo indirettamente che il sig. M. De Franchis, verso la fine del 1901, si era occupato della stessa questione e che aveva determinato i caratteri invarianti delle superficie in discorso, senza però pubblicare i suoi risultati, che io non conosco affatto. Pensando che un lavoro del sig. De Franchis sull'argomento, per la indipendenza delle nostre ricerche, potrebbe differire dal mio nei metodi ed in qualcuna delle questioni trattate, non stimo inopportuna la pubblicazione di questa Nota.

(2) Su questo argomento ha richiamata la mia attenzione il chiarissimo prof. F. Enriques al quale rendo qui vivissime grazie pei consigli datimi.

Stabiliti i risultati precedenti per via puramente geometrica, passo ad alcune brevi considerazioni sugli integrali di differenziali totali di 1ª specie annessi alle varietà che rappresentano le coppie, le terne ,$\cdots$, le π–ple di punti di una curva di genere π, e trovo che la superficie delle coppie di punti possiede π di questi integrali, cioè tanti quant'è la differenza $P_g - P_a$.

Coll'uso degli integrali doppi di 1ª specie ritrovo rapidamente la generazione delle curve canoniche per le superficie delle coppie di punti; e quindi accenno all'uso che si può fare degl'integrali multipli di 1ª specie per dimostrare una proprietà analoga sulle varietà delle terne, delle quaderne, $\cdots$ di punti.

1. Cominceremo dal fare un'osservazione che ha per iscopo di ben definire le superficie delle quali ci vogliamo occupare.

Considerando le coppie di punti di una curva possiamo convenire di riguardare come identiche due coppie che differiscano solo per l'ordine, oppure possiamo fare la convenzione opposta. Se pensiamo la nostra curva riferita birazionalmente ad una curva C dello spazio S_4, ogni corda di C rappresenterà in modo sensibile una coppia di punti considerata indipendentemente dall'ordine, sicché una immagine Φ delle superficie che rappresentano le coppie non ordinate, si otterrà segando la varietà delle corde di C con uno S_3. Invece una superficie Ψ che nasca dalla considerazione delle coppie ordinate, si potrà riferire alla superficie Φ contata due volte, e la curva di diramazione sarà segnata su Φ dalle tangenti di C. Una superficie Ψ si può anche riguardare come immagine delle coppie di punti di due curve *distinte*, razionalmente identiche.

La rappresentazione analitica nello spazio a 4 dimensioni $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ di una superficie in corrispondenza biunivoca colle coppie ordinate della curva piana $f(\xi\eta) = 0$, si può ottenere considerando due punti $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$ variabili sulla curva e ponendo:

$$x_1 = \xi_1 , \qquad x_2 = \eta_1 , \qquad x_3 = \xi_2 , \qquad x_4 = \eta_2 ,$$

e la rappresentazione nello stesso spazio di una superficie in corrispondenza biunivoca colle coppie non ordinate, si otterrà per esempio ponendo:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 , \qquad x_2 = \xi_1 \xi_2 , \qquad x_3 = \eta_1 + \eta_2 , \qquad x_4 = \eta_1 \eta_2 .$$

In questa Nota mi occuperò delle superficie che rappresentano coppie non ordinate, e perciò nel seguito quando si parlerà di coppie di punti di una curva, si sottintenderà « non ordinate ». Un'osservazione analoga deve farsi per le varietà delle terne, delle quaderne, $\cdots$ di punti.

2. Prendiamo come modello projettivo dell'ente ∞^1 del genere π (non iperellittico), la curva canonica $\gamma_2^{2\pi-2}$ dello spazio $S_{\pi-1}$. Se rappresentiamo le rette di questo spazio coi punti di una varietà V a $2\pi - 4$ dimensioni immersa in uno spazio Σ a $\binom{\pi}{2} - 1$ dimensioni, assumendo come coordinate

di un punto dello spazio Σ le coordinate Grassmanniane di una retta dello spazio $S_{\pi-1}$, un complesso lineare di rette, cioè l'insieme delle rette di $S_{\pi-1}$ le cui coordinate soddisfano un'equazione lineare, verrà rappresentato da una sezione iperpiana di V; un complesso quadratico, cioè l'insieme delle rette le cui coordinate soddisfano un'equazione di 2° grado, dalla sezione di V con una quadrica, e così via.

In questa rappresentazione la congruenza delle corde di γ ha per immagine una superficie F di V, i cui punti corrispondono biunivocamente *senza eccezione* alle corde di γ. Tenendo conto di ciò e del fatto noto che sulla curva γ, non iperellittica, non ci sono serie razionali di gruppi di 2 punti, si conclude *eccezione* alle corde di γ. Tenendo conto di ciò e del fatto noto che sulla curva γ, non iperellittica, non ci sono serie razionali di gruppi di 2 punti, si conclude che *la superficie F è priva di curve eccezionali.*

Ad una rigata generata dalle corde di γ che appartengono ad un dato complesso lineare, rispondono su F i punti di una sezione iperpiana, sicché l'ordine $p^{(2)}$ di F uguaglierà il numero delle corde di γ appartenenti a due dati complessi lineari. Se assumiamo come complessi lineari seganti quelli (speciali) costituiti dalle rette che si appoggiano a due dati $S_{\pi-3}$ incidenti secondo uno $S_{\pi-4}$, si hanno $\binom{2\pi-3}{2} - \pi$ corde appoggiate allo spazio intersezione, e $\binom{2\pi-2}{2}$ corde giacenti nello $S_{\pi-2}$ congiungente.

Sarà dunque:

$$p^{(2)} = \binom{2\pi-2}{2} + \binom{2\pi-3}{2} - \pi = (\pi-2)(4\pi-5) - 1 .$$

Fissiamo uno spazio a $\pi-3$ dimensioni, α, e consideriamo la rigata Γ delle corde di γ appoggiate ad α. Gli $S_{\pi-2}$ per α segano su Γ una serie lineare di gruppi di $\binom{2\pi-2}{2}$ generatrici, e su quella sezione iperpiana f di F che rappresenta Γ, si ha in corrispondenza una serie lineare ∞^1, della quale A indicherà un gruppo generico. Con $|A|$ s'indicherà la serie stessa, e quando occorra anche la serie completa da essa individuata.

Fra gli $S_{\pi-2}$ per α ce ne saranno $6(\pi-1)$ tangenti a γ, e ciascuno di questi $S_{\pi-2}$ segherà γ ulteriormente in $2\pi-4$ punti. Le corde che congiungono il punto di contatto di ogni tale $S_{\pi-2}$ coi $2\pi-4$ punti ulteriori, son rappresentate su f dai punti doppi della serie $|A|$. Sicché dicendo $p^{(1)}$ il genere di f avremo:

$$2\binom{2\pi-2}{2} + 2p^{(1)} - 2 = 6(\pi-1)(2\pi-4) ,$$

donde:

$$p^{(1)} = (\pi-2)(4\pi-5) .$$

3. Per un punto di γ passano $2\pi-3$ generatrici di Γ, a ciascuna delle quali risponde un punto su f; viceversa ad un punto di f rispondono due punti di γ. Mediante la corrispondenza fra γ ed f i gruppi canonici di γ si tra-

sformano in gruppi di $(2\pi-2)(2\pi-3)$ punti di f, che appartengono ad una medesima serie lineare di ordine $(2\pi-2)(2\pi-3)$. Per caratterizzare questa serie lineare si osservi che un gruppo canonico segato da uno $S_{\pi-2}$ per α, dà luogo, trasformandosi mediante la corrispondenza, ai punti di un gruppo A, ciascuno da contarsi due volte, perché rappresenta due punti del gruppo canonico dal quale siamo partiti. Dunque i gruppi canonici di f dànno gruppi $2A$.

Ciò posto diciamo B il gruppo dei punti di f che rappresentano le tangenti di γ appoggiate ad α. Queste tangenti coi loro punti di contatto segnano su γ un gruppo jacobiano della serie canonica, il quale, essendo equivalente al triplo di un gruppo canonico, trasformandosi nel passaggio da γ ad f, dà luogo ivi ad un gruppo $6A$. D'altra parte le generatrici di Γ che passano pei punti del gruppo jacobiano suddetto, sono le tangenti a γ in questi punti, e le rette che congiungono ciascuno di essi alle ulteriori intersezioni dei rispettivi $S_{\pi-2}$ tangenti a γ e passanti per α. Queste ultime generatrici di Γ sono rappresentate su f dal gruppo jacobiano della serie $|A|$, ossia da un gruppo $K+2A$, ove $|K|$ indica la serie canonica di f. Dunque:

$$|6A| = |B+K+2A|. \tag{1}$$

La varietà delle corde di γ taglia α in una curva a, in corrispondenza biunivoca con Γ (nel caso $\pi=4$, a sarà una retta sestupla). La serie segata su a dagli $S_{\pi-4}$ del suo spazio si rispecchia in una serie lineare di ordine $\binom{2\pi-3}{2}-\pi$ di gruppi di generatrici della Γ, e quindi in una serie lineare $|C|$ sopra la f.

Consideriamo una quadrica Q fra quelle che passano per γ. Il complesso quadratico delle tangenti a Q taglia Γ in $2p^{(2)}$ generatrici, che sono le tangenti di γ appoggiate ad α e le rette di Γ che escono dai $2\binom{2\pi-3}{2}-2\pi$ punti in cui Q taglia a, ciascuna da contarsi due volte. Poiché i punti di f che rappresentano le generatrici di Γ uscenti dai punti aQ, costituiscono evidentemente un gruppo $2C$, le generatrici di Γ appartenenti al complesso quadratico, saranno rappresentate su f da un gruppo $B+2\cdot 2C$. D'altronde le sezioni di Γ coi complessi quadratici sono rappresentate su f da gruppi che appartengono al doppio della serie $|A+C|$ segata dagli iperpiani; quindi avremo:

$$|2A+2C| = |B+4C|. \tag{2}$$

Dal confronto delle (1) e (2) segue:

$$|K| = |2(A+C)|.$$

Dunque la serie canonica di f è il doppio della serie individuata da una sua sezione iperpiana.

Poiché evidentemente la superficie F non possiede punti multipli isolati, in forza di quanto ora abbiamo dimostrato, il doppio del sistema $|f|$ delle sezioni iperpiane, costituirà il sistema aggiunto ad $|f|$. Da ciò segue che:

Le sezioni iperpiane di F sono curve del sistema canonico.

4. Nel corso del ragionamento svolto al n° precedente abbiamo tacitamente ammessa la proposizione seguente, che ora dimostreremo:

Se fra due curve C, C' si ha una corrispondenza algebrica d'indici qualunque, ad una serie lineare di C rispondono su C' gruppi di una serie algebrica contenuti in una medesima serie lineare.

Supponiamo prima che fra C, C' si abbia una corrispondenza $(1, x')$, cioè ad un punto di C ne rispondano x' di C' e ad un punto di C' uno di C. È ben noto allora che ad una serie lineare di C risponde su C' una serie lineare. Prendiamo invece su C' una serie lineare g_m e rappresentiamo con γ_m la serie algebrica che si ha su C come trasformata di g_m. Se facciamo vedere che due gruppi qualsiansi di γ_m stanno sempre in una serie lineare d'ordine m, potremo asserire che γ_m è contenuta in una serie lineare dello stesso ordine.

Ora, se diciamo $\Gamma_1\Gamma_2$ due gruppi di γ_m e G_1G_2 due gruppi di g_m costituiti rispettivamente da punti omologhi a punti di $\Gamma_1\Gamma_2$, a ciascun gruppo della g^1_m congiungente G_1 e G_2 risponde *un* gruppo di una serie razionale γ^1_m contenente Γ_1 e Γ_2.

Da ciò, profittando di una proposizione del prof. Enriques [3], si deduce che γ^1_m è contenuta in una serie lineare.

Il caso in cui fra C, C' si ha una corrispondenza (x, x'), si riconduce al precedente considerando l'ente ausiliario D costituito dalle coppie di punti omologhi nella corrispondenza fra C, C', ed osservando che fra C e D si ha una corrispondenza $(1, x')$ e fra D e C' una corrispondenza $(x, 1)$.

5. Ritorniamo adesso alla superficie F della quale ci siamo occupati ai nn. 2, 3, e proviamo anzitutto che essa è normale.

I coni che projettano la curva γ dai suoi punti, son rappresentati su F da un sistema ∞^1 di curve h, razionalmente identiche a γ, e di ordine $2\pi - 3$. Per ogni punto di F passeranno due curve h, e due qualunque di queste curve si taglieranno in un punto. Alle rette dello spazio $S_{\pi-1}$ passanti per un dato punto rispondono sopra V punti di uno spazio $S_{\pi-2}$, sicché ogni curva h appartiene ad un tale spazio. Di più giacché i complessi lineari di rette dello $S_{\pi-1}$ segano sopra un corpo projettante γ da un suo punto, la serie completa che vien segata sul cono stesso dagli $S_{\pi-2}$ pel vertice, sopra ogni curva h gli iperpiani di Σ taglieranno una serie completa; ossia le curve h saranno normali. Da ciò si trae che *ogni* curva canonica di F taglierà una h in $2\pi - 3$ punti appartenenti ad uno spazio $S_{\pi-3}$.

Sopra una curva h consideriamo $\pi - 2$ punti *indipendenti* e diciamo $h_1, h_2, \cdots, h_{\pi-2}$ le altre curve h uscenti dai punti scelti. Poiché queste h si segano a due a due in un punto, potremo condurre per esse uno $S_{\binom{\pi}{2}-2}$, e quindi esisterà almeno una curva canonica contenente $h_1, h_2, \cdots, h_{\pi-2}$. Dicasi k

(3) F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti di Palermo, *10* (1896), pp. 30–35.

il resto di una tal curva canonica quando se ne tolgano le h. Pel modo col quale abbiamo scelto le curve $h_1, h_2, \cdots, h_{\pi-2}$ esse tagliano una h generica in $\pi - 2$ punti indipendenti, e quindi la k sega una h generica in un gruppo di $\pi - 1$ punti ben determinati, che stanno nello $S_{\pi-3}$ congiungente i punti in cui la h stessa è segata dalle $h_1, h_2, h_{\pi-2}$. Giacché, variando la h nel sistema ∞^1, questo gruppo di $\pi - 1$ punti descrive *una* curva, sarà unica la curva canonica che contiene come parti $h_1, h_2, \cdots, h_{\pi-2}$; il che non avverrebbe se F non fosse normale.

Combinando questo risultato con quello ottenuto al n° 3, potremo enunciare:

La superficie F è una superficie canonica, ossia il sistema delle sue sezioni iperpiane costituisce il sistema canonico completo.

Sotto altra forma potremo dire che:

Sulla congruenza delle corde di una curva canonica $\gamma_\pi^{2\pi-2}$ dello $S_{\pi-1}$, il sistema canonico completo è segato dai complessi lineari di rette dello spazio $S_{\pi-1}$.

Siccome i punti d'appoggio su γ di una corda incidente a un dato $S_{\pi-3}$, a, fanno parte di un gruppo della $g^1_{2\pi-2}$ canonica segata su γ dagli $S_{\pi-2}$ per a, e inoltre alle corde di γ appoggiate ad a rispondono, come s'è visto, i punti di una sezione iperpiana di F, la proposizione precedente si potrà presentare sotto forma invariantiva nel modo che segue:

Sopra una superficie rappresentante le coppie di punti di una curva di genere π, il sistema canonico è individuato da ogni curva che provenga dalle coppie appartenenti ad un gruppo variabile di una $g^1_{2\pi-2}$ canonica.

6. Poiché F è normale nello spazio Σ, avremo subito l'espressione del suo *genere geometrico*:

$$P_g = \binom{\pi}{2}.$$

Il genere $p^{(1)}$ delle sue sezioni iperpiane non sarà altro che il *genere lineare* di F:

$$p^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

Passiamo a calcolare il genere aritmetico P_a. Consideriamo perciò il fascio di sezioni iperpiane di F, che rappresentano le rigate delle corde di γ appoggiate ai varî $S_{\pi-3}$ di un fascio, cioè agli $S_{\pi-3}$ che giacendo in un dato $S_{\pi-2}, \sigma$, passano per un dato $S_{\pi-4}, \omega$. I punti doppi staccati di curve del fascio si ottengono in due modi:

a) Considerando le rigate che hanno per $S_{\pi-3}$ direttori quelli che congiungono ω coi punti $\sigma\gamma$. Le sezioni iperpiane corrispondenti si spezzano in curve h, le quali rappresentano i coni che dai punti $\sigma\gamma$ projettano γ, e in parti residue di ordine $p^{(2)} - 2\pi + 3$. Sia H_1 un punto $\sigma\gamma$, e sia h_1 la curva h corrispondente. I punti comuni ad h_1 ed alla relativa parte residua, rappresentano le rette che vanno da H_1 ai punti ove lo $S_{\pi-2}$ per ω e tangente a γ in H_1,

sega ulteriormente γ. Sicché per ognuna di quelle sezioni iperpiane spezzate si ottengono $2\pi - 4$ punti doppi staccati.

b) Considerando le rigate che hanno per $S_{\pi-3}$ direttori le traccie sopra σ degli $S_{\pi-2}$ bitangenti a γ e passanti per ω. Sopra ogni sezione iperpiana di F rappresentante una tale rigata, si ha un punto doppio. In questo modo si ottengono dunque $2(\pi - 1)(9\pi - 20)$ punti doppi staccati, tante essendo le bitangenti della projezione generica di γ sopra un piano.

Chiamando *I l'invariante di Zeuthen-Segre* relativo ad F, avremo perciò:

$$I = 2(\pi - 1)(9\pi - 20) + (2\pi - 2)(2\pi - 4) - p^{(2)} - 4p^{(1)} =$$
$$= (\pi - 1)(2\pi - 3) - 4.$$

Applicando la relazione fondamentale di Nöther [4]:

$$p^{(1)} + I = 12P_a + 9,$$

facilmente trarremo che il *genere aritmetico* di F è espresso dalla formola:

$$P_a = \binom{\pi}{2} - \pi.$$

7. A prima vista può sembrare che i ragionamenti svolti per la superficie F che rappresenta, nel modo projettivamente fissato, le coppie di punti della γ_π, non valgano più nel caso $\pi = 3$; ma è facile persuadersi che interpetrati convenientemente essi continuano a sussistere. La curva canonica γ del genere 3 è una quartica piana generale, della quale diciamo ϱ il piano. Rappresentando le rette di ϱ coi punti di un secondo piano, poiché sopra ogni retta di ϱ si trovano 6 coppie di punti di γ, la superficie F che rappresenta le coppie di punti di γ, si ridurrà in tal caso ad un piano sestuplo. Sopra F avremo come curva di diramazione una curva γ' del 12° ordine (duale di γ) da contarsi due volte, perché sopra ogni tangente di γ due delle 6 coppie di punti coincidono fra loro, e così pure altre due. Le coppie di punti di γ allineate con un punto α di ϱ, son rappresentate su F dai punti di una retta sestupla f. Per ogni retta di ϱ passante per α si hanno 6 punti di f; sicché sopra f nasce una serie lineare di 6° ordine, la quale ha i suoi punti doppi nei punti comuni ad f ed alla curva γ', ciascuno da contarsi due volte. Dicendo $p^{(1)}$ il genere di f avremo dunque:

$$2 \cdot 6 + 2p^{(1)} - 2 = 24,$$

donde:

$$p^{(1)} = 7.$$

I ragionamenti dei nn. 3, 5 non subiscono che modificazioni formali per essere applicati al caso attuale, e si giunge alla conclusione che:

Il sistema canonico completo del piano sestuplo F è il sistema delle sue rette.

(4) Cfr. p. e. CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Annali di Mat., (3) 6 (1901), pp. 165–225.

Sicché il *genere geometrico* P_g di F è:

$$P_g = 3 ,$$

ed il *genere lineare* è:

$$p^{(1)} = 7 .$$

Per calcolare il genere aritmetico P_a si applica il ragionamento del n° precedente e non è forse inutile riprodurlo brevemente colle opportune modificazioni.

Per ogni punto di una retta σ del piano ϱ, otteniamo sopra F una retta sestupla f, che varia in un fascio. I punti doppi staccati dalle curve f si ottengono in due modi:

a) Considerando i punti comuni a σ e a γ. Al fascio di rette avente il centro in uno H_1 di tali punti, risponde una certa curva f_1 la quale si spezza in due rette triple sovrapposte; l'una di queste rette triple rappresenta le coppie di γ di cui un punto è H_1, l'altra le coppie di γ allineate con H_1. Le due rette triple hanno comuni i punti che rappresentano le coppie di γ situate sulla tangente in H_1, e di cui uno dei punti è H_1. Dunque per ogni curva come f_1 si hanno 2 punti doppi staccati.

b) Considerando i punti comuni a σ ed alle 28 bitangenti di γ. Al fascio di rette avente il centro in uno di tali punti risponde una f, che ha un punto doppio in un punto doppio di γ'.

Indicando come al solito con I *l'invariante di Zeuthen–Segre*, avremo:

$$I = 2 \cdot 4 + 28 - 6 - 4 \cdot 7 = 2 ,$$

e usando della relazione di Nöther, otterremo il *genere aritmetico* di F:

$$P_a = 0 .$$

Si può mettere in relazione il modello projettivo qui considerato per studiare le coppie di punti di una curva del genere π, con quello dato dal sig. Humbert in due Note dei *Comptes–Rendus* (5).

Ad ogni coppia di punti di γ se ne può associare un'altra: quella in cui la retta congiungente i punti della prima coppia, taglia ulteriormente γ. Questa ∞^2 di coppie di coppie, ai cui elementi corrispondono su F i gruppi di un'involuzione quadratica, si può rappresentare sopra un piano triplo T. Orbene, il piano triplo T non è altro che la projezione fatta sopra un piano, dal punto triplo della superficie di 6° ordine S, che il sig. Humbert definisce geometricamente così: si prenda una *superficie di Kummer* K ed un punto generico O dello spazio. Una retta per O taglia K in quattro punti e ad ognuna delle 3 possibili distribuzioni di quei quattro punti in due coppie, corrispondono 3 involuzioni quadratiche sulla retta segante. Se si prendono i 3 coniugati di O in quelle involuzioni, al variare della retta segante il luogo dei punti costruiti è la S di Humbert, la quale ha in O il punto triplo.

(5) Anno 1895, 1° semestre, p. 365 e p. 425.

8. Passiamo ora ad alcune considerazioni sugli integrali semplici e multipli annessi alle varietà delle coppie, delle terne, $\cdots$, delle π–ple di punti di una curva γ di genere π.

Immaginiamo la varietà algebrica V_π a π dimensioni, i cui elementi (punti) sono le π–ple di punti della curva γ. Fissando sopra γ $\pi - q$ punti arbitrarii e considerando tutte le π–ple di cui fan parte i punti fissati, ad esse corrisponderanno su V_π i punti di una varietà algebrica V_q che rappresenta le q–ple di punti di γ. Sopra V si hanno $\infty^{\pi-q}$ varietà V_q razionalmente identiche, e per ogni punto di V_q passano $\binom{\pi}{q}$ varietà V_q.

Supponendo che la varietà V_π sia immersa in uno spazio $S_{\pi+1}$, le coordinate $x_1 x_2 \cdots x_{\pi+1}$ dei suoi punti si esprimeranno come funzioni abeliane a 2π periodi degli argomenti $u_1 u_2 \cdots u_\pi$:

$$x_1 = M_1(u_1 \cdots u_\pi), \cdots, x_{\pi+1} = M_{\pi+1}(u_1 \cdots u_\pi),$$

legate dall'equazione di V_π:

$$H(x_1 x_2 \cdots x_{\pi+1}) = 0.$$

Se l'equazione della curva piana γ è $f(\xi\eta) = 0$, dicendo $I_1 I_2 \cdots I_\pi$ gli integrali abeliani di 1ª specie annessi a γ, cioè ponendo:

$$I_i = \int \frac{\varphi_i(\xi\eta)}{f\eta'} d\xi \qquad (i = 1, \cdots, \pi),$$

avremo:

$$u_i = I_i(\xi_1 \eta_1) + \cdots + I_i(\xi_\pi \eta_\pi),$$

ove $\xi_1 \eta_1, \cdots, \xi_\pi \eta_\pi$ sono π punti variabili di γ.

Poiché il differenziale algebrico:

$$du_i = \frac{\varphi_i(\xi_1\eta_1)}{f\eta_1'} d\xi_1 + \cdots + \frac{\varphi_i(\xi_\pi\eta_\pi)}{f\eta_\pi'} d\xi_\pi$$

è funzione simmetrica dei π punti variabili su γ, e ad una π–pla generica di punti di γ risponde un sol punto di V_π, e viceversa, sarà:

$$(1) \qquad du_i = A_{1i}\, dx_1 + \cdots + A_{\pi i}\, dx_\pi,$$

ove le A_{ki} son funzioni razionali di $x_1 x_2 \cdots x_{\pi+1}$.

Ne viene che:

$$u_i = \int A_{1i}\, dx_1 + \cdots + A_{\pi i}\, dx_\pi$$

sarà un integrale di differenziale totale ovunque finito sopra V_π.

Viceversa sia:

$$dv = P_1\, dx_1 + \cdots + P_\pi\, dx_\pi$$

un differenziale totale di 1ª specie annesso a V_π. Passando dalle variabili $x_1 \cdots x_\pi$ alle variabili $u_1 \cdots u_\pi$, avremo:

$$dv = du_1 \sum_k P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_1} + du_2 \sum_k P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + \cdots + du_\pi \sum_k P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_\pi} .$$

Le espressioni $\sum P_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$ risultano *a priori* funzioni abeliane di $u_1 \cdots u_\pi$ ma se effettivamente dipendessero da queste variabili l'integrale v non sarebbe dovunque finito sopra V_π. Dunque sarà:

$$dv = \lambda_1 du_1 + \cdots + \lambda_\pi du_\pi ,$$

ove le λ sono costanti.

La varietà V_π ammette π integrali distinti di differenziali totali di 1ª specie.

Ogni integrale di differenziale totale annesso a V_π, considerato sopra una varietà subordinata V_ϱ, dà luogo ad un'integrale analogo relativo a questa. In particolare si hanno così π integrali di differenziali totali sopra le superficie V_2 che rappresentano le coppie di punti della γ. È facile vedere che una tal superficie V_2 non può ammettere integrali distinti da quelli. Infatti sopra V_2 si ha un sistema ∞^1 d'indice 2, di curve V_1 che a due a due *si tagliano in un punto*. Un integrale di V_2 diverso dai precedenti, essendo costante sopra ciascuna delle V_1, è perciò costante su tutta la superficie.

Riandando alla immagine projettiva F delle coppie di punti della curva di genere π, considerata ai numeri precedenti, potremo dire:

La superficie F, che rappresenta le coppie di punti di una curva del genere π, ammette tanti integrali di differenziali totali di 1ª specie, quant'è la differenza fra il suo genere geometrico e il suo genere aritmetico.

9. Studiamo ora gl'integrali doppî. Se nell'integrale $\iint du_1 du_2$ passiamo dalle variabili u alle x, avremo:

$$\iint du_1 du_2 = \iint \sum_{ik} \frac{D(u_1 u_2)}{D(x_i x_k)} dx_i dx_k .$$

Giacché, come rilevasi dalla (1):

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = A_{ik} ,$$

verrà:

$$\iint du_1 du_2 = \iint \sum (A_{i1} A_{k2} - A_{i2} A_{k1}) dx_i dx_k ,$$

la quale ci dice che $\iint du_1 du_2$ è un'integrale doppio di 1ª specie relativo a V_π.

Viceversa sia:

$$\iint \sum P_{ik} dx_i dx_k \qquad (P_{ik} = - P_{ki} , P_{ii} = 0)$$

un tale integrale. Passando dalle variabili x alle u, otterremo:

$$\iint \sum P_{ik}\, dx_i\, dx_k = \iint \sum_{ik} \Sigma_{rs} P_{ik} \frac{D(x_i\, x_k)}{D(u_r\, u_s)}\, du_r\, du_s .$$

Ora se le $P_{ik} \dfrac{D(x_i\, x_k)}{D(u_r\, u_s)}$ fossero effettive funzioni abeliane delle $u_1 \cdots u_\pi$, come *a priori* risultano, l'integrale del 2° membro non sarebbe finito per tutti i valori di $u_1 \cdots u_\pi$, e quindi non potrebbe esserlo l'integrale del 1° membro. Potremo dunque porre:

$$\iint \sum P_{ih}\, dx_i\, dx_k = \sum \lambda_{rs} \iint du_r\, du_s ,$$

ove le λ sono costanti. Quindi:

La varietà V_π possiede $\binom{\pi}{2}$ *integrali doppi di 1ª specie.*

Così proseguendo si trova che:

La varietà V_π possiede $\binom{\pi}{q}$ *integrali q-pli di 1ª specie.*

Gl'integrali doppî di 1ª specie annessi a V_π interpretati sopra una V_q subordinata, dànno ivi integrali analoghi: in particolare così si ottengono sopra ogni V_2 i $\binom{\pi}{2}$ integrali doppî ad essa relativi. – Così per gl'integrali tripli, ecc. Dunque:

I generi geometrici delle varietà che rappresentano le coppie, le terne, $\cdots$, le $(\pi - 1)$-ple, le π-ple di punti di una curva del genere π, sono rispettivamente $\binom{\pi}{2}, \binom{\pi}{3}, \cdots, \binom{\pi}{\pi - 1}, 1$.

10. – Vediamo come con l'uso degli integrali doppî si ritrovi facilmente la generazione delle curve canoniche per le superficie che rappresentano coppie di punti di una curva.

Consideriamo una V_2 contenuta in V_π e projettiamola genericamente sopra lo spazio ordinario (xyz). Avremo una certa superficie Ψ di ordine n, $[\Psi(xyz) = 0]$, la quale sarà riferita birazionalmente a V_2, e non ci saranno elementi eccezionali per la trasformazione né su V_2 né su Ψ.

Sopra la Ψ sarà:

$$u_i = \int \frac{A_i\, dx + B_i\, dy}{\Psi'_z} \quad , \quad \iint du_1\, du_2 = \iint \frac{Q_{12}}{\Psi'_z}\, dx\, dy ,$$

ove le A_i, B_i sono polinomi aggiunti di ordine $n - 2$ in xyz, e Q_{12} è un'aggiunta di ordine $n - 4$ (6). Riguardando u_1, u_2 come funzioni di un punto di Ψ, avremo:

$$\iint du_1\, du_2 = \iint \frac{D(u_1\, u_2)}{D(xy)}\, dx\, dy = \iint \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\Psi'^2_z}\, dx\, dy .$$

(6) Cfr. ad esempio PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1897, t. I).

La superficie V_2 dalla quale siamo partiti, sia ottenuta considerando le π–ple di punti di γ di cui fan parte $\pi - 2$ punti fissati $\xi_3 \eta_3 , \cdots , \xi_\pi \eta_\pi$. Nei punti di Ψ sarà allora:

$$du_i = \frac{\varphi_i (\xi_1 \eta_1)}{f' \eta_1} d\xi_1 + \frac{\varphi_i (\xi_2 \eta_2)}{f' \eta_2} d\xi_2$$

ove $\xi_1 \eta_1 , \xi_2 \eta_2$ indicano due punti variabili di γ. In particolare se questi due punti li supponiamo appartenenti ad un gruppo variabile di una $g^1_{2\pi-2}$, formata da gruppi canonici di γ, la quale sia segata dal fascio:

$$\varphi_1 (\xi\eta) + \lambda\varphi_2 (\xi\eta) = 0 ,$$

avremo:

$$\varphi_1 (\xi_1 \eta_1) + \lambda\varphi_2 (\xi_1 \eta_1) = 0 \quad , \quad \varphi_1 (\xi_2 \eta_2) + \lambda\varphi_2 (\xi_2 \eta_2) = 0 .$$

Sicché dicendo h la curva di Ψ che rappresenta le coppie $\xi_1 \eta_1 , \xi_2 \eta_2$ variabili nel modo detto, nei punti di h sarà:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = 0 .$$

Moltiplicando la prima di queste per $\partial\xi_1/\partial x$, la seconda per $\partial\xi_2/\partial x$ e sommando viene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 .$$

In modo analogo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 .$$

Ossia avremo:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_1 + \lambda B_2 = 0 ,$$

donde:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 ,$$

e quindi:

$$Q_{12} = 0 .$$

Viceversa se si considera la curva che $Q_{12} = 0$ sega sopra Ψ, fuori delle linee multiple, risalendo si vede che essa coincide colla curva h. Ritroviamo così la proposizione del n° 5.

Il procedimento attuale si estende anche alle varietà che rappresentano terne, quaderne, $\cdots$ di punti di una curva, e permette di affermare che sopra la V_q delle q–ple di punti di una curva del genere π, le varietà a $q - 1$ dimen-

sioni che rappresentano q–ple di punti appartenenti ad un gruppo variabile di una $g^{q-1}_{2\pi-2}$ canonica, appartengono al sistema canonico di V_q (7).

Se si assume come modello projettivo della varietà V_q che rappresenta le q–ple di punti di una curva del genere π, la varietà costituita dagli S_{q-1} q–secanti della curva canonica $\gamma^{2\pi-2}_{\pi}$ dello $S_{\pi-1}$, siccome gli iperpiani passanti per uno spazio $S_{\pi-q-1}$ segano su γ una $g^{q-1}_{2\pi-2}$ canonica, gli spazi S_{q-1} q–secanti appoggiati al dato $S_{\pi-q-1}$ costituiranno nella varietà di tutti gli S_{q-1} q–secanti, una varietà appartenente al sistema canonico. E giacché fra i complessi lineari di S_{q-1} dello spazio $S_{\pi-1}$, cioè fra i sistemi di S_{q-1} le cui coordinate Grassmanniane soddisfano ad un'equazione lineare, ve ne sono precisamente $\binom{\pi}{q}$ linearmente indipendenti, avremo che:

Sopra il sistema degli spazî S_{q-1} q–secanti della curva canonica del genere π, i complessi lineari di spazî S_{q-1} segano il sistema canonico.

(7) Il sistema canonico di una varietà a q dimensioni (che fu considerato per la prima volta da Nöther) si può introdurre estendendo la definizione data da Enriques pel sistema canonico di una superficie (Cfr., p. e., *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, Atti della R. Acc. di Torino, 37 (1901), pp. 19–40), oppure mediante la considerazione degli integrali q–pli di 1ª specie annessi alla varietà.

XIII.

SU ALCUNE QUESTIONI DI POSTULAZIONE

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *17* (1903), pp. 73–103.

§ 1. – Postulazione di una varietà completa intersezione di ipersuperficie.

1. Nella mia Nota « *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre* » [1] ho dimostrato (vedi al n° 8) che la postulazione di una varietà Φ_{r-h} dello S_r, priva di parti multiple, ma avente del resto singolarità qualsiasi, la quale sia completa intersezione di h ipersuperficie degli ordini $n_1 \cdots n_h$, per le ipersuperficie di ordine l *abbastanza alto*, è espressa da

$$(1)\qquad \begin{cases} \chi(l) = \binom{l+r}{r} - \sum_i \binom{l-n_i+r}{r} \\ + \sum_{ik} \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + (-1)^h \binom{l-n_1-\cdots-n_h+r}{r}, \end{cases}$$

ove i sommatorî si estendono alle combinazioni semplici di 1^a, 2^a, $\cdots$, $(h-1)^a$ classe degli indici $1, 2, \cdots, h$.

Adesso dimostrerò che *la formola* (1) *dà la postulazione della varietà* Φ, *di cui sopra*, PER TUTTI I VALORI DI l, purché si convenga di attribuire il valore zero a quelle espressioni $\binom{l-n_i-\cdots-n_k+r}{r}$ in cui $l-n_i-\cdots-n_k<0$, il valore 1 al simbolo $\binom{r}{r}$; e inoltre si convenga di accettare per valore della postulazione il numero $\binom{l+r}{r}$, allorquando, per essere l troppo piccolo (minore di tutte le n), non esistono ipersuperficie d'ordine l passanti per Φ.

2. Siano

$$F_1 = 0, \cdots, F_h = 0$$

le equazioni delle h ipersuperficie $F_1, \cdots F_h$, che s'intersecano nella Φ. Si supporrà che gli ordini $n_1 \cdots n_h$ delle forme $F_1 \cdots F_h$ siano disposti in ordine

(1) Rendiconti dei Lincei, (5) *11* (1902). [Nota IX, p. 95; N.d.R.].

decrescente, che cioè si abbia

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_h .$$

Supponiamo provato l'asserto per la varietà ψ_{r-h+1}, priva di parti multiple (per l'ipotesi fatta su Φ), intersezione delle ipersuperficie $\boldsymbol{F}_1 \cdots \boldsymbol{F}_{h-1}$, e si rappresenti con $\chi_1(l)$ la formola che, tenendo conto delle convenzioni fatte, esprime per ogni valore di l la postulazione di ψ.

Le ipersuperficie d'ordine l passanti per ψ formano un sistema lineare Σ di dimensione $\binom{l+r}{r} - 1 - \chi_1(l)$, e le ipersuperficie d'ordine l passanti per Φ formano un sistema lineare Σ' x volte esteso.

Limitiamoci per poco al caso $l \geq n_{h-1} + n_h$: allora le ipersuperficie d'ordine l che contengono come parte $\boldsymbol{F}_h$ formano un sistema lineare Σ'' di dimensione $\binom{l-n_h+r}{r} - 1$. Il sistema intersezione di Σ e Σ'' è evidentemente il sistema Σ''' delle ipersuperficie d'ordine l che passano per ψ e contengono come parte $\boldsymbol{F}_h$, ed è quindi di dimensione

$$\binom{l-n_h+r}{r} - 1 - \chi_1(l-n_h) . \tag{2}$$

Giacché il *massimo comun divisore* [2] $(F_1 \cdots F_{h-1} F_h)$ dei due moduli $(F_1 \cdots F_{h-1})$ ed (F_h) è divisibile per ogni divisore comune a questi due moduli, e giacché inoltre i sistemi delle forme di un dato ordine l appartenenti ai tre moduli suddetti, coincidono coi sistemi di forme che si annullano rispettivamente nei punti di Φ, ψ e $\boldsymbol{F}_h$ [3], così il sistema lineare meno ampio che contenga Σ e Σ'', ossia il loro sistema congiungente, è Σ'. Applicando allora la relazione fra le dimensioni di due sistemi lineari e quelle dei loro sistemi intersezione e congiungente [4], avremo:

$$\begin{cases} \binom{l+r}{r} - 1 - \chi_1(l) + \binom{l-n_h+r}{r} - 1 = \\ = \binom{l-n_h+r}{r} - 1 - \chi_1(l-n_h) + x , \end{cases} \tag{3}$$

(2) Secondo la denominazione di Kronecker; *massimo modulo comune* secondo la denominazione di Hilbert. — Per comprendere la ragione di queste denominazioni conviene ricordare che, con Kronecker, un modulo M dicesi *divisibile per* o *multiplo di* un altro modulo N (questo un *divisore* di quello) quando ogni forma di M appartiene ad N. Se $M = (F_1 \cdots F_h)$, $N = (K_1 \cdots K_S)$ il modulo $D = (F_1 \cdots F_h K_1 \cdots K_S)$ dicesi *m.c.d.* di M ed N, perché è un tal divisore di M ed N che, contenendo OGNI forma risultante dall'addizione di una di M con una di N, è divisibile per OGNI divisore comune ad M ed N.

(3) Come risulta dal 1° teorema enunciato al n° 3 della mia Nota citata.

(4) Dalla quale relazione si può far discendere facilmente la relazione fondamentale di Hilbert, usata nella mia Nota.

ossia:

$$x = \binom{l+r}{r} - 1 - \chi_1(l) + \chi_1(l - n_h).$$

Se dunque diciamo $\chi(l)$ la postulazione di Φ, avremo:

$$\chi(l) = \chi_1(l) - \chi_1(l - n_h),$$

e ciò per ogni valore di $l \geq n_{h-1} + n_h$; donde in virtù della espressione ammessa per $\chi_1(l)$ si deduce che la (1) è applicabile quando $l \geq n_{h-1} + n_h$ [5].

Supponiamo adesso che sia $n_{h-1} + n_h > l > n_h$. Allora non ci saranno ipersuperficie d'ordine $l - n_h$ passanti per ψ, e quindi in base alle nostre convenzioni si dovrà porre:

$$\chi_1(l - n_h) = \binom{l - n_h + r}{r},$$

donde si trae che la dimensione del sistema intersezione di Σ e Σ'', calcolata con la (2), riducesi a -1. Ma poiché in tal caso Σ''' manca la (3) continuerà ad essere valida e quindi la (1) sarà ancora applicabile.

Se $l = n_h$ e se inoltre $n_h = n_{h-1} = \cdots = n_{h-i} < n_{h-i-1}$, imponendo ad una forma F di ordine l di appartenere al modulo $(F_1, \cdots, F_h)$ le imponiamo di potersi rappresentare così:

$$F \equiv c_0 F_h + c_1 F_{h-1} + \cdots + c_i F_{h-i},$$

ove le c sono costanti. - Le forme $F_h, \cdots, F_{h-i}$ sono linearmente indipendenti; chè se così non fosse avrebbero in comune almeno ∞^{r-i} zeri, e quindi le ipersuperficie $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_h$ si taglierebbero in una varietà di almeno $r - h + 1$ dimensioni, contro il supposto.

Ma dunque F è costretta ad appartenere ad un sistema lineare ∞^i di forme d'ordine $l = n_h$, e quindi essa è costretta a soddisfare al $\binom{l+r}{r} - 1 - i$ condizioni. - La (1) in tal caso, mercè le convenzioni fatte, riducesi appunto a

$$\chi(l) = \binom{l+r}{r} - 1 - i.$$

Infine nel caso $l < n_h$ la (1) è valida per convenzione.

3. Se supponiamo $h = r - 1$, la Φ sarà una curva riducibile o non, ed avremo

$$\chi(l) = \binom{l+r}{r} - \sum_i \binom{l - n_i + r}{r} + \cdots + (-1)^{r-1} \binom{l - n_1 - \cdots - n_{r-1} + r}{r}.$$

(5) Cfr. questo semplice ragionamento con quello del n° 5 della mia Nota.

Nel caso $l \geq \sum n_i - r$ si trova facilmente:

$$\chi(l) = n_1 \cdots n_{r-1}\, l - \frac{1}{2} n_1 \cdots n_{r-1} (n_1 + \cdots + n_{r-1} - r - 1) \text{ (6)},$$

e analogamente nel caso $l = \sum n_i - r - 1$ si trova:

$$\chi\left(\sum n_i - r - 1\right) = \frac{1}{2} n_1 \cdots n_{r-1} \left(\sum n_i - r - 1\right) + 1.$$

a) Supponiamo che la curva Φ sia irriducibile e priva di punti multipli. Allora detto m il suo ordine e p il suo genere si ha:

$$m = n_1 \cdots n_{r-1}, \qquad p = \frac{1}{2} n_1 \cdots n_{r-1} \left(\sum n_i - r - 1\right) + 1 \text{ (7)},$$

sicché:

$$\chi\left(\sum n_i - r - 1\right) = p, \qquad \chi(l) = ml - p + 1 \qquad \left(l \geq \sum n_i - r\right).$$

b) Se la Φ si spezza in due curve irriducibili e prive di punti multipli, di ordini m, m', di generi rispettivi p, p', e aventi δ punti a comune si otterrà:

$$m + m' = n_1 \cdots n_{r-1},$$

$$2p - 2 + \delta = m \left(\sum n_i - r - 1\right), \quad 2p' - 2 + \delta = m' \left(\sum n_i - r - 1\right) \text{ (8)},$$

e quindi:

$$\chi\left(\sum n_i - r - 1\right) = p + p' + \delta - 1,$$

$$\chi(l) = (m + m')\, l - (p + p' + \delta - 1) + 1 \qquad \left(l \geq \sum n_i - r\right).$$

4. Se $h = r - 2$, ossia Φ è una superficie qualunque priva di parti multiple, avremo:

$$\chi\left(\sum n_i - r - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{12} \left[2 \sum n_i^2 + 3 \sum n_1 n_2 - 3 (r+1) \sum n_i + \frac{(3r+2)(r+1)}{2}\right] n_1 \cdots n_{r-2} - 1$$

(6) Difatti ponendo uguale allo zero una qualunque delle n nella espressione iniziale di $\chi(l)$, si trova $\chi(l) = 0$; e siccome χ è funzione razionale intera simmetria e di grado r nelle n, avremo:

$$\chi(l) = c n_1 \cdots n_{r-1} (n_1 + \cdots + n_{r-1} + c'),$$

ove c e c' sono indipendenti dalle n, ed è anzi evidente che c è indipendente anche da l. Ponendo $n_1 = n_2 = \cdots = n_{r-1} = 1$ nell'espressione primitiva di $\chi(l)$ si trova $\chi(l) = l + 1$, profittando della quale si ottiene c' in funzione di l e di c. Inoltre $\chi(l)$ si annulla per $l = 0$, $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = \cdots n_{r-1} = 1$, dal che si trae il valore di c e quindi quello di c'.

(7) Vedi ad esempio la mia Memoria, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità projettive*, Memorie della R. Acc. di Torino, (2) *52* (1902), n° 12. [Memoria VIII, p. 33; n.d.R.].

(8) Ibidem, § 8.

e per $l \geq \sum n_i - r$:

$$\chi(l) = n_1 \cdots n_{r-2} \binom{l+1}{2}$$

$$- \frac{1}{2} n_1 \cdots n_{r-2} (\sum n_i - r)\, l + \chi(\sum n_i - r - 1) + 1 \quad (9).$$

a) Se la superficie Φ è irriducibile e priva di punti multipli, dettone m l'ordine, p il genere della sezione iperpiana, P_a il genere aritmetico, si ha:

$$m = n_1 \cdots n_{r-2}, \qquad p = \frac{1}{2} n_1 \cdots n_{r-2} (\sum n_i - r) + 1,$$

$$P_a = \chi(\sum n_i - r - 1) \quad (10),$$

$$\chi(l) = m \binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1 \qquad (l \geq \sum n_i - r).$$

Si potrà anche calcolare l'invariante relativo Ω (11) della Φ, e si troverà:

$$\Omega = n_1 \cdots n_{r-2} (\sum n_i - r - 1)^2 + 1.$$

b) Se Φ si spezza in due parti irriducibili, prive di punti multipli (o al più dotate di d punti improprî, se $r = 4$), delle quali siano m, m' gli ordini, p, p' i generi delle sezioni iperpiane, P_a, P'_a i generi aritmetici, Ω, Ω' gl'invarianti relativi analoghi a quello già definito per la Φ in *a*) avremo (12):

$$m + m' = n_1 \cdots n_{r-2},$$

$$2p - 2 + \delta = m(\sum n_i - r), \qquad 2p' - 2 + \delta = m'(\sum n_i - r),$$

(9) La prima di queste formole si ottiene facilmente osservando che, essendo $\chi(\sum n_i - r - 1) = -1$ per $n_1 = \cdots = n_{r-2} = 0$, dovrà aversi:

$$\chi(\sum n_i - r - 1) = n_1 \cdots n_{r-2} (c_0 \sum n_i^2 + c_1 \sum n_1 n_2 + c_2 \sum n_i + c_3) - 1,$$

ove le c sono costanti da determinarsi. La determinazione si fa dando alle n valori particolari convenienti. — La seconda formola si ottiene osservando che dalla (1) per $h = r - 2$, $l \geq \sum n_i - r - 1$, si trae subito:

$$\chi(l+1) = \chi(l) + \chi_1(l+1)$$

ove χ_1 è la postulazione della sezione iperpiana di Φ. Profittando delle formole del n° 3 la precedente uguaglianza ricorrente fornisce appunto la relazione da dimostrarsi.

(10) *Sulle intersezioni delle varietà...*, § 5.

(11) Vedi ad esempio la mia Nota, *Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *37*, (1902), n° 7.

(12) *Sulle intersezioni...*, §§ 9, 10. (A pag. 33, righi 17, 18 dal basso, leggi « uno stesso sistema » invece di « differenti sistemi »). Le relazioni del testo discendono da quelle ivi contenute tenendo presente che se una superficie dotata di singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli se è nello S_3, punti doppi improprî se è nello S_4, e nessun punto multiplo se è in uno spazio superiore) è di ordine μ_0, 1ª classe μ_1, 2ª classe μ_2, 2° ceto ν_2, si ha:

$$12 P_a = 2\mu_2 + \nu_2 - 8\mu_1 + 12\mu_0 - 12$$

$$\Omega = \mu_2 + \nu_2 - 6\mu_1 + 9\mu_0 + 1.$$

$$r \geq 5 \begin{cases} P_a + P'_a + \pi = \chi\,(\sum n_i - r - 1) \\ 2\,\pi - 2 = \delta\,(\sum n_i - r - 1) \\ \Omega + \Omega' + 4\,\pi + \theta + \theta' - 5 = n_1 \cdots n_{r-2}\,(\sum n_i - r - 1)^2 + 1 \end{cases}$$

$$r = 4 \begin{cases} P_a + P'_a + \pi + d = \chi\,(n_1 + n_2 - 5) \\ 2\,\pi - 2 + 4\,d = \delta\,(n_1 + n_2 - 5) \\ \Omega + \Omega' + 4\,\pi + \theta + \theta' + 8\,d - 5 = n_1\,n_2\,(n_1 + n_2 - 5)^2 + 1, \end{cases}$$

ove δ, π denotano l'ordine e il genere della curva D comune alle due parti, e θ, θ' indicano i *caratteri d'immersione* [13] di essa curva sopra ciascuna delle componenti di Φ.

Inoltre avremo:

$$\chi\,(l) = (m + m')\binom{l+1}{2}$$

$$- l\,(p + p' + \delta - 2) + P_a + P'_a + \pi + 1\,, \qquad (r \geq 5\,,\ l \geq \sum n_i - r),$$

$$\chi\,(l) = (m + m')\binom{l+1}{2}$$

$$- l\,(p + p' - \delta - 2) + P_a + P'_a + \pi + d + 1\,, \qquad (r = 4\,,\ l \geq n_1 + n_2 - 4).$$

§ 2. – Restsatz per le curve iperspaziali.

5. Le due curve C, C' irriducibili, prive di punti multipli, costituiscano insieme la completa intersezione delle $r - 1$ ipersuperficie $F_1 = 0, \cdots, F_{r-1} = 0$. Chiameremo *ipersuperficie aggiunte* a C tutte le ipersuperficie passanti per C'.

Ogni *ipersuperficie aggiunta a C e passante per un gruppo di una qualunque serie lineare esistente su C, fa parte di un sistema lineare di aggiunte, che segna la serie.*

L'equazione

$$\sum_0^d \lambda_i f_i = 0$$

ove le f_i son forme di un certo ordine n delle coordinate omogenee $x_0\,x_1 \cdots x_r$, rappresenti il sistema di ipersuperficie che segna la serie lineare g^d_μ, d'ordine μ, dimensione d, esistente su C [14]. Per adesso la serie suddetta si supporrà priva di punti fissi (per quanto il ragionamento successivo richieda solo ch'essa sia priva di punti fissi *multipli*).

(13) *Il genere aritmetico...*, n° 1. Se $\bar\pi$ è il genere virtuale di una curva tracciata sopra una superficie, $\bar n$ il suo grado virtuale, θ il carattere d'immersione, si ha: $\theta = 2\,\bar\pi - 2 - \bar n$.

(14) È ben noto che una serie lineare si può sempre segare sopra C con un sistema di ipersuperficie così esteso come la serie, in guisa cioè che nessuna delle ipersuperficie del sistema contenga C.

Non s'introduce una restrizione essenziale supponendo che una ipersuperficie generica del sistema suddetto seghi in punti tutti distinti la curva composta $C + C'$ (15), e in particolare che ciò accada per la ipersuperficie $f_0 = 0$.

Le r forme $F_1, \cdots, F_{r-1}, f_0$ avranno a comune $nn_1 \cdots n_{r-1}$ zeri distinti (se $n_1, \cdots, n_{r-1}$ sono gli ordini delle F), e quindi ogni forma che possegga quel gruppo di zeri si potrà rappresentare come combinazione lineare di quelle (16).

Sia $H_0 = 0$ l'equazione di un'aggiunta a C, che passi pel gruppo G_μ della g^d_μ, segnato da $f_0 = 0$. Per metterci nell'ipotesi più generale supporremo che fuori di G_μ la $f_0 = 0$ tagli C nel gruppo G_ν, e che $H_0 = 0$ fuori di G_μ tagli C nel gruppo G_ω (costituito da punti distinti o no). Poiché in G_ν si annullano tutte le f, e in G_μ e nei punti comuni a C' e alle singole f si annulla H_0, avranno luogo le identità:

$$\begin{aligned} H_0 f_0 &\equiv 0 \cdot F_1 + \cdots + 0 \cdot F_{r-1} + H_0 f_0 \\ H_0 f_1 &\equiv A_{11} F_1 + \cdots + A_{1,r-1} F_{r-1} + H_1 f_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_0 f_d &\equiv A_{d1} F_1 + \cdots + A_{d,r-1} F_{r-1} + H_d f_0, \end{aligned}$$

dalle quali si rileva anzitutto che $H_1 = 0, \cdots, H_d = 0$ sono aggiunte a C, e che passano tutte pei punti di G_ω (17).

Inoltre per valori arbitrari delle λ, si otterrà:

$$H_0 \sum_0^d \lambda_i f_i \equiv F_1 \sum_1^d \lambda_i A_{i1} + \cdots + F_{r-1} \sum_1^d \lambda_i A_{i,r-1} + f_0 \sum_0^d \lambda_i H_i .$$

Si osservi che le forme $H_0, \cdots, H_d$ sono linearmente indipendenti, perché se non lo fossero, per la precedente identità, esisterebbero ipersuperficie $\sum \lambda_i f_i = 0$ passanti per C, contro il supposto; e per la stessa ragione non esisterà nessuna ipersuperficie $\sum \lambda_i H_i = 0$ passante per C. La identità precedente ci dice ancora che essendo g^d_μ priva di punti fissi (e quindi non avendo un suo gruppo generico qualche punto sulla $f_0 = 0$) per un gruppo generico di essa passerà una ipersuperficie $\sum \lambda_i H_i = 0$.

(15) Difatti sopra una proiezione piana generica C^m_1 della C^m, eseguita dal centro O, la g^d_μ (priva di punti fissi *multipli*) può segarsi con un sistema lineare di aggiunte d'ordine l, in guisa che fuori degli s punti doppi di C_1 la curva generica di quel sistema tagli C_1 in $ml - 2s$ punti distinti e la proiezione di $C'^{m'}$ (fatta dallo stesso centro) in $m'l$ punti distinti. Proiettando quelle aggiunte da O avremo un sistema di ipersuperficie soddisfacenti alla richiesta condizione.

(16) *Rappresentazione di una forma qualunque*, etc.

(17) Né fanno eccezione gli eventuali punti comuni a G_ν e G_ω. Difatti se nel punto P la $H_0 = 0$ ha molteplicità d'intersezione I con C, e $f_1 = 0$ molteplicità d'intersezione i (≥ 1), la ipersuperficie $H_0 f_1 - A_{11} F_1 - \cdots - A_{1,r-1} F_{r-1} \equiv H_1 f_0 = 0$ avrà molteplicità d'intersezione $I + i$, donde segue che H_1 ha molteplicità d'intersezione $I + i - 1$.

Sicché la serie lineare g_μ^d segata sopra C dal sistema $\sum \lambda_i H_i = 0$ coincide con la serie inizialmente considerata.

Si vede subito adesso che la proposizione è vera anche per serie con punti fissi (semplici o multipli) (18).

6. Dal teorema precedente segue che:

Tutte le aggiunte di un dato ordine passanti per un gruppo di punti della C segnano sopra essa una serie lineare completa.

In particolare:

Tutte le aggiunte di un dato ordine segnano su C una serie lineare completa (19).

Se C' manca, ossia se C è completa intersezione di $r - 1$ ipersuperficie, avremo:

Sopra la curva C dello S_r irriducibile, priva di punti multipli, e completa intersezione di $r - 1$ ipersuperficie, quelle di un ordine dato qualunque segano una serie lineare completa.

In particolare:

Una curva irriducibile, priva di punti multipli, che sia completa intersezione di $r - 1$ ipersuperficie è normale (20).

Donde segue subito:

Una M_h irriducibile, priva di M_{h-1} multiple, e completa intersezione di $r - h$ ipersuperficie è normale.

§ 3. – Costruzione, mediante le aggiunte, della serie canonica e delle serie non speciali esistenti sopra una curva irriducibile e priva di punti multipli. – Postulazione.

7. Ritornando alle due curve C, C' irriducibili, prive di punti multipli, che insieme costituiscono la completa intersezione di $r - 1$ ipersuperficie $F_1^{n_1} = 0, \cdots, F_{r-1}^{n_{r-1}} = 0$, diciamo m, m' i loro ordini p, p' i loro generi, δ il numero dei punti di mutuo appoggio.

(18) Difatti se la serie lineare $g_\mu^d + P$ ha il solo punto fisso k-plo P si conduca un'aggiunta (non contenente C) che passi pel gruppo G_μ di g_μ^d e abbia in P molteplicità d'intersezione k con C. Essa fa parte di un sistema lineare di aggiunte che segna la serie g_μ^d, e tutte le aggiunte di questo sistema, come risulta da un'osservazione già fatta, incontrano C, k volte in P. Ma dunque esse serviranno pure a segare la g_μ^d più il punto k-plo P.

(19) Nel caso che C appartenga allo S_3 e sia parziale intersezione delle superficie $F_1^{n_1} = 0$, $F_2^{n_2} = 0$, il teorema trovasi al § 8 della classica Memoria di Nöther nei *Mathematische Annalen*, Bd. 8. La dimostrazione di Nöther, basata sulla rappresentazione monoidale della C, è svolta solo per le aggiunte di ordine $n_1 + n_2 - 4$, ma, come Nöther stesso osserva altrove, essa può ripetersi per qualunque valore dell'ordine.

(20) La condizione che la curva non abbia punti multipli è *necessaria*. Si pensi ad esempio alla C^4 con un punto doppio intersezione di due quadriche dello S_3, che si toccano in quel punto.

Facciamo vedere anzitutto che se $p > 0$ *esistono* ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ aggiunte a C, ma *non passanti* per C. Infatti le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ segano sopra C' una serie non speciale $g_{2p'-2+\delta}$ [n° 3, *b*)] e perciò quelle fra esse che passano per C' soddisfano al più $p' + \delta - 1$ condizioni; mentre quelle che contengono $C + C'$ soddisfano a $\chi(l) = p + p' + \delta - 1 \left[\leq \binom{l+r}{r} \right]$ condizioni [n° 3, *b*)]. Quest'ultimo numero di condizioni se $p > 0$ è certo maggiore di $p' + \delta - 1$ e quindi è vero quanto si è asserito (21).

Dall'esistenza di ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1$ contenenti C' e non C segue poi l'esistenza di ipersuperficie di ordine maggiore soddisfacenti alle stesse condizioni.

8. La jacobiana delle $r - 1$ ipersuperficie $F_1 = 0, \cdots, F_{r-1} = 0$ e di due iperpiani, che è una ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r + 1$, passa pei δ punti comuni a C e C' e fuori di questi taglia C nei punti di contatto di quelle sue tangenti che si appoggiano allo S_{r-2} intersezione dei due dati iperpiani; i quali punti di contatto costituiscono il *gruppo jacobiano* della serie lineare ∞^1 segnata dagli iperpiani passanti pel suddetto S_{r-2} (22).

(21) Risulta di più che per la curva C' passano almeno ∞^{p-1} aggiunte di ordine $\sum n_i - r - 1$.

(22) I metodi esposti dal prof. ENRIQUES nella Nota, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, Atti della R. Acc. di Torino, 37 (1901), si possono anche usare per stabilire molto semplicemente le proposizioni fondamentali di geometria sopra una curva. Una trattazione di questa natura è stata già oggetto di un corso tenuto dal prof. Enriques stesso all'Università di Bologna (v. il *Bollettino di bibliografia* del LORIA, 1899, pag. 76).

Si ammetta stabilita l'unicità della serie completa a cui una data serie appartiene, come al n° 3 dei *Fondamenti*, e la definizione di somma e differenza di due serie, come ai nn. 6, 7. Si chiamerà *gruppo jacobiano* di una serie lineare ∞^1 il gruppo dei suoi punti doppi. Come al n° 13 si dimostrerà che i gruppi jacobiani delle g^1 appartenenti a una data serie stanno in una stessa serie lineare completa, che si chiamerà la *serie jacobiana* della data. Osservando che in una g^1 dotata di un punto fisso (p. e. nella g^1 segnata sopra una curva piana da un fascio di rette avente il centro in un punto semplice della curva) questo conta due volte nel gruppo jacobiano della serie, si giungerà a dimostrare che:

$$|(G + K)_j| = |G_j + 2K|,$$

ove $|G|$ indica la serie completa individuata dal gruppo G, e $|G_j|$ la serie jacobiana di $|G|$. Dalla precedente si trarrà:

$$|G_j + 2\,K| = |K_j + 2\,G|$$

e quindi:

$$|G_j - 2\,G| = |K_j - 2\,K|. \tag{1}$$

La serie $|G_j - 2\,G|$, indipendente dalla serie di partenza $|G|$, si dirà la *serie canonica*. Dicendo ν il n° dei punti doppi di $|G|$, che sia di ordine n, e ν' il n° dei punti doppi di $|K|$, che sia di ordine n', la (1) dà: $\nu - 2n = \nu' - 2n'$, sicchè il numero $p = \frac{1}{2}\nu - n + 1$ è un carattere della curva invariante per trasformazioni birazionali: il *genere*. L'ordine della

La serie lineare segnata su C, fuori dei δ punti nominati, dalle ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r + 1$ passanti per essi è completa [23], e inoltre contiene il gruppo jacobiano precedentemente costruito, e perciò non è altro che la *serie jacobiana* della g_m^r costituita dalle sezioni iperpiane di C.

Se $p > 1$ esistono, come si è visto, ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ aggiunte a C e non contenenti la C stessa, sicché tutte le ipersuperficie dell'ordine suddetto aggiunte a C, segano su C una g_{2p-2} completa; e poiché ogni gruppo di questa serie aumentato di due sezioni iperpiane di C dà un gruppo della serie jacobiana sopra considerata, la g_{2p-2} non sarà altro che la serie canonica completa, ossia sarà di dimensione $p - 1$ [24].

9. Siccome per le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ il passaggio per $C + C'$ equivale a $p + p' + \delta - 1$ condizioni e per quelle passanti per C il passaggio per C' equivale a p' condizioni [25], saranno $p + \delta - 1$ le condizioni alle quali soddisfano le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ obbligate al passaggio per C; donde segue che le ipersuperficie dell'ordine suddetto segano su C una $g_{2p-2+\delta}^{p-2+\delta}$, ossia una serie completa non speciale.

Inoltre essendo

$$(m + m')\, l - (p + p' + \delta - 1) + 1$$

la postulazione di $C + C'$ per le ipersuperficie d'ordine $l \geq \sum n_i - r$ [n° 3, *b*)], la postulazione di C per le stesse ipersuperficie sarà:

$$ml - p + 1 ,$$

giacché le ipersuperficie d'ordine $l \geq \sum n_i - r$ passanti per C segano su C' una serie completa non speciale $g_{m'l-\delta}^{m'l-\delta-p'}$.

10. Nell'enunciare i resultati ottenuti giova distinguere il caso in cui C' manca, dal caso opposto.

a) « Sopra la curva C_p^m irriducibile, priva di punti multipli, intersezione completa di $r - 1$ ipersuperficie di ordini $n_1, \cdots, n_{r-1}$, appartenenti allo S_r, le ipersuperficie di ordine $l \geq \sum n_i - r$ segano serie complete non speciali,

serie canonica sarà eguale a $2p - 2$. Come al n° 24 dei *Fondamenti* si dimostrerà che la serie canonica vien segata sopra una curva piana d'ordine m da tutte le aggiunte d'ordine $m - 3$. Così si troverà il significato di p per le curve piane, e si dimostrerà che la dimensione della serie canonica è $p - 1$. Ecc., ecc.

(23) Perché fra i suoi gruppi vi sono quelli segnati da ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r + 1$ passanti per C' *e non per* C.

(24) Se $p = 1$ esistono ancora ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ passanti per C' e non per C, ed esse non tagliano C fuori dei δ punti comuni a C e C'. Sicchè le ipersuperficie di quell'ordine passanti per C' soddisfano ad *una* condizione col passaggio per C.

(25) Ciò risulta dal n° precedente se $p' \geq 1$. Se poi $p' = 0$ sarà

$$\delta < m' (\sum n_i - r - 1)$$

e quindi ogni ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1$ passante per C conterrà C'.

sicché la postulazione di C per esse è espressa da $ml - p + 1$; le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ segano la serie canonica completa, e quelle di ordine minore serie speciali complete ».

b) « Sopra la curva C_p^m dello S_r irriducibile e priva di punti multipli, per la quale passano $r - 1$ ipersuperficie di ordini $n_1, \cdots, n_{r-1}$, che si secano ulteriormente in una curva $C_{p'}^{m'}$ pure irriducibile e priva di punti multipli, le ipersuperficie di ordine $l \geq \sum n_i - r - 1$ segano serie complete non speciali, sicché la postulazione di C per esse è espressa da $ml - p + 1$; e (se $p > 1$) la serie canonica di C è segata dalle ipersuperficie aggiunte di ordine $\sum n_i - r - 1$ » [26].

§ 4. – Restsatz per le superficie di un iperspazio.

11. Le due superficie ψ, ψ' irriducibili, *prive di linee multiple*, costituiscano la completa intersezione di $r - 2$ ipersuperficie dello S_r. Chiameremo *ipersuperficie subaggiunte* a ψ quelle che passano per ψ'.

Ogni subaggiunta a ψ che passi per una curva di un sistema lineare $|C|$ esistente sopra ψ, fa parte di un sistema lineare di subaggiunte il quale segna $|C|$.

La dimostrazione del teorema si fa per via perfettamente analoga a quella seguita nel caso delle curve. Si suppone cioè dapprima che il sistema $\infty^d |C|$ sia privo di curve fisse, e quindi che si possa segare con un sistema ∞^d di ipersuperficie in guisa che una generica di queste, tagli la superficie composta $\psi + \psi'$ in una curva *priva di componenti multiple*, e così ci si pone nelle condizioni in cui è applicabile la proposizione relativa alla rappresentabilità di una forma per combinazione lineare di altre. Stabilito il teorema pei sistemi privi di curve fisse, si estende subito anche a quelli che ne posseggono (semplici o multiple).

Dal teorema precedente si deduce che:

Tutte le ipersuperficie di un dato ordine subaggiunte a ψ e passanti per dati punti di ψ (in n° finito o infinito) segnano su essa un sistema lineare completo [27].

Si possono anche enunciare i corollarî analoghi a quelli già enunciati per le curve al n° 6.

(26) Nella Nota del prof. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare...*, Rendiconti di Palermo, 7, trovasi dimostrato che la postulazione di C_p^m, irriducibile e priva di punti multipli, per le ipersuperficie di ordine $l \geq m - 2$ è precisamente $lm - p + 1$. Questo risultato mentre è assai utile nelle questioni in cui la C vien definita solo mediante l'ordine e il genere, non differenzia tra loro le varie classi di curve che hanno lo stesso ordine e lo stesso genere. Sicchè, quando C sia maggiormente definita, il limite $\sum n_i - r - 1$ dato nel testo, riescirà generalmente inferiore a quello di Castelnuovo.

(27) Cioè non contenuto in un sistema più ampio di curve dello stesso ordine con gli stessi punti base *assegnati*.

§ 5. – Caso in cui la completa intersezione di $r-2$ ipersuperficie dello S_r non si spezza.

12. La superficie Φ dello S_r, irriducibile e priva di punti multipli, sia completa intersezione di $r-2$ ipersuperficie di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_{r-2}$.

Poiché sulla Φ le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r$ segano un sistema lineare di curve che stacca su ciascuna sezione iperpiana di Φ la serie canonica completa [n° 10, *a*)], la Φ sarà una superficie *regolare* [28]. Il sistema lineare suddetto sarà il *sistema aggiunto* $|C^a|$ al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di Φ, appunto perché le ipersuperficie di un ordine dato qualunque segano su Φ un sistema lineare completo (n° 11). Il sistema $|C^a - C|$ non sarà altro che il sistema lineare segato da tutte le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$, e siccome questo sistema non ha punti base su Φ si conclude che la superficie stessa è priva di curve eccezionali [29]. Inoltre il *sistema canonico* di Φ sarà precisamente $|C^a - C|$.

13. Sulla curva comune a Φ e ad una ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r$, la quale curva è completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie di ordini $n_1, \cdots, n_{r-2}, \sum n_i - r$, le ipersuperficie d'ordine $(\sum n_i + \sum n_i - r) - r - 1$ segano la serie canonica completa, sicché il sistema segato su Φ da tutte le ipersuperficie d'ordine $2\sum n_i - 2r - 1$ è il secondo aggiunto $|C^{2a}|$ di $|C|$. In generale si vede che il sistema completo segato su Φ da tutte le ipersuperficie d'ordine $i\sum n_i - ir - i + 1$ è lo *i–esimo aggiunto* $|C^{ia}|$ di $|C|$. Da ciò segue che il *sistema i–canonico* $|C^{ia} - C|$ è segato su Φ da tutte le ipersuperficie di ordine $i(\sum n_i - r - 1)$. Il valore dello i–genere P_i $(i \geq 2)$ si otterrà facendo $l = i(\sum n_i - r - 1)$ nella formola che dà $\chi(l)$ al n° 4, *a*). Ricordando l'espressione di Ω, ivi notata, avremo:

$$P_i = P_a + \frac{i(i-1)}{2}(\Omega - 1) + 1 \qquad (i \geq 2) \quad [30].$$

La formola di postulazione medesima, che dà $\chi(l)$ per $l \geq \sum n_i - r$, ci dice che i sistemi completi segati sulla Φ dalle ipersuperficie d'ordine $l \geq \sum n_i - r$, son regolari.

(28) Cfr. Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) *25* (1897), n° 28.

S'intende che l'affermazione del testo cade quando $\sum n_i - r = 0$, il che può avvenire soltanto se $r = 4$, $n_1 = n_2 = 2$. In tal caso però si ha una superficie che si sa essere razionale, e quindi regolare.

(29) Questa conclusione non è lecita allora e solo allora che $\sum n_i - r = 0$, ossia allorchè si tratta della superficie di Segre. In tal caso effettivamente si hanno su Φ delle curve eccezionali.

(30) La quale si poteva anche dedurre direttamente dalla regolarità di Φ. Vedi le formole al n° 20 della Memoria di Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali sulla teoria delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) *6* (1901). La formola che dà P_i cade in difetto soltanto per $r = 4$, $n_1 = n_2 = 2$ $(P_a = 0, \Omega = 5, P_i = 0)$; per $r = 4$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ $(P_a = P_i = \Omega = 1)$; per $r = 5$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ $(P_a = \Omega = P_i = 1)$.

Infine dal fatto che Φ è priva di curve eccezionali (tranne il caso di $r = 4$, $n_1 = n_2 = 2$), si deduce che il suo genere lineare coincide con l'invariante relativo Ω.

Riassumendo:

La superficie Φ dello S_r, priva di punti multipli e completa intersezione di $r-2$ ipersuperficie di ordini $n_1, \cdots, n_{r-2}$, è una superficie regolare e priva di curve eccezionali (se si esclude il caso $r = 4$, $n_1 = n_2 = 2$). Il sistema i-canonico ($i \geq 1$) vien segato su essa da tutte le ipersuperficie d'ordine $i(\sum n_i - r - 1)$, e le ipersuperficie d'ordine $l \geq \sum n_i - r$ segano sistemi regolari completi, in guisa che la postulazione di Φ per esse è espressa da

$$m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1,$$

m, p, P_a denotando rispettivamente l'ordine, il genere della sezione iperpiana e il genere aritmetico di Φ.

14. Un'osservazione utile pel seguito è che tutte le ipersuperficie di un dato ordine passanti per Φ, dànno come sezioni sopra un iperpiano generico tutte le M_{r-2} dello stesso ordine passanti per la sezione di Φ con quell'iperpiano. Questo fatto quando Φ è irreducibile si potrebbe derivare dalle considerazioni precedenti; ma è utile stabilirlo direttamente prescindendo dalla irreducibilità di Φ e supponendo solo ch'essa sia priva di parti multiple, tanto più che il ragionamento seguente si potrà estendere subito anche alle varietà superiori.

Siano dunque $F_1(x_0 x_1 \cdots x_r) = 0, \cdots, F_{r-2}(x_0 \cdots x_r) = 0$, le equazioni delle $r-2$ ipersuperficie che s'intersecano nella Φ. L'iperpiano $x_0 = 0$ sia generico in guisa che tagli Φ in una curva C priva di parti multiple, le cui equazioni saranno:

$$F_1(0\, x_1 \cdots x_r) = 0, \cdots, F_{r-2}(0\, x_1 \cdots x_r) = 0.$$

Se $F(x_0 \cdots x_r) = 0$ è una ipersuperficie dello S_r passante per C, ma non contenente l'iperpiano $x_0 = 0$, la sua sezione con $x_0 = 0$ passerà pure per C e quindi sarà [31]:

$$F(0\, x_1 \cdots x_r) \equiv A_1(x_1 \cdots x_r) F_1(0\, x_1 \cdots x_r) + \cdots$$
$$\cdots + A_{r-2}(x_1 \cdots x_r) F_{r-2}(0\, x_1 \cdots x_r),$$

donde:

$$F(x_0 x_1 \cdots x_r) \equiv A_1(x_1 \cdots x_r) F_1(x_0 x_1 \cdots x_r) + \cdots$$
$$\cdots + A_{r-2}(x_1 \cdots x_r) F_{r-2}(x_0 x_1 \cdots x_r) + x_0 H(x_0 x_1 \cdots x_r),$$

ossia:

$$F(x_0 \cdots x_r) - x_0 H(x_0 \cdots x_r) \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_{r-2} F_{r-2}.$$

(31) *Rappresentazione di una forma qualunque*, etc.

La forma $F - x_0 H$ non può essere né identicamente nulla né divisibile per x_0, appunto per l'ipotesi che F non contenga il fattore x_0. Perciò l'equazione $F(x_0 \cdots x_r) - x_0 H(x_0 \cdots x_r) = 0$ rappresenta una ipersuperficie passante per Φ e che dà per sezione su $x_0 = 0$ la $F(0\, x_1 \cdots x_r) = 0$; sicché è dimostrato l'asserto.

§ 6. – Costruzione, mediante le subaggiunte, del sistema canonico e dei sistemi aggiunti ai multipli successivi del sistema costituito dalle sezioni iperpiane di una superficie irriducibile, priva di punti multipli o dotata di soli punti doppi impropri. – Sistemi completi regolari. – Postulazione.

15. Siano ψ e ψ' le due parti irriducibili in cui si spezza la superficie Φ di cui parlammo al n° 4 *b*), e supponiamo dapprima che se anche la dimensione dello spazio ambiente è uguale a 4, le due parti suddette siano prive di punti multipli [32].

In tutto il seguito $|C|$ indicherà il sistema delle sezioni iperpiane di ψ, $|C_l|$ il sistema di ψ con tutte le ipersuperficie di ordine l; r_l, m_l, p_l la dimensione, il grado, e il genere rispettivi di questo sistema. Notoriamente si ha:

$$(1) \qquad \begin{cases} m_l = m l^2 \\ p_l = m \binom{l}{2} + l(p-1) + 1. \end{cases}$$

In relazione a ψ' si useranno notazioni analoghe dotate di apici.

16. Se $l \geq \sum n_i - r - 1$ *il sistema* $|C_l|$ *è regolare* [33].

Anzitutto giacché le curve canoniche, se esistono, sono al più di ordine $2p - 2 - m = m(\sum n_i - r - 1) - \delta$, il sistema $|C_l|$ sarà non speciale. Se l è abbastanza grande ($\geq \mu$) il sistema completo $|lC|$ è regolare [34] e quindi lo è $|C_l|$, che è contenuto totalmente in $|lC|$. Se il limite μ non è inferiore a $\sum n_i - r$, poiché $|C_l|$ ($l \geq \mu$) sega su una generica C una serie completa non speciale [n° 10 *b*)], sarà regolare anche il sistema completo $|lC - C| = |(l-1)C|$ [35], e quindi il sistema (forse parziale) $|C_{l-1}|$.

17. Dicendo Δ_l la deficienza (≥ 0) del sistema $|C_l|$ ($l \geq \sum n_i - r - 1$) avremo dunque pel teorema di Riemann-Roch:

$$r_l = m_l - p_l + P_a + 1 - \Delta_l,$$

(32) Con ciò, se siamo nello S_4, non veniamo per ora a studiare il *modello projettivo più generale* dell'ente algebrico ∞^2.

(33) Un sistema parziale dicesi *regolare* se tale è il sistema completo che lo contiene totalmente.

(34) Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) 25, n° 43.

(35) Castelnuovo, *Alcune proprietà*, etc., n° 39.

ossia:

$$(1) \qquad r_l = m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a - \Delta_l .$$

In particolare per $l = \sum n_i - r$, $\sum n_i - r - 1$, tenendo presenti le relazioni al n° 4 *b*) si hanno le formole:

$$(2) \qquad \begin{cases} r_{\sum n_i - r} = P_a + \pi + p + \delta - 2 - \Delta_{\sum n_i - r} \\ r_{\sum n_i - r - 1} = P_a + \pi - 1 - \Delta_{\sum n_i - r - 1} . \end{cases}$$

Poiché, come già si è osservato, se $l \geq \sum n_i - r$ le C_l segano su una generica C una g_{ml}^{ml-p} non speciale, ve ne saranno $\infty^{rl-ml+p-1}$ passanti per C: queste costituiranno un sistema che certo conterrà $|C_{l-1}|$, e dunque:

$$r_l - r_{l-1} = ml - p + 1 + \lambda_l \qquad (\lambda_l \geq 0).$$

Questa, grazie alla (1), dà:

$$(3) \qquad \Delta_{l-1} = \Delta_l + \lambda_l \qquad (l \geq \sum n_i - r).$$

18. Siccome sopra la curva C_k, segnata su ψ da una ipersuperficie d'ordine $k\,(\geq 1)$, le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i + k - r - 1$ passanti per la sezione di ψ' con la stessa ipersuperficie, segano la serie canonica [n° 10, *b*)] si può dire che:

Se esistono *ipersuperficie d'ordine* $\sum n_i - r - 1 + k$ $(k \geq 1)$ *subaggiunte a* ψ *e non passanti per* ψ, *esse segano sopra* ψ *fuori della curva D comune a* ψ *e* ψ' *il sistema completo aggiunto al sistema delle sezioni di* ψ *con ipersuperficie d'ordine k.*

Inoltre:

Se esistono *ipersuperficie d'ordine* $\sum n_i - r - 1$ *subaggiunte a* ψ, *ma non passanti per* ψ, *il sistema di tutte le subaggiunte di quell'ordine sega su* ψ, *fuori della D e delle curve eccezionali, il sistema canonico completo.*

Ma *a priori* non è lecito concludere che se esiste il sistema $|C_k^a|$ aggiunto a $|C_k|$ questo possa segarsi con ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1 + k$ subaggiunte a ψ, inquantoché potrebbero non esistere subaggiunte di quest'ordine non passanti per ψ. Analogamente dall'esistenza del sistema canonico, ossia dall'essere il genere geometrico $P_g > 0$, non si può *senz'altro* dedurre che esso possa segarsi con subaggiunte di ordine $\sum n_i - r - 1$. Le considerazioni successive proveranno appunto che queste conclusioni son lecite.

19. Supposto che esistano subaggiunte di ordine l non contenenti ψ (e quest'ipotesi è evidentemente lecita per l abbastanza grande) s'indicherà con $|H_l|$ il sistema da esse segato su ψ fuori di D.

Sia $l\,(\geq \sum n_i - r + 1)$ così grande che esista il sistema $|H_l|$. Fra le M_{r-1}^l per ψ' ve ne sono $\binom{l+r}{r} - r_l' - 1$ indipendenti (si sottintenda linearmente) e fra quelle che oltre a passare per ψ' contengono un iperpiano gene-

rico I ve ne sono $\binom{l-1+r}{r} - r'_{l-1} - 1$ indipendenti; sicché le M^l_{r-1} per ψ' segano su I un sistema di dimensione $\binom{l+r-1}{r-1} + r'_{l-1} - r'_l - 1 = \binom{l+r-1}{r-1} - 1 - (m'l - p' + 1 + \lambda'_l)$, il quale è costituito da M^l_{r-2} per C', sezione di ψ' con I. Queste M^l_{r-2} segano su C (sezione di ψ con lo stesso iperpiano) una $g_{ml-\delta}$ non speciale [appunto per l'ipotesi $l \geq \sum n_i - (r-1)$], e quindi di dimensione $ml - p - \delta - x$ (ove $x \geq 0$ è la deficienza). Sicché vi sarà un sistema di dimensione

$$\binom{l+r-1}{r-1} - 1 - (m'l - p' + 1 + \lambda'_l + ml - p - \delta - x + 1)$$

costituito da quelle, fra le M^l_{r-2} suddette, che passano per la curva composta $C + C'$.

Il sistema ora definito è contenuto nel sistema di tutte le M^l_{r-2} per $C + C'$; avremo provato che coincide con questo sistema quando avremo fatto vedere che il sistema delle M^l_{r-1} per $\psi' + C$ sega su I il sistema di *tutte* le M^l_{r-2} per $C + C'$. Ora così effettivamente accade, perché il sistema delle M^l_{r-1} per $\psi' + C$ contiene quello delle M^l_{r-1} per $\psi + \psi'$, e come si è già osservato (v. al n° 14) quest'ultimo sega su I tutte le M^l_{r-2} per $C + C'$.

Dal n° 3 *b*) si trae che il sistema di tutte le M^l_{r-2} per $C + C'$ è di dimensione $\binom{l+r-1}{r-1} - 1 - [(m+m')l - (p + p' + \delta - 1) + 1]$, e dunque sarà:

$$m'l - p' + 1 + \lambda'_l + ml - p - \delta + 1 - x = (m+m')l - (p + p' + \delta - 1) + 1 \quad (36)$$

donde:

$$x = \lambda'_l .$$

20. Supponiamo sempre $k\ (\geq 2)$ così grande che esistano ipersuperficie d'ordine $l = \sum n_i - r - 1 + k$ passanti per ψ' e non per ψ.

Giacché, come risulta da n° precedente, delle M^l_{r-1} per $\psi' + C$ ve ne sono

$$\binom{l+r}{r} - r'_l - 1 - (ml - p - \delta - \lambda'_l + 1)$$

indipendenti, e inoltre ve ne sono

$$\binom{l+r}{r} - \left[(m+m')\binom{l+1}{2} - l(p + p' + \delta - 2) + P_a + P'_a + \pi + 1\right]$$

(36) Se pur esistendo M^l_{r-1} per ψ' non esistono M^l_{r-1} per $\psi' + \psi$ non potranno esistere M^l_{r-2} per $C' + C$ (n° 14) e allora i due membri di questa relazione saranno entrambi uguali ad $\binom{l+r-1}{r-1}$. Dunque il resultato sussiste anche in questo caso.

pure indipendenti e passanti per $\psi + \psi'$ [n° 4 *b*)]; avremo che le suddette M^l_{r-1} per $\psi' + C$ segano su ψ un sistema lineare di dimensione

$$\left[\binom{l+r}{r} - r'_l - 1 - (ml - p - \delta - \lambda'_l + 1)\right] -$$

$$- \left\{\binom{l+r}{r} - \left[(m+m')\binom{l+1}{2} - l(p+p'+\delta-2) + P_a + P'_a + \pi + 1\right]\right\} - 1 .$$

Ricordando le formole dei nn. 4 *b*), 15, 17, quest'ultima espressione diviene

$$P_a + p_{k-1} - 1 + \Delta'_{l-1} .$$

Questo numero esprime la dimensione del sistema $|H_l - C|$, e si ridurrebbe a -1 quando questo sistema mancasse. Siccome

$$|H_l| = |(kC)^a| = |C^a + (k-1)C| ,$$

se esiste $|C^a|$ il sistema $|H_l|$ conterrà certo C (perché $k \geq 2$) e il sistema residuo $|H_l - C|$ sarà uguale al sistema *completo* $|C^a + (k-2)C|$ che è precisamente il sistema aggiunto a $|C_{k-1}|$. Avremo dunque:

(1) $$r^{(a)}_{k-1} = P_a + p_{k-1} - 1 + \Delta'_{l-1} ,$$

ove il simbolo $r^{(a)}_{k-1}$ indica la dimensione del sistema completo aggiunto a $|C_{k-1}|$.

La postulazione di ψ' per le ipersuperficie d'ordine $l-1$ è espressa da (n° 17):

$$r'_{l-1} + 1 = m'\binom{l}{2} - (l-1)(p'-1) + P'_a - \Delta'_{l-1} + 1 ,$$

e la postulazione di $\psi + \psi'$ da [n° 4, *b*)]:

$$\chi(l-1) = (m+m')\binom{l}{2} - (l-1)(p+p'+\delta-2) + P_a + P'_a + \pi + 1 ;$$

sicché:

$$\chi(l-1) - r'_{l-1} - 1 = p_{k-1} + P_a + \Delta'_{l-1} = r^{(a)}_{k-1} + 1 .$$

Ne viene che sarà

$$\chi(l-1) = r'_{l-1} + 1$$

allora e solo allora che $r^{(a)}_{k-1} = -1$, ossia che non esiste $|C^a_{k-1}|$.

Dall'esistenza del sistema $|C^a_{k-1}|$ e di ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1 + k$ ($k \geq 2$) passanti per ψ' e non per ψ si deduce dunque l'esistenza di ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1 + (k-1)$ passanti per ψ' e non per ψ.

Se esiste $|C^a|$ esisteranno i sistemi $|C^a_2|, |C^a_3|, \cdots$, e siccome per k abbastanza grande esistono certo ipersuperficie d'ordine $l = \sum n_i - r - 1 + k$ passanti per ψ' e non per ψ, potremo per quanto precede affermare l'esistenza

di ipersuperficie di ordine $l-1$ passanti per ψ' e non per ψ, e quindi anche di ipersuperficie di ordine $l-2$, ecc. (fino all'ordine $\sum n_i - r - 1 + 1$).

Concludendo:

Se esiste il sistema aggiunto a quello delle sezioni di ψ con ipersuperficie d'ordine k (≥ 1), esso può *segarsi con ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1 + k$ passanti per ψ'.*

21. Supponiamo che il genere geometrico P_g della ψ sia positivo. Allora esisterà $|C^a|$ e quindi esisteranno ipersuperficie d'ordine $l = \sum n_i - r$ passanti per ψ' e non per ψ. Ragionando come al n° precedente con l'aiuto delle formole del n° 4 *b*) e delle (2) del n° 17 e profittando inoltre della proposizione dimostrata al n° 14, si vedrà che le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r$ passanti per ψ' e per una sezione iperpiana generica C di ψ, segano su questa superficie un sistema di dimensione

$$P_a + \Delta'_{\sum n_i - r - 1} - 1.$$

Giacché (n° 17) la postulazione di ψ' per le ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1$ è espressa da

$$r'_{\sum n_i - r - 1} + 1 = P'_a + \pi - \Delta'_{\sum n_i - r - 1},$$

e la postulazione di $\psi + \psi'$ da [n° 4, *b*])

$$\chi\left(\sum n_i - r - 1\right) = P_a + P'_a + \pi$$

sarà

$$\chi\left(\sum n_i - r - 1\right) - r'_{\sum n_i - r - 1} - 1 = P_a + \Delta'_{\sum n_i - r - 1}.$$

Ora il numero $P_a + \Delta'_{\sum n_i - r - 1} - 1$ esprime la dimensione del sistema $|C^a - C|$ e si riduce a -1 allora e solo allora che questo sistema manchi. Dunque:

(1) $$P_a + \Delta'_{\sum n_i - r - 1} = P_g.$$

Ne segue che sarà

$$\chi\left(\sum n_i - r - 1\right) = r'_{\sum n_i - r - 1} + 1$$

allora e solo allora che $P_g = 0$.

Possiamo dunque dire che:

Se $P_g > 0$ esistono ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ passanti per ψ' e non per ψ; e viceversa.

22. Dimostriamo ora che *le ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1$ segano sopra la curva D gruppi canonici.*

Si può infatti scegliere k così elevato che esistano ipersuperficie d'ordine k per ψ' e non per ψ, e quindi anche subaggiunte di ordine superiore non pas-

santi per ψ. Se diciamo E la sezione di ψ con una subaggiunta d'ordine k, fuori della D, avremo che:

$$|E + D| = |kC|,$$

e quindi:

$$|(E + D)^a| = |(kC)^a|,$$

la quale ci dice che il sistema $|(E + D)^a|$ è segato su ψ, fuori di D, da tutte le subaggiunte di ordine $\sum n_i - r - 1 + k$. Si osservi ancora che dall'essere

$$|(E + D)^a| = |E + D^a|,$$

segue che se una curva addizionata alla E dà una curva $(E + D)^a$, essa è una D^a. Perciò appunto le sezioni di ψ con ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1$ son curve D^a, le quali, essendo la curva D priva di punti multipli, segano su D gruppi canonici [37].

23. Supponiamo $P_g > 0$. Allora ci saranno ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ passanti per D e non per ψ (poiché ce ne sono di quelle per ψ' e non per ψ), e segheranno sopra ψ (fuori di D) un sistema che, contenendo totalmente il sistema $|C^a - C|$, coincide con questo. Siccome per D passano $\infty^{\binom{l+r}{r}-1-(\pi-\varepsilon)}$ ipersuperficie di ordine $l = \sum n_i - r - 1$, ove ε è la deficienza della serie canonica segata su D dalle M^l_{r-1}, e queste M^l_{r-1} per D segano sopra ψ un sistema $\infty^{P_g - 1}$, ve ne saranno $\infty^{\binom{l+r}{r}-1-(\pi-\varepsilon+P_g)}$ passanti per ψ. Se il genere geometrico P'_g di ψ', è maggiore di zero, le M^l_{r-1} per ψ segneranno su ψ' il sistema $|C'^a - C'|$ di dimensione $P'_g - 1$, sicché ve ne saranno $\binom{l+r}{r} - (\pi - \varepsilon + P_g + P'_g)$ indipendenti e passanti per $\psi + \psi'$. Sarà perciò:

$$\pi - \varepsilon + P_g + P'_g = \chi(\sum n_i - r - 1) = P_a + P'_a + \pi,$$

donde:

$$(1) \qquad \varepsilon = (P_g - P_a) + (P'_g - P'_a) = \Delta'_{\sum n_i - r - 1} + \Delta_{\sum n_i - r - 1}.$$

È facile vedere che quest'ultima relazione vale ancorché uno o entrambi i generi P_g, P'_g sian nulli.

Se $P_g = 0$ le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ per D passano di conseguenza per ψ, perché se ce ne fosse una per D e non per ψ essa segnerebbe su ψ una curva (d'ordine ≥ 0) che insieme ad una C staccherebbe sopra ogni altra C gruppi canonici, e quindi esisterebbe $|C^a|$ e $|C^a - C|$. In tal caso dunque

$$r_{\sum n_i - r - 1} + 1 = \pi - \varepsilon,$$

(37) ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti*, etc., n° 18.

donde in virtù delle (2) del n° 17:

$$\varepsilon = \Delta_{\Sigma n_i - r - 1} - P_a .$$

Ma qualunque valore abbia P'_g la (1) del n° 21 ci dice che

$$\Delta_{\Sigma n_i - r - 1} = P'_g - P'_a ,$$

e quindi verrà:

$$\varepsilon = (0 - P_a) + (P'_g - P'_a) .$$

24. Poiché per $k \geq \mu$, ove μ è un conveniente limite, il sistema $|C_k^a|$ ha la dimensione $P'_a + p'_k - 1$ (38), ne viene in virtù della (1) n° 20, che per $l \geq \sum n_i - r - 1 + \mu$ si ha $\Delta_l = 0$ e quindi:

$$r_l = m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a .$$

La postulazione di ψ per le ipersuperficie di ordine $l \geq \sum n_i - r - 1 + \mu$ è dunque espressa da:

$$m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1 .$$

25. Le ipersuperficie d'ordine $l = \sum n_i - r - 1 + k$ $(k \geq 1)$ segano su D una $g_{l\delta}$ non speciale (n° 22) e quindi esse soddisfano ad $l\delta - \pi - \varepsilon_l + 1$ condizioni col passaggio per D, supposto che ε_l rappresenti la deficienza della $g_{l\delta}$ suddetta. Le ipersuperficie d'ordine l passanti per D, se esiste il sistema $|C_k^a|$, segano su ψ, fuori della D, un sistema che contenendo totalmente $|C_k^a|$ coincide con questo. Sicché esse soddisfano ad $r_k^{(a)} + 1$ condizioni col passaggio per ψ. Se esiste il sistema $|C_k'^a|$ le ipersuperficie d'ordine l per ψ lo staccano su ψ', fuori della D, e quindi esse soddisfano ad $r_k'^{(a)} + 1$ condizioni col passaggio per ψ'. Complessivamente le ipersuperficie d'ordine l soddisfano ad $l\delta - \pi - \varepsilon_l + 1 + r_k^{(a)} + 1 + r_k'^{(a)} + 1$ condizioni col passaggio per $\psi + \psi'$. E quindi:

$$\chi(l) = (m + m')\binom{l+1}{2} - l(p + p' + \delta - 2) + P_a + P'_a + \pi + 1 =$$

$$= l\delta - \pi - \varepsilon_l + r_k^{(a)} + r_k'^{(a)} + 3 .$$

Profittando delle formole del n° 4 *b*) e ricordando che (n° 20):

$$r_k^{(a)} + 1 = P_a + p_k + \Delta'_l$$

$$r_k'^{(a)} + 1 = P'_a + p'_k + \Delta_l ,$$

la precedente relazione porge

$$\varepsilon_l = \Delta_l + \Delta'_l .$$

(38) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà*, etc., n° 41.

È facile verificare che questa vale anche se uno o entrambi i sistemi $|C_k^a|$, $|C_k'^a|$ mancano. Si può dire che:

La deficienza della serie segata sulla curva D dalle ipersuperficie di ordine $l \geq \sum n_i - r - 1$ *è uguale alla somma delle deficienze dei sistemi che le stesse ipersuperficie segano su* ψ *e su* ψ'.

Il caso $l = \sum n_i - r - 1$ incluso nell'enunciato era stato considerato al nº 23.

Se $\varepsilon_l = 0$ sarà $\Delta_l = \Delta_l' = 0$; e viceversa. Siccome le ipersuperficie di ordine $l \geq \delta - 2$ segano su D serie complete non speciali (Castelnuovo) sarà $\Delta_l = \Delta_l' = 0$ per $l \geq \delta - 2$.

La (1) del nº 23 ci dice che se $\varepsilon = 0$ le due superficie ψ e ψ' son regolari; e viceversa. Siccome per $l \geq \sum n_i - n - 1$ le Δ (e le Δ') van decrescendo [vedi la (3) del nº 17], nell'ipotesi della regolarità di ψ e ψ', sarà $\Delta_l = \Delta_l' = 0$ per $l \geq \sum n_i - r - 1$.

Che se è regolare soltanto la ψ' allora sarà $\Delta_l = 0$ per $l \geq \sum n_i - r - 1$, *ma non sarà zero* $\Delta'_{\sum n_i - r - 1}$.

26. *Riassumendo i resultati finora ottenuti in questo* § *potremo enunciare quanto segue*:

« Siano ψ e ψ' due superficie irriducibili, prive di punti multipli, di generi aritmetici P_a, P_a', di generi geometrici P_g, P_g', le quali costituiscano insieme la completa intersezione di $r-2$ ipersuperficie dello S_r, degli ordini $n_1, \cdots, n_{r-2}$ $(r \geq 4)$.

« Allora, se esiste il sistema aggiunto a quello delle sezioni di ψ con tutte le ipersuperficie d'ordine $k \geq 1$ esistono ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1 + k$ per ψ' e non per ψ, ed esse segano su ψ, fuori della curva D comune a ψ e ψ', il sistema aggiunto suddetto. Se inoltre $P_g > 0$ esistono ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ per ψ' e non per ψ ed esse segano su ψ, fuori della D e delle curve eccezionali, il sistema canonico.

« Le ipersuperficie d'ordine $\sum n_i - r - 1$ segano sulla D, che sia di ordine δ e genere π, una $g_{2\pi-2}$ canonica avente la deficienza $(P_g - P_a) + (P_g' - P_a')$ sicché la condizione necessaria e sufficiente perché ψ e ψ' siano regolari è che la serie suddetta sia completa. Le ipersuperficie d'ordine $l > \sum n_i - r - 1$ segano sulla D una serie non speciale la cui deficienza uguaglia la somma delle deficienze dei sistemi segnati su ψ e su ψ' dalle stesse ipersuperficie. Le ipersuperficie d'ordine $l \geq \sum n_i - r - 1$ segano su ψ e su ψ' sistemi regolari (parziali o no).

« Se per un valore di k il sistema completo aggiunto al multiplo secondo k del sistema costituito dalle sezioni iperpiane di ψ', è regolare, oppure se le ipersuperficie di ordine $\sum n_i - r - 1 + k$ segano su D una serie completa (i quali fatti accadono certo per k abbastanza grande) le ipersuperficie d'ordine $l \geq \sum n_i - r - 1 + k$ segano sulla ψ un sistema regolare *completo*, sicché la postulazione di ψ per esse sarà espressa da

$$m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1,$$

ove m, p rappresentano ordine e genere della sezione iperpiana di ψ.

« In particolare questa formola di postulazione vale per $l \geq \delta - 2$. Se ψ' è regolare la precedente formola relativa alla ψ, è applicabile per $l \geq \sum n_i - r - 1$, ma se ψ' è irregolare il valore di l dal quale essa è applicabile è certo maggiore di $\sum n_i - r - 1$ (né d'altro canto supera $\delta - 2$) » (39).

27. Occupiamoci ora del caso in cui la dimensione dello spazio ambiente uguaglia il 4, e la superficie ψ possiede un certo numero d di punti doppi improprî.

Conserveremo le notazioni del n° 4 *b*) e ricorderemo che se le due ipersuperficie di ordini n_1, n_2, le quali s'intersecano nella superficie $\psi + \psi'$, furon condotte genericamente per ψ, la superficie ψ' avrà soltanto punti doppi improprî, coincidenti con quelli di ψ. Inoltre ricorderemo che la curva D comune a ψ e ψ' ha nei punti doppi suddetti dei punti quadrupli (ordinarî) (40).

Con $|C|$ s'indicherà al solito il sistema delle sezioni iperpiane di ψ, con $|C_l|$ il sistema delle sezioni di ψ con ipersuperficie d'ordine l; con r_l, m_l, p_l la dimensione, il grado e il genere rispettivi di $|C_l|$. Avremo:

$$m_l = ml^2$$

$$p_l = m\binom{l}{2} + l(p-1) + 1.$$

Per ψ' si useranno notazioni analoghe cogli apici.

Come al n° 16 si dimostrerà che *se* $l \geq n_1 + n_2 - 5$ *il sistema* $|C_l|$ *è regolare*, dimodoché dettane Δ_l la deficienza si avrà:

$$r_l = m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a - \Delta_l.$$

In particolare per $l = n_1 + n_2 - 4$, $n_1 + n_2 - 5$, mediante le formole del n° 4 *b*) si avrà:

$$r_{n_1+n_2-4} = P_a + \pi + p + \delta - 2 - \Delta_{n_1+n_2-4} + 2d$$

$$r_{n_1+n_2-5} = P_a + \pi - 1 - \Delta_{n_1+n_2-5} + 2d.$$

Avremo anche come al n° 17 (per $l \geq n_1 + n_2 - 4$)

$$r_l - r_{l-1} = ml - p + 1 + \lambda_l \qquad (\lambda_l \geq 0)$$

$$\Delta_{l-1} = \Delta_l + \lambda_l.$$

(39) Il ragionamento riportato a pie' della pag. 32 della mia Memoria « *Sulle intersezioni*, etc. » non è del tutto giusto, perché dal fatto, che le ipersuperficie d'ordine l abbastanza grande ($\geq m - 2$) segano sopra una sezione iperpiana della superficie ψ^m (di cui nel testo) una serie completa non si può dedurre che esse segano su ψ un sistema *completo*. Il ragionamento stesso conduce dunque soltanto ad un limite superiore della postulazione.

(40) Cfr. la mia Memoria, *Sulle intersezioni*, etc. § 9.

Imitando il ragionamento dei nn. 18, 19, 20, coll'ipotesi che $l = n_1 + n_2 - 5 + k$ $(k \geq 2)$ sia così grande che esistano ipersuperficie di ordine l per ψ' e non per ψ, si arriverà alla formola:

$$(1) \qquad r^{(a)}_{k-1} = P_a + p_{k-1} - 1 + \Delta'_{l-1} - d,$$

nella quale $r^{(a)}_{k-1}$ indica la dimensione del sistema completo $|C^a_{k-1}|$ aggiunto a $|C_{k-1}|$. Ricordando poi [n° 4 *b*)] che

$$\chi(l-1) = (m+m')\binom{l}{2} - (l-1)(p+p'+\delta-2) + P_a + P'_a + \pi + d + 1 \qquad (l \geq n_1 + n_2 - 3)$$

avremo:

$$\chi(l-1) r'_{l-1} - 1 = r^{(a)}_{k-1} + 1,$$

dalla quale si trae che *se esiste il sistema aggiunto a* $|C_k|$ $(k \geq 1)$ *esso può segarsi con ipersuperficie d'ordine* $n_1 + n_2 - 5 + k$ *subaggiunte a* ψ.

Come al n° 21 si stabilirà inoltre che:

$$(2) \qquad P_a + \Delta'_{n_1+n_2-5} - d = P_g,$$

donde tenendo presente la

$$\chi(n_1 + n_2 - 5) = P_a + P'_a + \pi + d$$

segue che *se* $P_g > 0$ *esistono ipersuperficie d'ordine* $n_1 + n_2 - 5$ *per* ψ' *e non per* ψ, *e segano su* ψ *fuori di* D *e delle curve eccezionali il sistema canonico.*

28. *Le ipersuperficie d'ordine* $n_1 + n_2 - 5$ *passanti pei punti doppi impropri comuni a* ψ *e* ψ' *segano su* D, *fuori dei punti suddetti, gruppi canonici.*

Il ragionamento del n° 22 porta in tal caso alla conclusione che il sistema lineare di curve segato su ψ da tutte le M_3 di ordine $n_1 + n_2 - 5$, è contenuto totalmente nel sistema aggiunto al sistema completo $|D|$ individuato dalla curva D in cui *non siano assegnati punti base*. Le curve aggiunte al sistema completo $|D_1|$, individuato dalla curva D in cui *siano assegnati* come punti base di molteplicità virtuale 2 i $2d$ punti doppi (a due a due coincidenti) che la D possiede nei punti doppi impropri di ψ [41], si otterranno imponendo alle curve aggiunte a $|D|$ la condizione di passare pei punti base suddetti. Dunque le sezioni di ψ con M_3 d'ordine $n_1 + n_2 - 5$ passanti pei punti doppi di ψ son curve aggiunte al sistema completo $|D_1|$, e siccome questo non ha

(41) In ciascun punto doppio improprio P di ψ coincidono due punti semplici della superficie stessa, cioè con una trasformazione birazionale della ψ si può far corrispondere all'intorno di P nella superficie ψ, gli intorni di due punti semplici della superficie trasformata. Due dei quattro rami della D aventi l'origine in P, appartengono ad una delle due falde di ψ che hanno l'origine in P, e gli altri due all'altra. Con queste considerazioni acquistano senso preciso i modi di dire usati nel testo.

certo punti base assegnati con molteplicità virtuale (≥ 2) minore dell'effettiva, le sezioni di ψ con le suddette M_3 segheranno su D fuori dei punti base assegnati gruppi canonici (42).

29. Dicendo $\varepsilon(\geq 0)$ la deficienza della serie canonica segata su D, fuori dei punti quadrupli, dalle $M_3^{n_1+n_2-5}$ passanti per essi e dicendo $d-\eta$ $(\eta \geq 0)$ il numero delle condizioni indipendenti che impongono i d punti doppi di ψ alle $M_3^{n_1+n_2-5}$ obbligate a contenerli, avremo, ragionando come al n° 23:

$$\varepsilon + \eta = (P_g - P_a) + (P'_g - P'_a) .$$

30. Dal fatto che il sistema $|C'^{a}_{k-1}|$ ha la dimensione non inferiore a $P'_a + p'_{k-1} - 1$ (43), in virtù della (1) del n° 27, si può dedurre che:

$$\Delta_l \geq d \qquad (l \geq n_1 + n_2 - 4) .$$

Inoltre dal fatto che $P'_g \geq P'_a$, in virtù della (2) n° 27, si può dedurre che:

$$\Delta_{n_1+n_2-5} \geq d ,$$

e infine siccome per $k \geq \mu$, μ essendo un limite conveniente, il sistema $|C'^{a}_{k-1}|$ ha proprio la dimensione $P'_a + p'_{k-1} - 1$, si può dire che:

$$\Delta_l = d \qquad (l \geq n_1 + n_2 - 5 + \mu) .$$

Dunque *per* $l \geq n_1 + n_2 - 5 + \mu$ *il sistema* $|C_l|$ ha una deficienza costante *uguale a* d, *sicché la postulazione di* ψ *per le ipersuperficie di ordine* $l \geq n_1 + n_2 - 5 + \mu$ *è espressa da*

$$m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1 - d .$$

31. Le ipersuperficie d'ordine $l = n_1 + n_2 - 5 + k$ $(k \geq 1)$ passanti pei d punti quadrupli di D, segano su questa curva, fuori di essi, una $g_{l\delta-4d}$ non speciale, di cui sia ε_l la deficienza. Se sono $d-\eta_l$ $(\eta_l \geq 0)$ le condizioni indipendenti che presentano i punti quadrupli suddetti alle M_3^l obbligate a contenerli, sarà $l\delta - 4d - \pi - \varepsilon_l + d - \eta_l + 1$ la postulazione di D per le M_3^l. Imitando il ragionamento del n° 25 si arriverà alla relazione:

$$\varepsilon_l + \eta_l = (\Delta_l - d) + (\Delta'_l - d) .$$

Già si è visto (n° 30) che per $l \geq n_1 + n_2 - 5 + \mu$, ove μ è un intero tale che $|C'^{a}_{\mu}|$ è regolare, $\Delta_l = d$; analogamente per $l \geq n_1 + n_2 - 5 + \mu'$ ove μ' è tale che $|C^{a}_{\mu'}|$ è regolare, sarà $\Delta'_l = d$; sicché se $l \geq n_1 + n_2 - 5 + \nu$, ove ν è il maggiore fra i due numeri μ, μ', sarà $\varepsilon_l = \eta_l = 0$. Viceversa per

(42) Cfr. ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti*, etc., n° 18. La conclusione sarebbe pur lecita se $|D_1|$ avesse punti base semplici (che noi non abbiamo assegnati).

(43) Cfr. ad esempio CASTELNUOVO, *Alcune proprietà*, etc.; n° 18.

$l \geq n_1 + n_2 - 5 + \nu$, ove ν è un intero tale che i punti doppi di ψ impongano alle M_3^l obbligate a contenerli d condizioni indipedenti, e la serie segata su D, fuori dei punti suddetti, dalle M_3^l passanti per essi sia completa, sarà $\Delta_l = \Delta_l' = d$.

Se le due superficie ψ e ψ' son regolari la (2) n° 27 ci dirà che

$$\Delta_{n_1+n_2-5} = \Delta'_{n_1+n_2-5} = d .$$

In tale ipotesi, siccome giusta la $\Delta_{l-1} = \Delta_l + \lambda_l$ $(l \geq n_1 - n_2 - 4)$, le Δ e le Δ' vanno decrescendo per l crescente da $n_1 + n_2 - 5$ in poi, e d'altronde già si è visto (n° 30) che nessuna di esse può essere inferiore a d, sarà

$$\Delta_l = \Delta_l' = d \qquad (l \geq n_1 + n_2 - 5) .$$

Che se fosse regolare soltanto ψ' sarebbe $\Delta_l = d$ $(l \geq n_1 + n_2 - 5)$, ma certamente sarebbe $\Delta'_{n_1+n_2-5} > d$.

32. *Riassumiamo i resultati ottenuti dal n° 27 in poi.*

« Per la superficie irriducibile ψ dello S_4, dotata di d punti doppi improprî, si conducano genericamente due M_3 di ordini n_1 , n_2, le quali s'intersechino ulteriormente in una superficie irriducibile ψ'. Questa sarà pure dotata di soli d punti doppi improprî coincidenti con quelli di ψ e le due superficie ψ e ψ' si taglieranno in una curva D, d'ordine δ, genere π, la quale possiederà punti quadrupli (ordinarî) nei punti doppi di ψ e ψ'. Siano P_a , P_a', i generi aritmetici, P_g , P_g' i generi geometrici di ψ e ψ'.

« Se esiste il sistema aggiunto a quello delle sezioni di ψ con ipersuperficie d'ordine $k \geq 1$ esso è segabile con subaggiunte a ψ di ordine $n_1 + n_2 - 5 + k$, e se $P_g > 0$ le subaggiunte a ψ di ordine $n_1 + n_2 - 5$ segano su essa, fuori della D e delle curve eccezionali, il sistema canonico.

« Le M_3 d'ordine $n_1 + n_2 - 5$ passanti pei punti quadrupli di D segano sulla D, fuori dei punti suddetti, gruppi canonici. La definizione della serie costituita da questi gruppi, aumentata del numero di quelle condizioni imposte dai d punti quadrupli alle $M_3^{n_1+n_2-5}$ obbligate a contenerli, che sono conseguenza delle rimanenti, uguaglia $(P_g - P_a) + (P_g' - P_a')$; sicché la condizione necessaria e sufficiente affinché ψ e ψ' sian regolari, è che i d punti quadrupli presentino condizioni indipendenti alle M_3 di ordine $n_1 + n_2 - 5$ obbligate a contenerli, e che quelle che passano per i punti suddetti seghino su D la serie canonica completa.

« Le ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 + n_2 - 5$ segano su ψ e su ψ' sistemi regolari (parziali o no). Dicendo Δ_l , Δ_l' le deficienze rispettive dei sistemi segati su ψ e su ψ' dalle M_3^l $(l \geq n_1 + n_2 - 4)$, $d - \eta_l$ il n° delle condizioni indipendenti che i punti quadrupli della D impongono alle M_3^l obbligate a contenerli, ε_l la deficienza della serie non speciale segata su D, fuori dei punti suddetti, dalle M_3^l passanti per essi, si ha la relazione:

$$\varepsilon_l + \eta_l = (\Delta_l - d) + (\Delta_l' - d) .$$

« Se per un certo valore di k il sistema completo aggiunto a quello segnato su ψ' dalle ipersuperficie d'ordine k, è regolare (il che accade certo se k è abbastanza grande) il sistema segnato su ψ delle M_3 di ordine $l \geq n_1 + n_2 - 5 + k$ ha una deficienza costante (minima) uguale a d, sicché la postulazione di ψ per le ipersuperficie di ordine $l \geq n_1 + n_2 - 5 + k$ è espressa da

$$m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1 - d,$$

ove m, p indicano ordine e genere della sezione iperpiana di ψ. Questa formola di postulazione, relativa alla ψ, vale in particolare quando $\varepsilon_l = \eta_l = 0$. Se ψ' è regolare essa è certo applicabile per $l \geq n_1 + n_2 - 5$, ma se ψ' è irregolare il valore di l dal quale in su è applicabile supera $n_1 + n_2 - 5$ ».

Osservazione. – Da quanto precede risulta che i punti doppi improprî di una superficie ψ dello S_4 mentre non influiscono sulla regolarità del sistema segato sulla ψ dalle M_3 di ordine abbastanza alto, influiscono sulla completezza di esso sistema.

Invece i punti doppi proprî non influiscono sulla completezza. Così per esempio, se consideriamo la ψ^4 completa intersezione di due quadriche, la quale è necessariamente priva di punti doppi improprî, e la supponiamo dotata di un punto doppio proprio proveniente da un contatto delle due quadriche, il sistema segato su ψ dalle M_3 di un ordine qualunque sarà completo (n° 11).

XIV.

SULLE RELAZIONI CHE LEGANO I CARATTERI INVARIANTI DI DUE SUPERFICIE IN CORRISPONDENZA ALGEBRICA

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *36* (1903), pp. 495–511.

In questa Nota mi propongo lo studio delle relazioni che legano i sistemi ed i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza (n , n').

Ho cominciato pertanto dal ricostruire, e completare in un punto, i noti sviluppi che si riferiscono al problema analogo nel caso delle curve.

Quando fra due curve è data una corrispondenza $(1 , n)$, un teorema del sig. Castelnuovo [1] pone fra le loro serie canoniche un legame funzionale, esprimente l'interpretazione geometrica della nota formola di corrispondenza dovuta a Zeuthen. – Io ho dapprima stabilito direttamente in modo semplicissimo la relazione di Castelnuovo, e poi seguendo una veduta del sig. Segre [2], son passato da questo caso a quello di una corrispondenza (n , n') fra due curve, ottenendo così il legame fra le loro serie canoniche e la formola di Zeuthen che ne esprime l'aspetto aritmetico.

L'estensione del teorema di Castelnuovo alle corrispondenze $(1 , n)$ fra due superficie, è stata indicata dal sig. Enriques, che ne ha dedotto anche la relazione fra i generi lineari delle superficie stesse [3]. – In questa nota si troverà più in generale il legame funzionale fra i sistemi canonici di due superficie in corrispondenza (n , n'), la relazione fra i loro generi lineari, ed una seconda relazione, più riposta, fra i loro generi aritmetici.

Affinché queste formole fossero applicabili anche alle superficie riferibili a rigate, ho introdotto in esse, al posto dei generi lineari, i corrispondenti

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali . . .*. Rend. Lincei, (4) 7 (1891), pp. 294–299. Vedi anche: P. PAINLEVÉ, *Sur les équations differentielles du premier ordre*, Annales de l'Ecole normale supérieure, (3) *8* (1891), pp. 9–58, 103–140, 201–225, 267–284 e Journal de Math., (4) *10* (1894), pp. 203–206; G. HUMBERT, *Sur quelques points de la theorie des courbes et des surfaces algébriques*, Journal de Math., (4) *10* (1894), pp. 169–201.

(2) Cfr. la sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Matematica, (2) *22* (1894), pp. 41–143.

(3) Cfr. F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Memorie della R. Acc. di Torino, (2) *44* (1893), pp. 165–225, cap. VI.

invarianti relativi d'Enriques–Castelnuovo (4), i quali, come si sa, son definiti per ogni superficie, sia pure dotata di infinite curve eccezionali.

Alle due formole suddette se ne accompagna una terza (della quale mi valgo per trovare la seconda), che lega i caratteri di Zeuthen–Segre (5), e che è una combinazione lineare di esse.

Noterò infine che nel caso in cui la corrispondenza fra le due superficie ammette elementi fondamentali, le precedenti relazioni funzionali e aritmetiche subiscono alcune modificazioni, le quali sono oggetto di un particolare esame.

1. Fra le due curve C, C' di generi p, p' abbiasi una corrispondenza $(1, n)$, tale cioè che ad un punto di C rispondano n punti di C' e ad un punto di C' uno di C.

Una g_v^1 di C trasformasi, mediante la corrispondenza, in una g_{vn}^1 di C', e un punto doppio di questa serie o proviene da un punto doppio di g_v^1, o è un punto doppio per la involuzione γ di grado n, i cui gruppi corrispondono ai punti di C. Indicheremo con G un gruppo di g_v^1, con J il gruppo jacobiano di g_v^1 (gruppo de' suoi punti doppi) con K un gruppo canonico di C, con D il gruppo dei punti di diramazione per la corrispondenza, con G', J', K', D' i trasformati di G, J, K, D mediante la corrispondenza stessa, e infine con K^* un gruppo canonico di C'. Ricordando che il gruppo jacobiano di una g^1 sopra una curva, è corresiduale ad un gruppo canonico aumentato di due gruppi della serie stessa, avremo:

$$J \equiv K + 2G, \qquad J' + D' \equiv K^* + 2G',$$

ove $\equiv$ è il segno di corresidualità o equivalenza. Poiché ai gruppi di una serie lineare di C corrispondono su C' gruppi di una serie lineare, sarà anche:

$$J' \equiv K' + 2G',$$

che confrontata con la seconda delle precedenti, porge:

$$K^* \equiv K' + D'.$$

Dunque:

Se fra due curve C, C' si ha una corrispondenza $(1, n)$, un gruppo canonico di C' è equivalente al trasformato di un gruppo canonico di C, aumentato dei punti doppi per la corrispondenza (6).

Vediamo ora, reciprocamente, in che relazione sta la trasformata della serie canonica di C' con la serie canonica di C.

(4) Cfr. CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Annali di mat. (3) 6 (1901), pp. 165–225, n. 5.

(5) Cfr. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie...*, Atti della R. Acc. di Torino, 31 (1896), pp. 485–501.

(6) CASTELNUOVO, *loc. cit.*, in (1).

La serie canonica di C' trasformandosi mediante la corrispondenza $(n\ ,\ 1)$ che si ha fra C', C, dà luogo su C ad una serie algebrica di ordine $2\ p' - 2$, contenuta in una serie *lineare* dello stesso ordine [7]. Per caratterizzare questa serie lineare possiamo osservare come si trasforma un particolare gruppo canonico di C', per esempio uno formato da un gruppo K' insieme al gruppo D'. Poiché il gruppo K' è costituito da $2p - 2$ gruppi dell'involuzione γ, formanti un gruppo canonico della γ stessa, nel passaggio da C' a C esso si muta in un gruppo canonico di C, contato n volte; alla sua volta il gruppo D' si muta nel gruppo di diramazione D. Dunque:

Se fra le due curve C', C si ha una corrispondenza $(n\ ,\ 1)$, il trasformato di un gruppo canonico di C' è equivalente al multiplo secondo n di un gruppo canonico di C, aumentato del gruppo di diramazione per la corrispondenza.

Se ora supponiamo che fra $C\ ,\ C'$ passi una corrispondenza $(n\ ,\ n')$, considerando l'ente ausiliario $\infty^1\ H$, costituito dalle coppie di punti omologhi nella corrispondenza, e applicando la prima delle due proposizioni antecedenti alla corrispondenza $(1\ ,\ n')$ che si ha fra C e H, e successivamente la seconda proposizione alla corrispondenza $(n\ ,\ 1)$ che si ha fra H e C', otteniamo il teorema seguente:

Allorquando fra due curve $C\ ,\ C'$ passa una corrispondenza $(n\ ,\ n')$, il trasformato di un gruppo canonico di C aumentato dei punti doppi per la corrispondenza, esistenti sopra C', dà un gruppo equivalente al multiplo secondo n di un gruppo canonico di C', aumentato dei punti di diramazione per la corrispondenza esistenti sopra C'.

Sicché indicando con y' il numero dei punti di diramazione, e con y il numero dei punti doppi per la corrispondenza, esistenti su C', di guisa che y', y denoteranno rispettivamente il numero dei punti doppi e il numero dei punti di diramazione esistenti su C, abbiamo, come traduzione numerica del teorema ottenuto, l'equaglianza:

$$2\ n'\ (p - 1) + y = 2\ n\ (p' - 1) + y',$$

ossia:

$$y - y' = 2\ n\ (p' - 1) - 2\ n'\ (p - 1)\ ,$$

che è la formola di Zeuthen.

2. Passiamo ora a studiare le corrispondenze fra due superficie, e notiamo anzitutto che la proposizione, già usata al n° precedente, relativa al modo di trasformarsi di una serie lineare esistente sopra una curva, quando da questa si passa ad un'altra curva in corrispondenza algebrica con quella,

(7) Vedi il n. 4 della mia Nota, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *38* (1903), pp. 185–200. [Nota XII, p. 119; N.d.R].

si può facilmente estendere anche alle corrispondenze fra superficie, e si ha il teorema:

Quando due superficie F, F' sono in corrispondenza algebrica (d'indici qualsiansi), ad un sistema lineare di curve dell'una corrisponde sull'altra un sistema algebrico contenuto totalmente in un sistema lineare.

Per quanto la dimostrazione sia analoga a quella semplicissima che già esposi per le curve nella mia Nota citata, non è forse inutile trattenervisi un momento.

Supponiamo dunque che fra F, F' passi una corrispondenza (n, n'), e diciamo Γ il sistema algebrico delle curve di F' trasformate delle curve di un sistema lineare $|C|$ di F. Poiché sopra una superficie è unico il sistema lineare completo che contiene totalmente una data curva, se dimostriamo che due curve qualsiansi Γ_1 e Γ_2 di Γ, son sempre contenute totalmente in un sistema lineare, potremo affermare che Γ è pure contenuto totalmente in un sistema lineare.

Indicando con C_1, C_2 due curve di $|C|$ omologhe di Γ_1, Γ_2 nella corrispondenza fra F, F', siccome ad ogni curva del fascio congiungente C_1, C_2, corrisponde *una* curva di un sistema ∞^1 contenente Γ_1 e Γ_2, questo sistema sarà razionale, e quindi per un noto teorema [8] apparterrà totalmente ad un sistema lineare.

3. Fra due superficie F, F' di generi geometrici maggiori di zero, e quindi dotate entrambe di un numero finito di curve eccezionali, abbiasi una corrispondenza $(1, n)$, che dapprima si supporrà priva di punti fondamentali (su entrambe le superficie).

Consideriamo su F una rete $|C|$, priva di punti base, e ne sia J la jacobiana. Mediante la corrispondenza $|C|$ trasformasi in una rete $|C'|$, priva di punti base, la cui jacobiana è la trasformata J' di J, aumentata della curva D' luogo dei punti doppi per l'involuzione di grado n, immagine su F' dei punti di F.

Poiché sopra una superficie di genere > 0, la jacobiana di una rete senza punti base appartiene totalmente al sistema lineare somma di una curva canonica, delle curve eccezionali, e di tre curve della rete medesima [9], indicando con K, K^* le curve canoniche di F, F', e con L, L^* l'insieme delle curve eccezionali di F, F' rispettivamente, avremo:

$$|J| = |K + L + 3C|, \tag{1}$$

$$|J' + D'| = |K^* + L^* + 3C'|. \tag{2}$$

(8) Cfr. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti di Palermo, *10* (1896), pp. 30–35, n. 4.

(9) Cfr. ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, Atti della R. Acc. di Torino, *37* (1901), pp. 19–40, n. 24.

Siccome alle curve di un sistema lineare di F, corrispondono su F' curve di un sistema lineare, dicendo L', K' le trasformate delle curve L, K avremo per la (1):

$$|J'| = |K' + L' + 3C'|,$$

che confrontata con la (2), porge:

$$|K^* + L^*| = |K' + L' + D'|,$$

donde il teorema:

a) Quando fra due superficie F, F' si ha una corrispondenza $(1, n)$ priva di punti fondamentali, aggiungendo alle curve trasformate di una curva canonica e delle curve eccezionali di F, la curva di coincidenza per la corrispondenza, si ha una curva canonica di F' aumentata delle curve eccezionali (10).

Se F, F' sono di ordini m, m' e appartengono allo S_3, si può dire, in linguaggio projettivo, che la trasformata della curva sezione di F con un'aggiunta di ordine $m-4$ (fuori della linea doppia di F), aumentata dalla curva di coincidenza che si ha su F', dà la curva sezione di F' con un'aggiunta di ordine $m'-4$ (fuori della linea doppia di F') (11).

(10) ENRIQUES, *loc. cit.*, in (3).

(11) Questa proposizione si ottiene con facilità anche per via trascendente. Sieno infatti

$$\varphi(x\,y\,z) = 0 \quad , \quad \Phi(X\,Y\,Z) = 0$$

le equazioni di F, F', e sia

$$x = x(X\,Y\,Z) \quad , \quad y = y(X\,Y\,Z) \quad , \quad z = z(X\,Y\,Z),$$

la sostituzione razionale che fa passare da F ad F'. Se $q(x\,y\,z) = 0$ è un'aggiunta ad F di ordine $m-4$, l'integrale doppio di 1ª specie $\iint \frac{q(x\,y\,z)}{\varphi'_z}\,dx\,dy$ relativo ad F, si muterà mediante la sostituzione razionale, in un integrale analogo relativo ad F', cosicchè verrà:

$$\iint \frac{q(x\,y\,z)}{\varphi'_z}\,dx\,dy = \iint \frac{Q(X\,Y\,Z)}{\Phi'_Z}\,dX\,dY,$$

ove $Q(X\,Y\,Z) = 0$ è un'aggiunta ad F', di ordine $m'-4$. Passando nell'integrale del 1° membro dalle variabili $x\,y\,z$ alle $X\,Y\,Z$, eppoi confrontando col 2° membro, si ottiene la relazione:

$$\frac{q(x\,y\,z)}{\varphi'_z}\,\frac{D(xy)}{D(XY)} = \frac{Q(X\,Y\,Z)}{\Phi'_Z},$$

nella quale $\frac{D(xy)}{D(XY)}$ rappresenta il determinante funzionale di x, y rispetto ad X, Y, calcolato tenendo conto del fatto che Z è funzione algebrica di X, Y. Questa relazione mostra che i punti ove s'annulla $Q(X\,Y\,Z)$ (fuori della linea doppia) sono i trasformati di quelli in cui s'annulla $q(x\,y\,z)$ (fuori della linea doppia) e i trasformati dei punti pei quali $\frac{D(xy)}{D(XY)} = 0$. Avendo escluso che su F ci sieno punti fondamentali per la trasformazione, $\frac{D(xy)}{D(XY)} = 0$ esprime la condizione perché coincidano due degli n punti corrispondenti ad $(x\,y\,z)$. E così ritroviamo il risultato di prima.

4. Vediamo ora come si trasforma il sistema canonico di F' nel passaggio da F' ad F.

Mediante la corrispondenza alle curve $K^* + L^*$, rispondono su F curve di un sistema algebrico, contenuto totalmente in un sistema lineare. Per caratterizzare questo sistema lineare basterà vedere come si trasforma una particolare $K^* + L^*$, per esempio quella costituita dalla K' trasformata di una curva canonica di F, aumentata delle curve D' ed L'.

Poiché tanto la K' che la L' appartengono all'involuzione di grado n che si ha su F', cioè ogni gruppo dell'involuzione che abbia comune un punto con la K' (o con una L'), appartiene interamente a K' (o a quella L'), nel passaggio da F' ad F la curva $K' + L'$ si muterà nella $K + L$, contata n volte. Siccome inoltre la curva D' si muta nella curva D, luogo dei punti di diramazione per la corrispondenza, il sistema lineare al quale appartengono totalmente le trasformate delle curve $K^* + L^*$, è il sistema $|n(K + L) + D|$. Dunque:

b) Se fra due superficie F', F si ha una corrispondenza $(n, 1)$, priva di punti fondamentali, la trasformata di una curva canonica di F', aumentata delle trasformate delle curve eccezionali di F', appartiene totalmente al sistema lineare somma del sistema n-canonico di F, delle curve eccezionali contate n volte, e della curva di diramazione per la corrispondenza.

5. Ora supponiamo di avere fra le due superficie F, F' una corrispondenza (n, n') priva di punti fondamentali. È chiaro che se si considera una superficie Φ, che rappresenti *senza eccezione* l'ente ∞^2 costituito dalle coppie di punti omologhi nella data corrispondenza, tra F, Φ e tra Φ, F' si avranno rispettivamente due corrispondenze $(1, n')$, $(n, 1)$ prive di punti fondamentali, sicché applicando successivamente a queste corrispondenze le proposizioni *a*) e *b*), si perverrà al teorema:

c) Quando fra due superficie F, F' passa una corrispondenza (n, n'), priva di punti fondamentali, la trasformata di una curva canonica e delle curve eccezionali di F, aumentata della curva di coincidenza che si ha su F', dà una curva del sistema lineare individuato da una curva n-canonica di F', aumentata di n volte le curve eccezionali, e della curva di diramazione esistente sopra F'.

6. Vediamo quali modificazioni subiscano i teoremi precedenti quando *la corrispondenza tra F, F' è dotata di punti fondamentali.*

Se a è un punto (semplice) di F fondamentale per la corrispondenza che passa tra F e F', e se escludiamo ch'esso sia dotato di *direzioni fondamentali* (che cioè gli siano infinitamente vicini altri punti fondamentali), mentre un punto di F si muove nell'intorno di a, de' suoi omologhi alcuni si muovono lungo una curva fondamentale (irriducibile o no) corrispondente ad a, e gli altri negli intorni di punti isolati, che potrebbero anche mancare. Similmente se B è una curva di F fondamentale per la corrispondenza, dei punti omologhi ad un punto variabile su B alcuni si muoveranno negli intorni di

punti fondamentali corrispondenti a B, e gli altri, eventualmente, lungo una curva.

Ciò premesso, rifacciamoci dal caso della corrispondenza $(1, n)$ fra F e F', e supponiamo di avere il solo punto fondamentale a sopra F, e nessuno sopra F'. Se a appartiene alla curva di diramazione D con una certa molteplicità $s \geq 0$, e se si suppone, come accadrà in generale, che al punto a risponda una curva fondamentale A' irriducibile, ed un certo numero $n-i$ di punti isolati, ai punti infinitamente vicini ad a nelle varie direzioni corrisponderanno su A' gruppi di una g_i^1, la quale sarà dotata di s punti doppi, sicché il genere di A' risulterà uguale ad $\frac{1}{2} s - i + 1$.

Una rete $|C|$, senza punti base su F, si muterà in una rete $|C'|$, senza punti base su F', e alle C passanti per a risponderanno curve C' spezzate nella A' e in parti residue, seganti la A' stessa nei gruppi della g_i^1, di guisa che A' farà parte della jacobiana di $|C'|$. Questa jacobiana sarà inoltre costituita dalla trasformata J' della jacobiana J di $|C|$, e dalla curva di coincidenza D'. Conservando le notazioni del n° 3, avremo dunque:

$$|J| = |K + L + 3C|, \qquad |J' + D' + A'| = |K^* + L^* + 3C'|,$$
$$|J'| = |K' + L' + 3C'|,$$

donde si trae:

$$|K^* + L^*| = |K' + L' + D' + A'|. \tag{3}$$

Qui si presenta opportuna un'osservazione: Se il punto a non appartiene a D ($s = 0$) sarà certo $i = 1$, e la curva A' risulterà razionale. Siccome A' non può avere punti doppi (chè questi sarebbero fondamentali per la corrispondenza), il suo genere virtuale risulterà uguale a zero. Giacché inoltre lo staccamento della curva A' dalle C' che la contengono, ha per effetto di abbassare d'un'unità il grado delle curve residue, il grado virtuale di A' sarà uguale a -1, e quindi A' sarà *eccezionale* per F' [12]. Dunque in tal caso dai due membri della (3) si potrà sopprimere A'.

Poiché l'involuzione di grado n esistente sopra F' ha comuni con la curva A' i gruppi di una g_i^1, dalla (3) si rileva che una curva $K^* + L^*$ nel passaggio da F' ad F, si muta in una curva del sistema $|n(K + L) + D + a^i|$, ove a^i denota il punto a contato i volte.

Adesso è facile passare al caso generale della corrispondenza (n, n') tra F, F', con la solita considerazione della superficie Φ che rappresenta senza eccezione le coppie di punti omologhi nella corrispondenza data.

Su F abbiasi il punto fondamentale a, tale che mentre un punto varia nel suo intorno, de' suoi omologhi i' si muovano lungo la curva fondamentale

(12) Cfr. CASTELNUOVO–ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche, loc. cit.*, in (4), n. 8.

A' omologa di a; e su F' abbiasi il punto fondamentale b', tale che i punti infinitamente vicini ad esso abbiano j dei loro omologhi sulla curva B omologa di b'.

Indicheremo con K una curva canonica, con L l'insieme delle curve eccezionali di F, con D , E la curva di diramazione e la curva di coincidenza esistenti su F, con K', L', D', E' le curve di F' trasformate delle precedenti, e con K^*,L^* una curva canonica e l'insieme delle curve eccezionali di F'. Similmente K_1 , L_1 , D_1 , E_1 , B_1 indicheranno le curve di Φ trasformate delle curve K , L , D , E , B; e K_1^*, L_1^* una curva canonica e l'insieme delle curve eccezionali di Φ.

Poiché tra F e Φ si ha una corrispondenza $(1 , n')$ avente su F il punto fondamentale a e *nessun* punto fondamentale su Φ, avremo:

$$|K_1^* + L_1^*| = |K_1 + L_1 + D_1 + A_1| ,$$

ove A_1 denota la curva di Φ corrispondente al punto a.

Inoltre, siccome la corrispondenza $(n , 1)$ tra Φ ed F' è dotata su F' del solo punto fondamentale b' e non ha punti fondamentali sopra Φ, una curva $K_1^* + L_1^*$, passando da Φ ad F', si muterà in una curva del sistema $|n(K^* + L^*) + E' + b'^j|$.

Ma una curva $K_1 + L_1 + D_1 + A_1$, si muta in una curva del sistema $|K' + L' + D' + A'|$, onde per la proposizione del n. 2, verrà:

$$|n(K^* + L^*) + E' + b'^j| = |K' + L' + D' + A'| . \tag{4}$$

Una relazione analoga si avrebbe se sopra F , F' esistessero più punti fondamentali. Prescindendo dagli eventuali punti base la (4) si può brevemente enunciare dicendo che:

Quando fra due superficie F , F' passa una corrispondenza (n , n') dotata di punti fondamentali, la trasformata di una curva canonica e delle curve eccezionali di F, aumentata della curva di coincidenza e delle curve fondamentali esistenti su F', dà una curva del sistema lineare individuato da una curva n–canonica di F' aumentata di n volte le curve eccezionali, e della curva di diramazione tracciata sopra F'.

7. Occupiamoci ora delle relazioni numeriche fra i caratteri invarianti di due superficie F , F' in corrispondenza algebrica.

Cominceremo dalla relazione fra gl'*invarianti d'Enriques–Castelnuovo* (13), la quale, quando F , F' siano prive di curve eccezionali, rappresenta il legame fra i *generi lineari* delle due superficie.

Fra le superficie F , F' abbiasi una corrispondenza $(1 , n)$ che per ora supporremo priva di punti fondamentali. Su F consideriamo una rete $|C|$, priva di punti base, di grado ν e genere p, e diciamo π il genere della sua

(13) CASTELNUOVO-ENRIQUES, *loc. cit.*, in (4), n. 5.

jacobiana J. Indicando con Ω l'invariante d'Enriques–Castelnuovo, relativo alla F avremo:

$$\Omega = \pi - 9p + 9 \quad (5)$$ [14].

Passando da F ad F' la rete $|C|$ si muta in una rete $|C'|$, priva di punti base, di grado $\nu' = n\nu$, di genere p', e avente per jacobiana la trasformata J' (di genere π') della J, aumentata della curva di coincidenza D' di genere ϱ, uguale al genere della curva di diramazione D tracciata su F.

La curva composta $J' + D'$ avrà il genere uguale a

$$\pi' + \varrho + (J', D') - 1,$$

ove (J', D') rappresenta il numero dei punti comuni a J' e D'. Sicché, dicendo Ω' l'invariante d'Enriques–Castelnuovo, spettante ad F', verrà:

$$\Omega' = \pi' + \varrho + (J', D') - 1 - 9p' + 9. \quad (6)$$

Applicando la formola di Zeuthen alle corrispondenze $(1, n)$ fra le curve C, C' e J, J', otterremo:

$$(C, D) + 2n(p - 1) = 2(p' - 1), \quad (J, D) + 2n(\pi - 1) = 2(\pi' - 1),$$

dalle quali si trae:

$$p' = n(p - 1) + \frac{1}{2}(C, D) + 1, \quad \pi' = n(\pi - 1) + \frac{1}{2}(J, D) + 1.$$

Sostituendo questi valori di π', p' nella (6), e osservando che

$$(J', D') = (J, D),$$

avremo:

$$\Omega' = n(\pi - 9p + 8) + \frac{3}{2}[(J, D) - 3(C, D)] + \varrho,$$

ossia, in virtù della (5):

$$\Omega' = n(\Omega - 1) + \varrho + \frac{3}{2}[(J, D) - 3(C, D)].$$

Ora il numero $(J, D) - 3(C, D)$ non dipende dalla rete $|C|$ considerata e se la superficie F possiede curve canoniche, non è altro che il numero complessivo delle intersezioni di D con le curve eccezionali e con una curva

(14) Cfr. la mia Nota, *Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *37* (1902), pp. 625–643, n. 5 [Nota X, p. 104; N.d.R.].

canonica di F. Ho già avuto occasione di considerare quest'espressione in un'altra Nota [15], e l'ho chiamata *carattere d'immersione* di D su F. Se poniamo:

$$(J, D) - 3\,(C, D) = \theta\,,$$

verrà:

$$\Omega' = n\,(\Omega - 1) + \varrho + \frac{3}{2}\,\theta\,. \tag{7}$$

Si noti che se non c'è la curva di diramazione D (il che certo accade quando $n = 1$) l'espressione $\pi' + \varrho + (J', D') - 1$, che dà il genere della jacobiana di $|C'|$, dovrà ridursi a π', e poiché in tal caso è $(J', D') = 0$, si dovrà porre $\varrho = 1$. Dunque *se manca la curva di diramazione nella* (7) *dovremo porre* $\varrho = 1\,,\ \theta = 0$.

8. Passiamo ora al caso generale della corrispondenza $(n\,,\,n')$, priva di punti fondamentali, fra le superficie $F\,,\,F'$, delle quali diciamo $\Omega\,,\,\Omega'$ gl'invarianti d'Enriques–Castelnuovo. Indicheremo con $\varrho\,,\,\theta$ il genere e il carattere d'immersione della curva di diramazione tracciata su F, e con $\varrho'\,,\,\theta'$ i caratteri analoghi per quella tracciata su F'. Considerando una superficie Φ che rappresenti senza eccezione le coppie di punti omologhi nella corrispondenza $(n\,,\,n')$, ed applicando la (7) alle corrispondenze $(1\,,\,n')$ ed $(1\,,\,n)$ che si hanno risp. tra $F,\ \Phi$ ed $F',\ \Phi$, avremo:

$$\Omega_1 = n'\,(\Omega - 1) + \varrho + \frac{3}{2}\,\theta \quad , \quad \Omega_1 = n\,(\Omega' - 1) + \varrho' + \frac{3}{2}\,\theta'\,,$$

ove Ω_1 denota l'invariante di Φ. Sottraendo membro a membro, verrà:

$$n\,(\Omega' - 1) - n'\,(\Omega - 1) = \varrho - \varrho' + \frac{3}{2}\,(\theta - \theta')\,. \tag{8}$$

Qui pure si osservi che, quando mancasse una curva di diramazione, si dovrà porre il suo genere uguale ad 1 e il suo carattere d'immersione uguale a zero.

9. Ritorniamo alla corrispondenza $(1\,,\,n)$ tra F ed F' e cerchiamo la relazione tra gl'*invarianti* $I\,,\,I'$ *di Zeuthen–Segre*, spettanti alle due superficie.

(15) *Il genere aritmetico ed il genere lineare*..., n. 1. — Quando sopra una superficie è tracciata una curva C, il cui carattere d'immersione sia θ, dicendo r, p il grado e il genere di C calcolati, non assegnando punti base su C, e quindi riguardando come inesistenti gli eventuali punti multipli di C, si ha la relazione $\theta = 2p - 2 - r$. Se poi la superficie appartiene allo S_3 ed n è il suo ordine, m quello di $C\,,\,\lambda$ il num. dei punti in cui C taglia la linea doppia, si ha: $\theta = m\,(n - 4) - \lambda$.

Continuando ad usare le notazioni del n° 7, indichiamo con $|\overline{C}|$ un fascio generico della rete $|C|$, ed osserviamo che se δ è il numero dei punti doppi di curve $\overline{C}$, si ha:

$$I = \delta - \nu - 4p \text{ (16)}.$$

Al fascio $|\overline{C}|$ risponde su F' un fascio $|\overline{C}'|$ dotato di νn punti base, e di genere p'. Una $\overline{C}'$ trasformata di una $\overline{C}$ con punto doppio, ha n punti doppi nei punti di F' omologhi di quello. Così otteniamo dunque $n\delta$ punti doppi di curve $\overline{C}'$. Bisogna esaminare se si possano ottenere altrimenti curve C' con punto doppio.

Se a' è un punto di F', doppio per la curva $\overline{C}_0'$ del fascio $|\overline{C}'|$, ed è distinto dagli $n\delta$ punti doppi suddetti, poiché esso deve appartenere alla jacobiana $J' + D'$ di $|C'|$, e non appartiene per ipotesi ad J', starà sopra D'. Né potrà darsi che tutte le C' passanti per a' tocchino ivi D', chè altrimenti a' sarebbe punto base d'osculazione per il fascio di quelle C'; il che è da escludersi per la genericità di $|\overline{C}|$ entro alla rete $|C|$. Dunque una generica C' per a', taglierà ivi semplicemente D', dal che si trae che il punto a, omologo di a', è semplice per D, e la curva $\overline{C}_0$ omologa di $\overline{C}_0'$, tocca in a la D. Indicando con δ' il numero delle curve $\overline{C}$ tangenti a D (in punti semplici) avremo quindi:

$$I' = n\delta + \delta' - n\nu - 4p',$$

ossia:

$$I' = nI + 4np + \delta' - 4p'. \tag{9}$$

Cerchiamo ora di esprimere δ' in funzione dei caratteri della corrispondenza. Cominceremo perciò dall'osservare che se un punto a' di D' è un punto base d'osculazione per un fascio di curve C', ossia se il punto a della D, omologo di a', è uno dei τ punti di F a ciascun dei quali corrispondono n punti di F', dei quali *tre* coincidenti, siccome un punto di diramazione triplo conta per due punti di diramazione doppi, le C per a avranno incontro bipunto con D, e poiché, data la genericità della rete $|C|$ rispetto a D, esse non toccano tutte D, il punto a sarà doppio per questa curva. Di più se il punto di diramazione triplo a si presenta nel modo più generale, vi sarà una sola curva C, avente incontro *tripunto* con D in a (l'omologa della C' con punto doppio in a') e quindi a sarà una *cuspide* per D.

Ciò posto, consideriamo la $g^1(C, D)$ segata su D dalle curve del fascio $|\overline{C}|$. I punti doppi di questa serie cadono nei δ' punti di contatto di curve $\overline{C}$ tangenti a D e nelle τ cuspidi della D; dunque:

$$\delta' = 2(C, D) + 2\varrho - 2 - \tau.$$

(16) Cfr. C. SEGRE, *loc. cit.*, in (5).

Sostituendo nella (9) questo valore di δ' e il valore di p' dato dalla formola di Zeuthen, avremo:

$$I' = n(I + 4) + 2\varrho - \tau - 6 \quad (10) \quad [17].$$

10. Indichiamo con P_a, P_a' i generi aritmetici delle superficie F, F' in corrispondenza $(1, n)$. Allora per la formola di Nöther:

$$\Omega + I = 12 P_a + 9,$$

dalle (7), (10) si ricava:

$$24(P_a' + 1) = 24 n (P_a + 1) + 6\varrho + 3\theta - 2\tau - 6. \quad (11)$$

Che se poi tra F, F' si ha una corrispondenza (n, n'), priva di punti fondamentali, con la solita considerazione dell'ente costituito dalle coppie di punti omologhi nella corrispondenza, dalle (10), (11) si traggono le formole:

$$n(I' + 4) - n'(I + 4) = 2(\varrho - \varrho') - (\tau - \tau') \quad (12)$$

$$24 n (P_a' + 1) - 24 n' (P_a + 1) = 6(\varrho - \varrho') + 3(\theta - \theta') - 2(\tau - \tau'), \quad (13)$$

ove ϱ, θ sono il genere e il carattere d'immersione della curva di diramazione D tracciata su F, ϱ', θ' i caratteri analoghi per la curva di diramazione E' tracciata su F', τ il numero dei punti di diramazione tripli esistenti su F (ossia il numero delle cuspidi della curva D) e τ' il numero analogo relativo ad F'.

Anche in relazione alle formole (12), (13) si deve osservare che se mancasse una delle curve di diramazione si dovrebbe porre uguale a zero il suo carattere d'immersione e il numero delle sue cuspidi, ma uguale ad 1 il suo genere.

11. Vediamo come si debbano modificare le formole ottenute quando la corrispondenza possegga punti fondamentali.

Tra F, F' passi una corrispondenza $(1, n)$ dotata di un sol punto fondamentale a su F, e di nessuno su F'. Il punto a stia con una certa molteplicità $s \geq 0$ sulla curva di diramazione D che si ha su F, e dei punti di F' corrispondenti ai punti dell'intorno di a, ve ne siano i variabili sulla curva

(17) A questo ragionamento serve di guida l'analogo che ho già fatto per la corrispondenza $(1, n)$ fra un piano e una superficie, nella mia Nota citata, *Il genere aritmetico...*, nn. 3, 4. Di considerazioni di questa natura fa pure uso il sig. DE FRANCHIS nella sua recente Nota, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, Rendiconti di Palermo, *17* (1903), pp. 104–121, per il caso di una speciale corrispondenza (1, 2).

fondamentale A' omologa di a. Già si è visto (n° 6) che in tal caso detto σ il genere di A', ha luogo la relazione:

$$\sigma = \frac{1}{2} s - i + 1 \text{ (18)}.$$

Trasformiamo birazionalmente la F nella superficie F_1 in guisa da mutare il solo punto a in una curva eccezionale A_1, senza però che qualche curva di F si muti in un punto. Tra F_1, F' si verrà ad avere una corrispondenza $(1, n)$ trasformata della corrispondenza tra F, F', e su F_1 non ci saranno punti fondamentali per la corrispondenza, ma gli $n - i$ punti isolati di F' che corrispondono al punto a di F, saranno fondamentali per la nuova corrispondenza.

Mutando la F' in una superficie F_1' con una trasformazione birazionale che abbia su F' come punti fondamentali gli $n - i$ suddetti e nessuna curva fondamentale, la corrispondenza $(1, n)$ che verremo ad avere tra F_1 e F_1' sarà affatto priva di punti fondamentali.

Diremo Ω_1, Ω_1' gl'invarianti d'Enriques-Castelnuovo spettanti ad F_1, F_1', θ_1 il carattere d'immersione della curva D_1 di F_1 omologa della D, e per il resto conserveremo le notazioni del n° 7. Applicando la (7) alla corrispondenza tra F_1, F_1', verrà:

$$\Omega_1' = n(\Omega_1 - 1) + \varrho + \frac{3}{2}\theta_1.$$

Se si osserva che:

$$\Omega_1 = \Omega - 1, \qquad \Omega_1' = \Omega' - (n - i), \qquad \theta_1 = \theta + s \text{ (19)},$$

sostituendo nella precedente otterremo:

$$\Omega' = n(\Omega - 1) + \varrho + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{2}s - i,$$

ovvero, introducendo il genere σ di A',

$$\Omega' = n(\Omega - 1) + \varrho + \frac{3}{2}\theta + s + \sigma - 1. \tag{14}$$

Questa relazione si sarebbe potuta ottenere anche direttamente col ragionamento del n° 7, tenendo conto che attualmente la jacobiana della rete $|C'|$, di cui allora parlavamo, conterrebbe come parte la curva A'. – Se vi fossero

(18) Si può anche notare, per quanto non serva nel seguito, che *il grado virtuale della curva A' è eguale $a - i$*, come si vede osservando che lo staccamento della A' da un sistema $|C'|$ trasfomato di un sistema lineare $|C|$ di F, che non abbia a per punto base, abbassa di i unità il grado virtuale del sistema residuo.

(19) Cfr. per esempio la mia Nota, *Il genere aritmetico*, cit. in (14), nn. 2, 7.

su F più punti fondamentali, ma non curve fondamentali, varrebbe analogamente la formola:

$$(15) \qquad \Omega' = n(\Omega - 1) + \varrho + \frac{3}{2}\theta + \sum(s + \sigma - 1),$$

ove la somma si estende a tutti i punti fondamentali.

Indicando con I_1, I_1' gl'invarianti di Zeuthen-Segre spettanti a F_1, F_1', e applicando la (10), otterremo:

$$I_1' = n(I_1 + 4) + 2\varrho - \tau - 6,$$

e poiché

$$I_1 = I + 1, \qquad I_1' = I' + (n - i) \quad (20)$$

verrà:

$$I' = n(I + 4) + 2\varrho - \tau - 6 + i$$

ossia:

$$(16) \qquad I' = n(I + 4) + 2\varrho - \tau - 6 + \left(\frac{1}{2}s - \sigma + 1\right).$$

Anche questa si sarebbe potuta ottenere direttamente col ragionamento del n° 9. – Se vi fossero su F più punti fondamentali, ma nessuno su F', avremmo similmente:

$$(17) \qquad I' = n(I + 4) + 2\varrho - \tau - 6 + \sum\left(\frac{1}{2}s - \sigma + 1\right).$$

Dalle (15), (17) mediante la relazione di Nöther, si trae:

$$(18) \qquad 24(P_a' + 1) = 24n(P_a + 1) + 6\varrho + 3\theta - 2\tau - 6 + 3\sum s.$$

È facile ora passare alle relazioni che legano i caratteri delle due superficie F, F' in corrispondenza (n, n') supposto che su F si trovino più punti fondamentali, dei quali uno, a, multiplo secondo s (≥ 0) per la curva di diramazione D, abbia per corrispondenti su F' $n' - i'$ punti isolati ed una curva di genere σ; e che sopra F' si trovino punti fondamentali, dei quali uno b', multiplo secondo s' $(\geq o)$ per la curva di diramazione E', abbia per corrispondenti su F $n - i$ punti isolati ed una curva di genere σ'. Perciò, come ai nn. 8, 10, basterà considerare le corrispondenze $(1, n')$ ed $(1, n)$ tra F, Φ ed F', Φ, osservare che esse posseggono rispettivamente i punti fondamentali a, b', su F, F' e *nessun* punto fondamentale su Φ; calcolare gl'invarianti di Φ, con le formole (15), (17), (18), profittando una volta della

(20) C. SEGRE, *loc. cit.*, in (5).

corrispondenza $(1, n')$ e un'altra della $(1, n)$, e infine eliminare questi invarianti fra le relazioni ottenute. – In questo modo si perviene alle formole:

$$(I) \quad n(\Omega' - 1) - n'(\Omega - 1) = \varrho - \varrho' + \frac{3}{2}(\theta - \theta') + \sum(s + \sigma - 1) - \sum(s' + \sigma' - 1)$$

$$(II) \quad n(I' + 4) - n'(I + 4) = 2(\varrho - \varrho') - (\tau - \tau') + \sum\left(\frac{1}{2}s - \sigma + 1\right) - \sum\left(\frac{1}{2}s' - \sigma' + 1\right)$$

$$(III) \quad 24n(P_a' + 1) - 24n'(P_a + 1) = 6(\varrho - \varrho') + 3(\theta - \theta') - 2(\tau - \tau') + 3\sum s - 3\sum s'.$$

Riassumendo possiamo enunciare:

Abbiasi fra due superficie F, F' una corrispondenza algebrica (n, n') e s'indichi con:

ϱ *il genere della curva di diramazione D tracciata su F,*
θ *il suo carattere d'immersione,*
τ *il n° dei punti di F che hanno tre degli omologhi coincidenti (ciascuno di questi punti è una cuspide per D),*
s (≥ 0) *la molteplicità per la curva D, di uno dei punti fondamentali della corrispondenza,*
σ *il genere della curva fondamentale corrispondente a quel punto.*

ϱ' *il genere della curva di diramazione E' tracciata su F',*
θ' *il suo carattere d'immersione,*
τ' *il n° dei punti di F' che hanno tre degli omologhi coincidenti (ciascuno di questi punti è una cuspide per E'),*
s' (≥ 0) *la molteplicità per la curva E' di uno dei punti fondamentali della corrispondenza,*
σ' *il genere della curva fondamentale corrispondente a quel punto.*

Allora fra gl'invarianti numerici delle due superficie passano le relazioni (I), (II), (III).

Nel caso che qualcuna delle curve definite mancasse, si dovrà porre il suo genere uguale ad 1.

XV.

SULLE CORRISPONDENZE FRA I PUNTI DI UNA CURVA ALGEBRICA E SOPRA CERTE CLASSI DI SUPERFICIE

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *54* (1903), 49 pp. (*)

Questo lavoro si divide in due parti: nella prima ricostruisco geometricamente la teoria delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, nella seconda ne faccio applicazione allo studio delle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve o di una sola curva.

Avanti di presentare le linee generali della prima parte di questa Memoria, credo utile esporre alcuni cenni storici e bibliografici intorno allo sviluppo della teoria delle corrispondenze sopra una curva.

Questa teoria nacque col principio di corrispondenza sopra una retta formulato esplicitamente da Chasles nel 1864 (1). Due anni dopo lo Chasles medesimo faceva applicazioni del principio alle curve razionali (2) e il Cayley enunciava un principio di corrispondenza sopra una curva di genere qualsiasi, dimostrandolo soltanto in un caso particolare (3). Successivamente egli applicava questo principio alla risoluzione di alcune questioni numerative, ed anzi profittando di una formola più generale, calcolava il numero dei punti uniti di corrispondenze alle quali non si poteva applicare il principio nella sua forma originaria (4).

La prima dimostrazione completa del principio di Cayley fu data da Brill (5), il quale pervenne algebricamente al numero delle coincidenze di una corrispondenza rappresentata da una sola equazione (6).

(*) Memoria presentata dai Soci C. Segre e G. Morera nell'adunanza del 24 maggio 1903.

(1) Comptes rendus, *58* (1864), p. 1175. A proposito di questo principio ved. la Nota storica di C. Segre nella Bibliotheca mathematica, *6* (1892), p. 33.

(2) Comptes rendus, *62* (1866), p. 584.

(3) Comptes rendus, *62* (1866), p. 586 e Proceedings of the London Math. Soc., *1* (1866).

(4) Phil. Trans., *158* (1868), p. 149. Per questa formola ved. il n° 10 della presente Memoria.

(5) Math. Annalen, *6* (1873), p. 33. Ved. anche gli altri lavori del Brill sullo stesso argomento, nei Math. Annalen, *7* (1874), p. 607; Math. Annalen, *31* (1888), p. 374.

(6) Ricordiamo qui che una corrispondenza qualunque fra i punti di una curva si può sempre rappresentare con due equazioni.

Per questa classe di corrispondenze il Brill introdusse la *valenza* (positiva), che insieme agli *indici* figura nella espressione del numero dei punti uniti, e ne precisò il significato algebrico.

Altre dimostrazioni algebrico–geometriche furono date da Junker [7] e da Bobek [8], una dimostrazione col metodo iperspaziale da Segre [9], una dimostrazione numerativa da Schubert [10] e un'altra dimostrazione numerativa da Zeuthen [11], che si occupò più specialmente dei modi di valutare le molteplicità delle coincidenze, di uno dei quali aveva già trattato in un lavoro anteriore [12].

Noterò infine la dimostrazione data da Lindemann con l'aiuto degl'integrali abeliani [13] e quella che si legge sulle *Leçons sur la Géometrie* di Clebsch-Lindemann [14].

Ma una Memoria, cronologicamente anteriore a qualcuna di quelle già citate, e che portò un nuovo contributo essenziale allo svolgimento della teoria in discorso, è quella, ormai classica, di Hurwitz [15].

In questo lavoro l'Autore, assurgendo dal problema di calcolare il numero dei punti uniti di una corrispondenza, ad un problema assai più elevato, si propone di determinare tutte le corrispondenze esistenti sopra una curva, e di studiare le loro proprietà intrinseche.

Dopo aver dato la rappresentazione di una corrispondenza algebrica col mezzo degli integrali abeliani, dimostra che sulle curve a moduli generali si presentano soltanto corrispondenze a *valenza positiva o negativa*, ciascuna delle quali si può definire mediante gli zeri e i poli di una determinata funzione razionale di due punti della curva; e dà la formola di corrispondenza ad esse relativa.

Passando alle corrispondenze sopra una curva a moduli qualunque, stabilisce anzitutto che quando i moduli soddisfano a particolari relazioni, esistono sulla curva corrispondenze prive di valenza (*singolari*); e mostra come ogni corrispondenza si possa rappresentare uguagliando a zero una funzione di due punti della curva, formata mediante le trascendenti θ. Infine prova

(7) *Inaugural-Dissertation*, Tubingen (1889).

(8) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, *93*, p. 899.

(9) *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Mat., (2) *22* (1894), § 12.

(10) *Kalkül der abzählenden Geometrie*, §18. Leipzig (1879).

(11) *Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill*, ecc. Math. Annalen, *40* (1892), p. 99. In questa Memoria si trovano molte delle indicazioni storiche che vado esponendo.

(12) Bulletin de Darboux, *5* (1873), p. 186.

(13) Crelle, *84* (1878), p. 301 (Lettre adressée à M. Hermite).

(14) Trad. par BENOIST, t. II, p. 146; Paris, Gauthier-Villars (1880), Il punto essenziale della dimostrazione è ivi sostituito da considerazioni intuitive di limite.

(15) *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip.* Math. Annalen, *28* (1886), p. 561. Ved. anche l'altra Memoria *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Math. Annalen, *31* (1888), p. 290.

che l'equazione di una corrispondenza fra i punti di una curva qualunque, si può comporre (per moltiplicazione) da quelle di un numero finito di altre corrispondenze convenientemente scelte; e da ciò trae il principio generale di corrispondenza [16].

Allorquando mi proposi lo studio delle corrispondenze sopra una curva, più che della determinazione del numero delle coincidenze, mi preoccupavo di cercare il contenuto geometrico del principio di corrispondenza, caratterizzando la funzione razionale (serie lineare) individuata dal gruppo dei punti uniti.

Pensavo invero che ciò sarebbe stato assai utile nelle questioni in cui l'algebricità entra non solo per ciò che concerne il numero delle soluzioni comuni a più equazioni, ma anche per le loro proprietà intrinseche.

Poiché la rappresentazione delle corrispondenze mediante le serie θ, permette di stabilire tutte le loro proprietà funzionali, io avrei potuto limitarmi ad una interpretazione geometrica di queste proprietà. Tuttavia mi è parso utile di ricostruire dagli inizi la teoria, prendendo le mosse dalle corrispondenze a valenza.

Darò qui un cenno della via seguita in questo studio. Dopo aver definito una corrispondenza a valenza positiva γ, come quella che gode della proprietà che i punti y omologhi di un punto variabile x, insieme a questo contato γ volte, formano un gruppo variabile in una serie lineare; e dopo aver caratterizzato geometricamente il gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza zero (n° 6), operando per *somma* e *prodotto* (n° 2) sulle corrispondenze a valenza zero e sulle involuzioni lineari, per le quali è nota la maniera di comporre il gruppo dei punti uniti [17], pervengo in un modo semplicissimo al teorema:

Il gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza γ, appartiene alla serie lineare somma di γ gruppi canonici, e delle serie che contengono il punto x contato γ volte ed i suoi omologhi, nella corrispondenza diretta e nell'inversa (n° 8).

Qui mi son limitato alle corrispondenze a valenza positiva; ma avverto subito che le medesime si posson ripetere con le stesse parole per quelle a valenza negativa, dopo aver precisato in ogni caso con opportune convenzioni (n° 3), in che consista l'operazione di *sottrarre un punto*.

(16) Per un'esposizione dei principali resultati contenuti nella Memoria di Hurwitz, ved. KLEIN-FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen*, Bd. 2, p. 518; Leipzig (1892), ove trovasi anche uno studio delle corrispondenze modulari; e BAKER, *Abel's theorem and the allied theory*, ecc., pag. 639; Cambridge (1897).

Le corrispondenze a valenza negativa son pure considerate nella Memoria citata di Zeuthen, il quale definisce la valenza mediante la formola che dà il numero dei punti uniti. Questa definizione è legittima solo per le corrispondenze sopra le curve a moduli generali, allo studio delle quali si limita l'Autore.

(17) Il gruppo dei punti doppi di una g_n^1 è notoriamente equivalente ad un gruppo canonico aumentato di un gruppo della serie $2g_n$.

Se una corrispondenza è a valenza, questa sua proprietà si può interpretare come una speciale relazione di *dipendenza* fra essa e la corrispondenza identica. Partendomi da questo concetto, al n° 9 estendo la nozione di valenza, introducendo quella di *corrispondenze fra loro dipendenti*, e trovo quindi per via geometrica la relazione funzionale fra i gruppi dei loro punti uniti (n° 10). La traduzione aritmetica di questa relazione dà luogo al *principio generale di corrispondenza.*

Ciò dipende dal fatto che sopra ogni curva vi è un numero finito di corrispondenze indipendenti, cosicché fissatene alcune, tutte le altre risultano dipendenti da quelle. In particolare sopra le curve a moduli generali, tutte le corrispondenze sono dipendenti dall'identità.

Giacché l'esistenza di un numero finito di corrispondenze indipendenti è una proprietà di natura così profonda, che sembra assai arduo dimostrarla senza far uso di strumenti trascendenti, al n° 11 riallaccio il concetto di dipendenza fra corrispondenze, con le considerazioni svolte da Hurwitz al § 13 della sua Memoria, e così ottengo la dimostrazione della proprietà stessa.

Nella seconda parte del lavoro mi occupo delle curve tracciate sopra una superficie F con due fasci unisecantisi (superficie delle coppie di punti di due curve C, C'), e sopra una superficie Φ con un sistema algebrico $\infty^1 \Sigma$, d'indice 2 e grado 1 (superficie delle coppie – non ordinate – dei punti di una curva C).

Si presenta spontaneo il legame fra la teoria delle curve appartenenti a queste superficie e la teoria delle corrispondenze, perché ogni curva di F rappresenta le coppie dei punti omologhi in una determinata corrispondenza fra C, C'; ed ogni curva di Φ rappresenta le coppie dei punti omologhi in una corrispondenza simmetrica sopra la curva C.

Profittando del fatto che sopra una curva c'è un numero finito di corrispondenze indipendenti, si perviene a dimostrare che *sulla superficie F ogni curva si ottiene con le operazioni di somma e sottrazione, a partire da un numero finito di curve (base) e da quelle dei due fasci unisecantisi.*

Analogamente sulla Φ una curva qualunque si ottiene da un numero finito di curve (base) e da quelle del sistema Σ [18].

Queste proposizioni offrono il mezzo di dimostrare il *teorema di Bézout* sulle superficie F e Φ, ossia di calcolare il numero dei punti comuni a due curve, mediante i caratteri di ciascuna di esse.

In particolare se i due fasci di F sono razionalmente identici ed a moduli generali, ogni curva si compone a partire dalle curve dei due fasci e da una curva unisecante le precedenti; e similmente ogni curva di Φ, se il sistema Σ è a moduli generali, si ottiene dalle curve di questo e dal loro inviluppo.

Quando i moduli dei due fasci di F, o del sistema Σ di Φ, soddisfano a particolari relazioni, per determinare effettivamente la base di tutte le

(18) Un teorema analogo si conosce sulle superficie razionali, sulle superficie generali nel loro ordine e sulla superficie di Kummer, come più tardi avremo occasione di notare.

curve appartenenti ad F o Φ, occorre un esame appropriato ad ognuno dei casi possibili.

Per dare un esempio di questi casi singolari, nell'ultimo § di questa Memoria, mi occupo delle superficie che nascono dalle coppie (ordinate o non) dei punti di una curva ellittica a modulo arbitrario. La determinazione effettiva della base su queste superficie, nei casi singolari, si fa ricorrendo alla teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa.

Nella trattazione di esempî più elevati, si dovrebbe ricorrere alla teoria delle funzioni abeliane a moltiplicazione complessa [19].

Terminerò con alcune indicazioni bibliografiche sulla teoria delle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o due curve.

Le superficie che nascono dalle coppie (non ordinate) dei punti di una curva ellittica (rigate ellittiche) furono considerate da Segre [20], quelle che rappresentano le coppie dei punti di una curva del genere 2 (superficie iperellittiche) da Picard [21], che le incontrò nella ricerca delle superficie che ammettono un gruppo permutabile di trasformazioni birazionali, e successivamente da Humbert, che ne fece uno studio esauriente [22].

Lo studio delle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve distinte o le coppie di punti di una curva di genere maggiore di due, è stato iniziato recentemente [23].

PARTE PRIMA

LE CORRISPONDENZE SOPRA UNA CURVA ALGEBRICA.

§ 1. – *Generalità.*

1. *Concetto di corrispondenza.* – Consideriamo due curve algebriche C, C' e indichiamo con x un punto qualunque di C, e con y un punto qualunque di C'. Se il punto y di C' è funzione algebrica a β valori del punto x di C, sarà x funzione algebrica a un certo numero α di valori, del punto y variabile su C', e si dirà che fra C, C' passa una *corrispondenza algebrica di indici* (α, β).

(19) Questa teoria che ha così intimi legami con quella delle corrispondenze singolari sopra una curva algebrica, non ha ancora raggiunto un maturo sviluppo. Essa è sorta dopo la teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa (la cui origine risale ad Abel), per opera specialmente di KRONECKER (« Berlin., Monatsber. », 1866), WEBER (Annali di Mat., (2) *9* (1878)) e FROBENIUS (Crelle, *95* (1883)). Le funzioni abeliane del genere 2 a moltiplicazione complessa, furono studiate da WILTHEISS (Math. Annalen, *26* (1886)) e recentemente da HUMBERT (Comptes-rendus, *134* (1902); e Journal de Math., (5) *9* (1903)).

(20) Atti della R. Acc. di Torino, *21* (1886).

(21) Journal de Math., (4) *1* (1885), *5* (1889).

(22) Journal de Math., (4) *9* (1893).

(23) Cfr. MARONI, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi*, Atti della R. Accad. di Torino, *39* (1903); DE-FRANCHIS, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, Rendiconti di Palermo, *17* (1903); e la mia Nota, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*, Atti della R. Accad. di Torino, *38* (1903) [Nota XII, p. 119; N.d.R.].

Ogni corrispondenza algebrica fra due curve, in quanto può riguardarsi come un ente ∞^1 entro alla varietà ∞^2 delle coppie di punti delle due curve, si può definire considerando le coppie di quei punti le cui coordinate soddisfano contemporaneamente a due equazioni (all'infuori, eventualmente, di un numero finito di coppie estranee) (24).

Allorquando le due curve C, C' coincidono, ogni corrispondenza T di indici (α, β) fra C, C', dà luogo ad una corrispondenza T^{-1} di indici (β, α), detta l'*inversa* della T, la quale si ottiene applicando le operazioni della T, dopo di avere scambiato l'ufficio delle due curve. Così se la T è definita dalle relazioni:

$$y = \varphi(x) \quad , \quad x = \varphi^{-1}(y) ,$$

ove φ è il simbolo d'una certa funzione algebrica a β valori, e φ^{-1} il simbolo della funzione algebrica ad α valori inversa di φ, la T^{-1} sarà definita dalle relazioni:

$$x = \varphi(y) \quad , \quad y = \varphi^{-1}(x) .$$

Nel caso che stiamo considerando, invece di parlare di due curve coincidenti, si parla spesso di una sola curva e di corrispondenze algebriche su questa; e la corrispondenza diretta e la sua inversa si riguardano come due operazioni, l'una inversa dell'altra, applicate ad una medesima classe di punti. Per esser conseguenti a questo modo di considerare la cosa, indicheremo con a un punto generico della classe, e rispettivamente con y, x i punti omologhi di a nella corrispondenza diretta e nell'inversa; ossia porremo:

$$y = \varphi(a) \quad , \quad x = \varphi^{-1}(a) .$$

Una corrispondenza fra i punti di una curva si dirà *simmetrica*, quando gli omologhi di un punto qualsiasi a nella corrispondenza diretta coincidono cogli omologhi dello stesso punto nell'inversa, ossia, in simboli, quando:

$$\varphi(a) = \varphi^{-1}(a) .$$

Le *involuzioni* sono particolari corrispondenze simmetriche.

La *corrispondenza identica* o *identità* è quella che si ottiene chiamando omologo di ogni punto, il punto stesso.

Una corrispondenza data sopra una curva dicesi *degenere*, se esiste qualche punto (singolare) al quale corrispondano tutti i punti della curva.

Noi di solito considereremo corrispondenze (non degeneri) tali che fra i punti y omologhi del punto a, non ve ne sia generalmente nessuno coincidente con a, e che al variare di a mutino tutti gli y. In queste corrispondenze, per la natura stessa della loro definizione, non potrà aversi che un numero finito di *punti uniti*, cioè di punti coincidenti coi loro omologhi.

(24) Ved. ad esempio la citata *Introduzione* di C. Segre (n° 6).

Oltre agli indici, vi sono anche altri caratteri spettanti ad una corrispondenza, ma di questi altri ci occuperemo in seguito.

2. *Operazioni sulle corrispondenze.* - Diremo *somma* di due corrispondenze T_1, T_2, la corrispondenza $T_1 + T_2$ che si ottiene chiamando omologhi di ogni punto a i corrispondenti nella T_1 e i corrispondenti nella T_2.

La somma gode delle proprietà commutativa e associativa.

Diremo *prodotto* di T_1, T_2, la corrispondenza che si ottiene applicando a ciascuno degli omologhi di a nella T_1, le operazioni di T_2, e facendo corrispondere ad a i punti così ottenuti. Questa corrispondenza prodotto s'indicherà col simbolo $T_2 T_1$, mettendo a destra il simbolo della prima operazione applicata ad a.

Il prodotto non gode generalmente della proprietà commutativa, ma gode dell'associativa e della proprietà distributiva rispetto alla somma.

Sono evidenti le relazioni:

$$(1) \qquad (T_1 + T_2)^{-1} = T_1^{-1} + T_2^{-1} \quad , \quad (T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1}.$$

In particolare l'inversa della corrispondenza $2\,T_1$, che si ottiene chiamando omologhi del punto a i punti che gli corrispondono in T_1, ciascuno contato due volte, è uguale al doppio della inversa, ecc.

3. *Notazioni.* - Passiamo ora a spiegare alcune notazioni, delle quali avremo occasione di servirci.

La scrittura

$$A \equiv B,$$

ove A, B son gruppi di n punti sulla curva C, denoterà, secondo l'uso, che i due gruppi sono *equivalenti*, cioè che appartengono ad una stessa serie lineare di ordine n; la scrittura λA, ove λ è un intero positivo, rappresenterà il gruppo dei punti che si ottiene contando λ volte ciascun punto di A.

Se $A_1 A_2 \cdots$; $B_1 B_2 \cdots$ son gruppi di punti, il significato della relazione

$$(2) \qquad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \cdots,$$

ove λ, μ son interi positivi o negativi, risulta senz'altro se son possibili le eventuali sottrazioni indicate in ciascuno de' suoi membri; ma possiamo in ogni caso dare un senso alla (2), intendendo ch'essa equivalga alla relazione che da essa si ottiene trasportando da un membro all'altro i termini negativi e cambiandoli di segno.

Si può presentare questa convenzione sotto un altro aspetto, che giova spesso aver presente. Denotiamo con L il gruppo di punti rappresentato dall'insieme dei termini positivi nel 1° membro della (2), e con L' il gruppo che vien rappresentato dall'insieme dei termini negativi, presi col segno cambiato; M, M' abbiano significati analoghi rispetto al 2° membro. Sieno infine L_1, M_1 due gruppi equivalenti che contengano rispettivamente i

gruppi L', M'; allora diremo che sussiste la (2), se:

$$L + (L_1 - L') \equiv M + (M_1 - M'). \tag{3}$$

Questa definizione è legittima perché la (3) resta soddisfatta allorché al posto di L_1, M_1, si pongano due altri gruppi soddisfacenti alle stesse condizioni. L'identità delle definizione medesima con quella data prima è evidente.

Talora per esprimere la (2) diremo che i gruppi (virtuali)

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots, \qquad \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \cdots,$$

sono *equivalenti* od anche che *appartengono ad una stessa serie lineare*, per quanto, se le λ, μ non son tutte positive, non sempre esistano gruppi effettivi corrispondenti a quei simboli. Questo modo di dire, mentre servirà ad abbreviare il linguaggio in un modo espressivo, non potrà dar luogo ad ambiguità.

Dalla definizione si trae subito come sia lecito moltiplicare i due membri della (2) per un intero qualsiasi (positivo o negativo), e come avendosi due relazioni del tipo (2), si possano sommare o sottrarre membro a membro.

§ 2. – *Corrispondenze a valenza.*

4. *Concetto di valenza.* – Sia T una corrispondenza fra i punti di una curva C, e sia Y il gruppo dei β punti y omologhi di a nella T. In generale al variare di a il gruppo Y non varia in una serie lineare d'ordine β; tuttavia può avvenire che il gruppo $Y + \gamma a$, ove γ è un intero positivo o negativo o nullo, varii in una serie lineare d'ordine $\beta + \gamma$. Si dirà allora che la corrispondenza ha la *valenza* γ.

Nel caso in cui γ sia negativo può darsi che il simbolo $Y + \gamma a$ non rappresenti un effettivo gruppo di punti; ma ad ogni modo anche in tal caso noi sappiamo quale senso deve attribuirsi alla definizione precedente (n° 3).

Sotto forma diversa si può dire che T ha la valenza γ, ove γ è un'intero positivo o negativo o nullo, se denotando con Y, Y' i gruppi di punti omologhi nella T di due punti qualsiansi a, a' di C, sempre si ha:

$$Y + \gamma a \equiv Y' + \gamma a' \ ^{(25)}.$$

Se la curva C non è razionale, la corrispondenza T non potrà ammettere una seconda valenza (diversa da γ). Supponiamo infatti che la T possegga un'altra valenza γ'. Allora avremo:

$$Y + \gamma' a \equiv Y' + \gamma' a',$$

(25) L'identità di questa definizione con quella trascendente di Hurwitz, risulta subito dal teorema di Abel. Ved. ad esempio SCORZA, *Sopra le corrispondenze* (p, p) *esistenti sulle curve di genere* p *a moduli generali*, Atti della R. Acc. di Torino, 35 (1900), n° 1.

che sottratta dalla precedente, dà:

$$(\gamma - \gamma')\, a \equiv (\gamma - \gamma')\, a',$$

ossia:

$$ka \equiv ka',$$

ove k è un intero positivo (non nullo).

La serie lineare g_k^r, che contiene tutti i gruppi ka non sarà certo composta con un'involuzione, sicché potrà immaginarsi segata sopra una curva Γ di ordine k, dagli iperpiani del suo spazio S_r. – Poiché un iperpiano osculatore alla Γ in un punto generico, ha con essa contatto r–punto, risulterà $k = r$, e la Γ sarà una curva razionale (normale).

Dunque è vero che *sopra una curva di genere* > 0 *una corrispondenza non può avere due diverse valenze.*

5. *Operazioni sulle corrispondenze a valenza.* – Dimostriamo che:

La somma di due corrispondenze a valenze γ_1, γ_2, *ha la valenza* $\gamma_1 + \gamma_2$.

Sieno $T_1 T_2$ le due corrispondenze, Y_1, Y_1' i gruppi di punti omologhi di a, a' nella T_1, Y_2, Y_2' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_2. In base alla definizione, avremo:

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y_1' + \gamma_1 a'$$
$$Y_2 + \gamma_2 a \equiv Y_2' + \gamma_2 a',$$

donde sommando si trae:

$$(Y_1 + Y_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)\, a \equiv (Y_1' + Y_2') + (\gamma_1 + \gamma_2)\, a' \qquad \text{c.d.d.}$$

Il prodotto di due corrispondenze a valenze γ_1, γ_2 *ha la valenza* $-\gamma_1 \gamma_2$.

Continuando ad usare le notazioni di prima diciamo $y_1 \cdots y_\beta$ i punti del gruppo Y_1; $y_1' \cdots y_\beta'$ quelli di Y_1', e Y_{2i}, Y_{2i}' i gruppi degli omologhi di y_i, y_i' nella T_2. Verrà allora:

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y_1' + \gamma_1 a'$$
$$Y_{2i} + \gamma_2 y_i \equiv Y_{2i}' + \gamma_2 y_i' \qquad (i = 1, \cdots, \beta).$$

Da queste si traggono le relazioni:

$$\gamma_2 Y_1 + \gamma_1 \gamma_2 a \equiv \gamma_2 Y_1' + \gamma_1 \gamma_2 a'$$
$$\sum_{i=1}^{\beta} Y_{2i} + \gamma_2 Y_1 \equiv \sum_{i=1}^{\beta} Y_{2i}' + \gamma_2 Y_1'.$$

Sottraendo la 1ª dalla 2ª, avremo, come si voleva:

$$\Sigma Y_{2i} - \gamma_1 \gamma_2 a \equiv \Sigma Y_{2i}' - \gamma_1 \gamma_2 a'.$$

6. *Determinazione del gruppo dei punti uniti nelle corrispondenze a valenza zero.* – Sia T una corrispondenza a valenza zero: variando a su C il gruppo Y dei β punti y omologhi di a, varia in tal caso in una serie lineare d'ordine β.

Supponiamo che la curva C, dotata soltanto di nodi, sia piana e che la serie lineare completa g^r_β che contiene i gruppi Y, sia segata da un sistema lineare Σ di curve $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0$ di un certo ordine m', passanti eventualmente per un gruppo Q di punti fissi (dei quali alcuni o tutti posson cadere su C). Senza introdurre restrizioni si può supporre che Σ sia r volte esteso, ossia che per un gruppo della g^r_β passi una sola φ.

I gruppi Y saranno segati da un sistema algebrico ∞^1 di curve φ, e poiché ad ogni punto di C risponde una sola φ di quel sistema ∞^1, i coefficienti di questa saranno funzioni razionali del punto scorrente su C. Sicché l'equazione di una φ del sistema ∞^1 si potrà scrivere sotto la forma:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0,$$

ove Φ è il simbolo di un polinomio omogeneo di grado m nelle x, e omogeneo di grado m' nelle y.

Ne viene che gli omologhi nella T^{-1} di un dato punto y^0, saranno segati su C della curva:

$$\Psi^0 \equiv \Phi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1^0, y_2^0, y_3^0) = 0,$$

non passante per y^0, fuori eventualmente di certi punti appartenenti ad un gruppo R comune a tutte le Ψ di ordine m analoghe ad essa. Da ciò *intanto si trae che la inversa della T ha pure la valenza zero.*

La curva $\Phi(x_1, x_2, x_3 \mid x_1, x_2, x_3) = 0$, di ordine $m + m'$, passa evidentemente pei punti dei due gruppi Q ed R, e quindi appartiene al sistema lineare somma dei due sistemi contenenti rispettivamente le φ e le ψ. Ne segue che essa, fuori dei punti fissi eventuali comuni alle φ e alle ψ, sega su C un gruppo appartenente alla somma delle due serie che contengono rispettivamente i gruppi omologhi dei punti di C nella corrispondenza T e nella T^{-1}.

Ma i punti comuni alla $\Phi(x_1, x_2, x_3 \mid x_1, x_2, x_3) = 0$, e alla C, fuori dei punti fissi suddetti, sono punti uniti per la T, dunque il gruppo U di questi punti è equivalente alla somma dei gruppi X e Y che contengono gli omologhi del punto a nella T^{-1} e nella T; ossia in simboli:

$$U \equiv X + Y.$$

7. *Esistenza sopra ogni curva di corrispondenze aventi una valenza data. – Inversa di una corrispondenza a valenza.* – Se sulla curva C si considera una g^1_n e di un punto a variabile su C si chiamano omologhi i punti che insieme ad esso dànno un gruppo della g^1_n, si ha, secondo le definizioni poste, una corrispondenza involutoria a valenza 1, che per brevità chiameremo una *corrispondenza elementare* (a valenza).

Facendo la somma di γ (> 0) corrispondenze elementari, si ottiene una corrispondenza a valenza γ, e facendo il prodotto di una tal corrispondenza con una corrispondenza elementare, si ha una corrispondenza a valenza $-\gamma$ (n° 5). Infine se si fa la somma di una corrispondenza a valenza γ con una a valenza $-\gamma$, si ottiene una corrispondenza a valenza zero.

Dunque:

Sopra ogni curva esistono corrispondenze a valenza arbitraria (positiva, negativa o nulla).

Dimostriamo inoltre che:

Se una corrispondenza ha valenza, la sua inversa ha la stessa valenza.

È evidente anzitutto che l'inversa della corrispondenza S, somma di $k\,(>0)$ corrispondenze elementari, ha la valenza k, e che la inversa del prodotto di S per una corrispondenza elementare ha la valenza $-k$ (ved. le (1)). Ciò posto sia T una qualunque corrispondenza a valenza γ (positiva o negativa) e sieno X, X' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T^{-1}.

Componiamo per mezzo di corrispondenze elementari, una corrispondenza T_1 a valenza $-\gamma$, e diciamo X_1, X_1' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_1^{-1}. Poiché la somma $T+T_1$ ha la valenza zero, anche la corrispondenza $(T+T_1)^{-1}=T_1^{-1}+T^{-1}$ avrà la valenza nulla (n° 6), e quindi accanto alla:

$$X_1-\gamma a\equiv X_1'-\gamma a',$$

sussisterà la relazione:

$$X+X_1\equiv X'+X_1'.$$

Sottraendo dalla 2ª la 1ª, viene:

$$X+\gamma a\equiv X'+\gamma a' \qquad \text{c.d.d.}$$

8. *Determinazione del gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza qualsiasi. - Numero delle coincidenze.* - Torniamo per un momento ad una corrispondenza elementare T, che sia ottenuta partendo da una g_n^1, e diciamo Y il gruppo degli $n-1$ punti omologhi di a nella T, e X il gruppo degli omologhi di a nella T^{-1}. Siccome $T=T^{-1}$ il gruppo X coinciderà con Y.

Il gruppo U dei punti uniti di T non è che il gruppo jacobiano della g_n^1, e come si sa questo gruppo è equivalente ad un gruppo canonico aumentato di un gruppo della serie $2g_n$. Perciò dicendo K un gruppo canonico di C, avremo la relazione:

$$U\equiv X+Y+2a+K.$$

Servendoci di questa, dimostriamo più in generale che:

Avendosi fra i punti di una curva una corrispondenza T a valenza γ (positiva, negativa o nulla), il gruppo U dei punti uniti è equivalente alla somma dei gruppi Y, X, che contengono gli omologhi di a nella T e nella T^{-1}, di γ gruppi canonici e di 2γ volte il punto a; ossia in simboli:

$$U\equiv X+Y+\gamma K+2\gamma a, \tag{4}$$

ove K rappresenta un gruppo canonico.

Interpretando numericamente la relazione geometrica data da questo teorema si ha:

$$u=\alpha+\beta+\gamma(2p-2)+2\gamma,$$

ove u è il numero dei punti uniti α , β son gli indici di T, e p è il genere della curva. Si può dunque dire:

Il numero dei punti uniti nella corrispondenza T d'indici α , β, di valenza γ, data fra i punti di una curva di genere p, è espresso dalla formola:

$$\alpha + \beta + 2\gamma p. \tag{5}$$

Dimostriamo prima la (4) per una corrispondenza S somma di h (> 0) corrispondenze elementari $T_1 \cdots T_h$.

Indicando con $Y_1 Y_2 \cdots Y_h$ i gruppi degli omologhi di a nelle corrispondenze $T_1 \cdots T_h$, e con $X_1 X_2 \cdots X_h$ i gruppi degli omologhi di a nelle inverse, si vede che la S fa corrispondere al punto a il gruppo $Y_0 = Y_1 + \cdots + Y_h$, e la S^{-1} fa corrispondere ad a il gruppo $X_0 = X_1 + \cdots + X_h$. Inoltre il gruppo V dei punti uniti di S sarà la somma dei gruppi $U_1 \cdots U_h$ dei punti uniti $T_1 \cdots T_h$.

Dalle relazioni:

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv X_1 + Y_1 + K + 2a \\ U_2 &\equiv X_2 + Y_2 + K + 2a \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_h &\equiv X_h + Y_h + K + 2a, \end{aligned}$$

sommando si trae:

$$V \equiv X_0 + Y_0 + hK + 2ha,$$

la quale dimostra il teorema per la corrispondenza S.

Sia ora T una qualunque corrispondenza a valenza negativa γ, riferendoci alla quale conserviamo le notazioni dell'enunciato. Indicando con h il valore assoluto di γ, si costruisca come sopra una corrispondenza S somma di h corrispondenze elementari.

La somma delle due corrispondenze S , T, che è a valenza nulla, fa corrispondere ad a il gruppo $Y + Y_0$, mentre la sua inversa fa corrispondere ad a il gruppo $X + X_0$; e inoltre la $S + T$ ha per gruppo dei punti uniti il gruppo $U + V$. Dunque avremo (n° 6):

$$U + V \equiv (X + X_0) + (Y + Y_0).$$

Sottraendo da questa la relazione precedentemente ottenuta, viene:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a.$$

Così è dimostrata la proposizione per tutte le corrispondenze a valenza negativa.

Avendosi ora una corrispondenza T a valenza positiva γ, si costruisca una corrispondenza T' a valenza negativa $-\gamma$ (il che è sempre possibile) e si dicano Y', X' i gruppi degli omologhi di a nella T' e nella T'^{-1} rispettivamente, e U' il gruppo dei punti uniti di T'. Conservando ancora per la T le notazioni dell'enunciato, poiché la somma $T + T'$ è a valenza nulla, avremo:

$$U + U' \equiv (X + X') + (Y + Y'),$$

ed essendo T' a valenza negativa, per quanto abbiamo prima dimostrato, sarà:

$$U' \equiv X' + Y' - \gamma K - 2\gamma a .$$

Da questa e dalla precedente per sottrazione si trae:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a ,$$

la quale dimostra il teorema per tutte le corrispondenze a valenza positiva.

Osservazione. – Dal principio di corrispondenza già enunciato, tenendo conto della 2ª proposizione del nº 5, segue facilmente che:

Il numero dei punti uniti della corrispondenza prodotto delle corrispondenze $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)\cdots(\alpha_k \beta_k \gamma_k)$, *ove* α , β , γ *denotano rispettivamente gli indici e le valenze, positive o negative, delle corrispondenze considerate, è dato da*:

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k + \beta_1 \cdots \beta_k + (-1)^{k+1} \cdot 2\, \gamma_1 \cdots \gamma_k \, p.$$

§ 3. – Sulla determinazione di tutte le corrispondenze esistenti sopra una curva qualsiasi.

9. *Estensione del concetto di valenza.* – Sia T_1 una corrispondenza a valenza γ_1 sulla curva C, e sieno Y_1 , Y_1' i gruppi degli omologhi di a , a' nella T_1. Allora si ha:

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y_1' + \gamma_1 a',$$

la quale ci mostra che al variare di a, il gruppo de' suoi omologhi nella corrispondenza T_1, aumentato di γ_1 volte l'omologo di a nella corrispondenza identica I, varia in una serie lineare [26]. Ciò si esprimerà dicendo che le corrispondenze T_1 ed I sono *dipendenti* secondo i numeri $(1 , \gamma_1)$.

Sia T_2 un'altra corrispondenza a valenza γ_2. Avremo similmente:

$$Y_2 + \gamma_2 a \equiv Y_2' + \gamma_2 a',$$

la quale combinata colla precedente dà:

$$\gamma_2 Y_1 - \gamma_1 Y_2 \equiv \gamma_2 Y_1' - \gamma_1 Y_2'.$$

Dunque al variare di a il gruppo de' suoi omologhi nella T_1, contato γ_2 volte, aumentato di $-\gamma_1$ volte il gruppo de' suoi omologhi nella T_2, varia in una serie lineare. Perciò diremo che le corrispondenze T_1 , T_2 son dipendenti secondo i numeri $(\gamma_2 - \gamma_1)$.

Si presenta ora spontaneamente l'idea che il concetto di dipendenza si possa stabilire anche fra più di due corrispondenze, prescindendo dall'ipotesi che le corrispondenze stesse siano dotate di valenza.

(26) A proposito di questa locuzione cfr. il nº 3.

E noi infatti *diremo che le corrispondenze* $T_1, \cdots, T_k$ *date sopra una curva* C *sono* DIPENDENTI, *quando esistono* k *interi* $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ *(positivi o negativi) non tutti nulli, tali che indicando con* Y_i *il gruppo degli omologhi di un punto qualunque* a *nella* T_i, *al variare di* a *il gruppo (virtuale)* $\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_k Y_k$ *varii in una serie lineare.*

In altri termini se Y_i' è il gruppo degli omologhi del punto a' nella T_i, la condizione di dipendenza è espressa dalla relazione:

$$\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_k Y_k \equiv \lambda_1 Y_1' + \cdots + \lambda_k Y_k' . \tag{6}$$

Nel caso che una tal relazione non sia possibile se non quando le λ son tutte nulle, le k corrispondenze si diranno *indipendenti.*

Quando più corrispondenze sono fra loro dipendenti, talora diremo che una qualunque di esse è *dipendente dalle rimanenti.* Allorché poi occorra tener presenti gli interi pei quali la (6) è soddisfatta, diremo pure che le corrispondenze $T_1 \cdots T_k$ son dipendenti secondo $(\lambda_1 \cdots \lambda_k)$.

È evidente che se $T_1 \cdots T_k$ son dipendenti secondo $(\lambda_1 \cdots \lambda_k)$ lo sono anche secondo $(\mu\lambda_1 \cdots \mu\lambda_k)$, ove μ è un intero positivo o negativo, arbitrario.

Le due osservazioni fatte al principio di questo numero si possono ora enunciare nel modo seguente:

Ogni corrispondenza a valenza dipende dall'identità.

Due corrispondenze a valenza son sempre dipendenti.

Estendendo una proposizione del nº 7 dimostriamo che:

Se le corrispondenze $T_1 \cdots T_k$ *son dipendenti secondo* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$, *anche le loro inverse son dipendenti secondo gli stessi numeri.*

Limitiamoci per brevità al caso $k = 2$, e supponiamo che λ_2, ad esempio, sia negativo $(= -\lambda_2')$ e λ_1 positivo. Fissiamo una serie g_n^r, convenientemente ampia, in modo che vi sia un solo suo gruppo passante per ogni gruppo Y_2 costituito dagli omologhi di a nella T_2 (si fissino, per esempio, p punti generici della curva di genere p, e si consideri la serie, non speciale, individuata da quei p punti insieme ad un particolare gruppo Y_2). Chiamando Y_3 quel gruppo che insieme ad un dato Y_2 costituisce un gruppo della g_n^r fissata, e conservando pel resto le solite notazioni, avremo che la relazione:

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \equiv \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2'$$

equivale alla:

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2' Y_3 \equiv \lambda_1 Y_1' + \lambda_2' Y_3' . \tag{7}$$

Se si chiamano omologhi del punto variabile a i punti del gruppo Y_3 ad esso relativo, otterremo una corrispondenza algebrica S, tale che:

$$Y_2 + Y_3 \equiv Y_2' + Y_3' .$$

Da ciò deriva che se la inversa di S fa corrispondere ad a il gruppo X_3, e ad a' il gruppo X_3', sarà similmente (nº 6):

$$X_2 + X_3 \equiv X_2' + X_3' , \tag{8}$$

ove X_2 (o X_2') è il gruppo degli omologhi di a (o a') nella T_2^{-1}.

La corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$, che si ottiene chiamando omologhi di a i punti del gruppo Y_1 contati ciascuno λ_1 volte, e quelli di Y_3 contati λ_2' volte, in virtù della (7) risulta a valenza zero, sicché anche la sua inversa, che fa corrispondere ad a il gruppo $\lambda_1 X_1 + \lambda_2' X_3$, sarà a valenza zero. Quindi avremo:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2' X_3 \equiv \lambda_1 X_1' + \lambda_2' X_3',$$

ove X_1 (o X_1') è il gruppo degli omologhi di a (o a') nella T_1^{-1}.

Moltiplicando per λ_2' i due membri della (8), e sottraendola poi dall'ultima relazione, verrà:

$$\lambda_1 X_1 - \lambda_2' X_2 \equiv \lambda_1 X_1' - \lambda_2' X_2',$$

ossia:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \equiv \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' \qquad \text{c.d.d.}$$

Osservazione. — Questo ragionamento non servirebbe più nel caso che una delle corrispondenze fosse l'identità, come accadeva al n° 7. Si può però osservare che anche in tal caso la proposizione rimane valida, come si vede appunto profittando del n° 7.

10. *Relazione geometrica fra i gruppi dei punti uniti di più corrispondenze dipendenti. – Formola di corrispondenza relativa.*

Dimostriamo che:

Se nelle corrispondenze $T_1 \cdots T_k$ dipendenti secondo $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$, al punto a rispondono i gruppi di punti $Y_1 \cdots Y_k$, mentre nelle corrispondenze inverse al punto stesso rispondono i gruppi $X_1 \cdots X_k$, indicando con $U_1 \cdots U_k$ i gruppi dei punti uniti nelle $T_1 \cdots T_k$, si ha:

$$(9) \qquad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \cdots + \lambda_k (X_k + Y_k).$$

Per semplicità svilupperemo la dimostrazione nel caso $k = 2$; si vedrà subito come si estenda al caso generale.

Supponiamo, come dianzi, che λ_1 sia positivo e λ_2 negativo $(= -\lambda_2')$, e usiamo le stesse notazioni del numero precedente. Costruiscasi, come allora, la corrispondenza S tale che:

$$Y_2 + Y_3 \equiv Y_2' + Y_3',$$

e ricordiamo che la corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$, che nasce dal chiamare omologhi di a i punti del gruppo $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2' Y_3$, è a valenza zero. I punti uniti di questa corrispondenza cadono nei punti del gruppo U_1, che sono uniti nella T_1, e nei punti del gruppo V costituito dai punti uniti di S. Giacché in ogni punto del gruppo Y_1 omologo di a nella T_1, cadono λ_1 punti omologhi di a nella corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$, un punto unito di T_1 equivarrà a λ_1 coincidenze della corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$. Similmente ogni punto del gruppo V conterrà λ_2' volte fra i punti uniti di $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 S$. Dunque le coincidenze di quest'ultima costituiscono il gruppo $\lambda_1 U_1 + \lambda_2' V$,

e perciò se chiamiamo X_3 il gruppo degli omologhi di a nella S^{-1}, in virtù del risultato del n° 6, avremo:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2' V \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \lambda_2' (X_3 + Y_3).$$

Dalla considerazione della corrispondenza $T_2 + S$, pure a valenza zero, similmente si trae:

$$U_2 + V \equiv (X_2 + Y_2) + (X_3 + Y_3).$$

Moltiplicando questa per λ_2' e sottraendola dopo ciò dalla precedente, viene:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \lambda_2 (X_2 + Y_2) \qquad \text{c.d.d.}$$

Interpretando numericamente la relazione geometrica ottenuta, si ha una formola di corrispondenza molto importante.

Se diciamo u_i il numero dei punti di U_i, α_i il numero dei punti X_i, β_i il numero dei punti di Y_i, avremo:

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + \lambda_k (\alpha_k + \beta_k).$$

Dunque:

Se sopra una curva si hanno k corrispondenze di indici $\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_k, \beta_k$ *dipendenti secondo i numeri* $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, *positivi o negativi, le quali sieno dotate di* $u_1, \cdots, u_k$ *punti uniti, ha luogo la relazione*:

(10) $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + \lambda_k (\alpha_k + \beta_k).$$

La nota formola di Cayley [27], che è così utile nella risoluzione del problema dei contatti, si ottiene come caso particolare di questa relazione supponendo tutte le λ positive.

11. *Esistenza di un massimo pel numero delle corrispondenze indipendenti sopra una curva. – Base del sistema di tutte le corrispondenze.* – Data una curva C, è possibile scegliere su essa un numero finito di corrispondenze indipendenti, in guisa che ogni altra corrispondenza risulti dipendente da quelle?

Per rispondere a questa domanda dovremo far uso dello strumento trascendente di cui finora non profittammo.

Cominceremo perciò dal richiamare la rappresentazione delle corrispondenze algebriche con integrali abeliani, dovute al sig. Hurwitz.

Se dato il punto a si chiamano $y_1 y_2 \cdots y_\beta$ i punti omologhi ad esso in una corrispondenza algebrica T, data sopra la curva C, variando a si vede che la somma dei valori di un intregale di 1ª specie ai punti $y_1 \cdots y_\beta$, gode delle proprietà caratteristiche di un integrale di 1ª specie al punto a. Sicché

(27) Transactions of the Royal Society, *158* (1868), p. 149. Vedasi anche C. SEGRE, *Introduzione*, n° 49.

dicendo $u_1 \cdots u_p$ i p integrali normali di 1ª specie annessi a C, hanno luogo le relazioni:

$$\sum_{r=1}^{r=\beta} u_k(y_r) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\, u_i(a) + \pi_k \qquad (k = 1, \cdots, p) \tag{11}$$

ove le π sono indipendenti dalla posizione di a.

La tabella dei periodi degli integrali $u_1 \cdots u_p$ sia:

$$\begin{array}{l} 1\ 0 \cdots 0\ \ \tau_{11}\ \ \tau_{12} \cdots \tau_{1p} \\ 0\ 1 \cdots 0\ \ \tau_{21}\ \ \tau_{22} \cdots \tau_{2p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots\cdots 1\ \ \tau_{p1} \cdots\cdots \tau_{pp} \end{array} \qquad (\tau_{ik} = \tau_{ki})$$

Facendo descrivere ad a cammini chiusi convenienti a partire da una posizione iniziale e uguagliando le variazioni dei due membri delle (11), si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_{i=1}^{p} g_{il}\, \tau_{ki} \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\, \tau_{il} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G_{il}\, \tau_{ki} \end{cases} \qquad (k, l = 1, \cdots, p), \tag{12}$$

ove le h, g, H, G son numeri interi [28]. Si prova che per ogni soluzione del sistema (12) si ha una corrispondenza algebrica sulla C (Hurtwitz, § 11).

Ciò posto sieno:

$$\begin{cases} \pi^{\varepsilon}_{kl} = h^{\varepsilon}_{kl} + \sum_{i=1}^{p} g^{\varepsilon}_{il}\, \tau_{ki} \\ \sum_{i=1}^{p} \pi^{\varepsilon}_{ki}\, \tau_{il} = H^{\varepsilon}_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G^{\varepsilon}_{il}\, \tau_{ki} \end{cases} \qquad (\varepsilon = 1, \cdots, \mu) \tag{13}$$

μ soluzioni diverse del sistema (12). Si dice che queste μ soluzioni son dipendenti quando le equazioni:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon\, \pi^{\varepsilon}_{kl} = 0 \qquad (k, l = 1, \cdots, p) \tag{14}$$

son possibili per valori non tutti nulli degli interi $\lambda_1 \cdots \lambda_\mu$; nel caso contrario si dice che le μ soluzioni sono indipendenti (Hurwitz, § 13).

Vediamo come a questo concetto analitico faccia riscontro il concetto geometrico da noi introdotto della dipendenza fra corrispondenze. Dalle (13) si otterranno certe μ corrispondenze $T_1 \cdots T_\mu$ e se al punto a corrisponde nella T_ε il gruppo Y_ε costituito dai punti $y^{\varepsilon}_1 \cdots y^{\varepsilon}_\beta$, avremo:

$$u_k(y^{\varepsilon}_1) + u_k(y^{\varepsilon}_2) + \cdots + u_k(y^{\varepsilon}_\beta) \equiv \Sigma \pi^{\varepsilon}_{ki}\, u_i(a) + \pi^{\varepsilon}_k \qquad (\varepsilon = 1, \cdots, \mu).$$

(28) Hurwitz, *loc. cit.*, § 1.

Moltiplicando per λ_ε e facendo la somma da 1 a μ, verrà:

$$\lambda_1 [u_k (y_1') + \cdots] + \cdots + \lambda_\mu [u_k (y_1^\mu) + \cdots] \equiv \sum_i u_i (a) \sum_\varepsilon \lambda_\varepsilon \pi_{ki}^\varepsilon + \varrho_k ,$$

ove ϱ_k denota una costante.

Se i sistemi (13) son dipendenti, ossia se le (14) son soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, sarà:

$$\lambda_1 [u_k (y_1') + \cdots] + \cdots + \lambda_\mu [u_k (y_1^\mu) + \cdots] \equiv \varrho_k \qquad (k = 1, \cdots, p).$$

Se al punto a' corrisponde nella T_ε il gruppo Y_ε' costituito dai punti $z_1^\varepsilon \cdots z_\beta^\varepsilon$, avremo dunque:

$$\lambda_1 [u_k (y_1') + \cdots] + \cdots + \lambda_\mu (u_k (y_1^\mu) + \cdots] \equiv$$
$$\equiv \lambda_1 [u_k (z_1') + \cdots] + \cdots + \lambda_\mu [u_k (z_1^\mu) + \cdots].$$

Questa relazione in virtù del teorema di Abel, equivale alla:

$$\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_\mu Y_\mu \equiv \lambda_1 Y_1' + \cdots + \lambda_\mu Y_\mu' ,$$

la quale esprime appunto la dipendenza delle corrispondenze $T_1 \cdots T_\mu$ nel senso definito al n° 9.

Viceversa dalla dipendenza delle $T_1 \cdots T_\mu$ risalendo si deduce la dipendenza dei sistemi (13).

Siccome non vi possono essere più di $2p^2$ sistemi indipendenti del tipo (12) (Hurwitz, p. 582), il numero delle corrispondenze indipendenti ammetterà un massimo non superiore a $2p^2$.

Supponiamo che i μ sistemi (13) sieno indipendenti e che non se ne possano trovare più di μ indipendenti. Allora, dato un altro sistema di soluzioni delle (12), si potranno trovare dei numeri interi $\lambda , \lambda_1 , \cdots , \lambda_\mu$ non tutti nulli, in guisa che:

$$\lambda \pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^\varepsilon \qquad (k , l = 1 , \cdots , p)$$

ed anzi λ non potrà mai esser nullo.

In tal caso si dirà che le μ corrispondenze $T_1 \cdots T_\mu$ che si ottengono dalle (13), formano una *base*.

Che se poi si scelgono i μ sistemi in modo che il numero λ risulti uguale ad 1 per ogni sistema di soluzioni delle (12), in modo cioè che si abbia:

$$\pi_{kl} = \sum \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^\varepsilon \qquad (\varepsilon = 1 , \cdots , \mu),$$

ove le λ son numeri interi, si dice che le μ corrispondenze $T_1 \cdots T_\mu$ formano una *base minima*.

La possibilità di ridursi alla base minima accennata in Hurwitz (p. 582), trovasi ad esempio dimostrata nelle lezioni citate di Klein sulla teoria delle funzioni modulari ellittiche (p. 543).

Riassumendo possiamo enunciare:

Data una curva di genere p è possibile scegliere su essa un numero finito μ, non superiore a $2p^2$, di corrispondenze indipendenti $T_1, \cdots, T_\mu$ tali che se T è un'altra corrispondenza qualsiasi esistente sulla curva, le $T, T_1, \cdots, T_\mu$ sien dipendenti secondo i numeri $(1, \lambda_1, \cdots, \lambda_\mu)$.

I numeri $\lambda_1, \cdots, \lambda_\mu$ sono individuati una volta assegnata la T, perché altrimenti le $T_1, \cdots, T_\mu$ risulterebbero dipendenti. Quei numeri si chiamano perciò i *caratteri della corrispondenza* T.

Per le curve generali del genere p, il massimo μ è uguale ad 1, e come base minima si può assumere l'identità o una qualsiasi corrispondenza elementare.

Dicendo $u, u_1, \cdots, u_\mu$ i numeri dei punti uniti nelle corrispondenze $T, T_1, \cdots, T_\mu$ di indici rispettivi $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_\mu, \beta_\mu)$, avremo per la (10):

$$u = \alpha + \beta + \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1 - u_1) + \cdots + \lambda_\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu - u_\mu).$$

I numeri interi:

$$c_i = \alpha_i + \beta_i - u_i \qquad (i = 2, \cdots, \mu)$$

non dipendono dalla corrispondenza considerata, ma sibbene dalla natura della curva, e *la formola*

$$u = \alpha + \beta + c_1 \lambda_1 + \cdots + c_\mu \lambda_\mu$$

esprime il principio generale di corrispondenza sopra una curva algebrica qualsiasi.

Osservazione. – Noteremo, perché ci servirà in seguito, che se sopra una curva le μ corrispondenze $T_1 \cdots T_\mu$ sono dipendenti secondo i numeri $\nu\lambda_1, \cdots, \nu\lambda_\mu$ ove ν e le λ sono interi, lo sono anche secondo i numeri $\lambda_1 \cdots \lambda_\mu$. Difatti dall'essere:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \nu\lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} = 0,$$

si trae:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} = 0.$$

PARTE SECONDA

SULLE SUPERFICIE CHE RAPPRESENTANO LE COPPIE DI PUNTI DI UNA O DUE CURVE.

§ 1. – *Le superficie con due fasci unisecantisi.*

12. *Generalità. – Genere e grado di una corrispondenza fra due curve.* – Sia F una superficie che rappresenti *senza eccezione* le coppie di punti di due curve C, C' di generi p_1, p_2.

Ogni punto x di C fa parte di ∞^1 coppie le quali son rappresentate su F da una curva K_x; variando il punto x su C si hanno ∞^1 curve K_x che costi-

tuiscono un fascio $|K_x|$ di genere p_1. Similmente ai punti y di C' rispondono su F le curve di un fascio $|K_y|$ di genere p_2, e le K_y segano in un punto ogni K_x.

Viceversa ogni superficie con due fasci $|K_x|$, $|K_y|$ unisecantisi, rappresenta le coppie di punti di due curve C, C', ciascuna delle quali è riferita biunivocamente agli elementi (curve) di uno dei due fasci.

Le coppie x, y dei punti che sono omologhi in una data corrispondenza algebrica T fra C, C', son rappresentate su F da una curva algebrica, che denoteremo colla lettera stessa T con cui si denota la corrispondenza. Se ad un punto x rispondono β punti y e ad un punto y rispondono α punti x, la curva T sarà segata in β punti da ogni curva K_x e in α punti da ogni K_y. I due indici α, β della corrispondenza si chiameranno anche gli *indici della curva* T.

Viceversa ogni curva algebrica T tracciata su F pone fra le curve dei due fasci $|K_x|$, $|K_y|$ una corrispondenza algebrica, ove si chiamino omologhe due curve dei fasci stessi quando si tagliano in T; e quindi essa rappresenta una corrispondenza algebrica tra C, C'. Le curve dei due fasci unisecantisi sono immagini di corrispondenze *degeneri*.

Qui si presenta spontanea l'introduzione di due nuovi caratteri di una corrispondenza T fra C, C': il *genere* e il *grado* (virtuali) della curva T tracciata su F [29], i quali si indicheranno rispettivamente con ϱ, ν.

Poiché il sistema canonico di F si ottiene aggiungendo alla serie canonica di $|K_x|$ la serie canonica di $|K_y|$ [30], dicendo α, β gl'indici di T, ossia chiamando β il numero dei punti in cui una K_x sega T ed α il numero dei punti in cui una K_y sega T, avremo:

$$2\beta(p_1 - 1) + 2\alpha(p_2 - 1) + \nu = 2p - 2 \quad (15)$$ [31].

13. *Notazioni.* – Se due curve Γ' Γ'' tracciate sopra una superficie qualsiasi appartengono totalmente ad uno stesso sistema lineare, si dirà che esse sono equivalenti e si scriverà

$$\Gamma' \equiv \Gamma''.$$

Date sopra una superficie più curve Γ' $\Gamma''\cdots$; Δ' $\Delta''\cdots$, il significato della relazione

$$\lambda_1\Gamma' + \lambda_2\Gamma'' + \cdots \equiv \mu_1\Delta' + \mu_2\Delta'' + \cdots, \quad (16)$$

ove le λ, μ sono interi positivi o negativi, risulta senz'altro se son possibili le eventuali sottrazioni indicate nei due membri della relazione medesima.

(29) Per la definizione di questi caratteri cfr. CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*. Annali di Matematica, (3) *6* (1901), n° 1.

(30) Cfr. MARONI e DE-FRANCHIS, *loc. cit.*

(31) Cfr. DE-FRANCHIS, *loc. cit.*, n° 8.

In ogni caso le possiamo dare un senso preciso, dicendo che equivale alla relazione che da essa si ottiene trasportando da un membro all'altro i termini negativi e cambiandoli di segno.

Anche questa definizione, come l'analoga del n° 3, si può presentare sotto altra forma, ma ci dispensiamo dal farlo.

Per esprimere la (16) concisamente e in modo suggestivo, diremo spesso che *le due curve (virtuali)*

$$\lambda_1 \Gamma' + \lambda_2 \Gamma'' + \cdots \quad \text{e} \quad \mu_1 \Delta' + \mu_2 \Delta'' + \cdots$$

sono equivalenti, od anche che esse *appartengono ad uno stesso sistema lineare*, per quanto se le λ , μ non son tutte positive, non sempre esistano curve effettive corrispondenti ai simboli suddetti.

Ritornando alla nostra superficie F con due fasci unisecantisi, diciamo T una sua curva. Per i β punti ove T è tagliata da una K_x passano altrettante K_y, e al variare delle K_x considerate si ha nel fascio $|K_y|$ una ∞^1 algebrica di gruppi di β curve: uno generico fra questi gruppi s'indicherà con T_y, ponendo l'indice y a piè della lettera con la quale si indica la curva data. Similmente T_x denoterà il gruppo delle K_x che passano per gli α punti ove T è segata da una K_y generica.

14. *Curve a valenza zero. – Loro composizione per somma dalle curve dei due fasci unisecantisi. – Caso delle rigate.* – Suppongasi di avere fra i punti delle due curve C , C' da cui prende origine la superficie F, di cui ai numeri precedenti, una corrispondenza T tale che mentre un punto x si muove su C, il gruppo dei β punti y che ad esso corrispondono su C', varii in una serie lineare d'ordine β. Si dimostra allora, come si fece al n° 6 pel caso di due curve C , C' coincidenti, che gli α punti x di C omologhi di un punto y variabile su C', variano in una serie lineare d'ordine α. Estendendo la denominazione già usata per le corrispondenze sopra una curva, diremo in tal caso che la T è una *corrispondenza a valenza zero.*

Chiameremo poi CURVE A VALENZA ZERO *quelle curve di F che sono immagini di corrispondenze a valenza zero.* Una curva T a valenza zero è caratterizzata dal fatto che il gruppo delle β curve K_y passanti pei punti comuni ad essa e ad una K_x, mutando questa, varia in una serie lineare d'ordine β, entro al fascio $|K_y|$; e quindi che il gruppo delle α curve K_x che passano pei punti in cui T è segata da una K_y, al variare di questa, varia in una serie lineare d'ordine α, entro al fascio $|K_x|$.

Più brevemente si può dire che una curva a valenza zero è caratterizzata dal fatto di segare sopra *ogni curva* del fascio $|K_x|$ (o $|K_y|$), un gruppo che equivale a quello segato da un conveniente insieme di curve K_y (o K_x).

Questa proprietà si potrebbe dunque assumere come definizione delle curve a valenza zero, ove si volessero definire direttamente sulla superficie F.

Le curve che appartengono ad un sistema lineare somma di una serie lineare del fascio $|K_x|$ con una serie lineare di $|K_y|$, godono appunto di questa proprietà.

Ma è importante dimostrare che, viceversa, ogni curva a valenza zero è contenuta totalmente in un sistema lineare somma di curve dei due fasci.

A tal uopo supponiamo che la superficie F appartenga allo spazio ordinario, ipotesi che, nella questione attuale, non è restrittiva. – Il sistema lineare individuato dalla curva T_y, composta mediante le K_y che passano pei punti comuni ad una K_x e ad una curva T a valenza zero, sarà segato su F, fuori di certe curve fisse Q, da un sistema lineare di superficie $\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$, ove $y_1, \cdots, y_4$ son coordinate omogenee di punto; e in particolare le ∞^1 curve T_y, che si ottengono facendo variare la K_x scelta, saranno segate da un sistema algebrico ∞^1 di superficie φ. Poiché per ogni punto di F passa una K_x e questa individua una curva composta T_y, i coefficienti delle y nell'equazione $\varphi(y_1, \cdots, y_4) = 0$, saranno funzioni razionali del punto variabile su F, sicché l'equazione di una φ del sistema ∞^1 si potrà scrivere sotto la forma:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

ove Φ è il simbolo di un polinomio omogeneo di grado m nelle x, omogeneo di grado m' nelle y.

Dato un punto $(y_1^0, \cdots, y_4^0)$ della F per esso passa una K_y la quale sega T in α punti, e il gruppo T_x delle K_x passanti per questi α punti, sarà segato su F, fuori di certe curve R, dalla superficie:

$$\Psi^0 \equiv \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0) = 0.$$

La superficie:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

di ordine $m + m'$, passa per le curve Q ed R, e quindi appartiene al sistema lineare somma di quelli a cui appartengono le φ e le ψ. Ne segue che essa, fuori delle eventuali curve fisse, sega su F una curva L appartenente al sistema lineare somma di quelli segati (fuori delle curve fisse) dalle φ e dalle ψ, ossia una curva del sistema $|T_x + T_y|$. Poiché per un punto di T passano due curve omologhe nella corrispondenza che l'equazione $\Phi(x \mid y) = 0$ pone fra i due fasci $|K_x|$, $|K_y|$, ne viene che T fa parte della curva L.

Se per un punto fuori di T passassero una K_x e una K_y omologhe nella corrispondenza stessa, siccome esse già s'incontrerebbero in T, esisterebbe una curva che farebbe parte di K_x e di K_y.

Ma se, come abbiamo supposto, la superficie F rappresenta *senza eccezione* le coppie dei punti di due curve C, C', non esistono curve dei due fasci unisecantisi aventi parti comuni e perciò in tal caso $L = T$.

Dunque:

Sulla superficie F coi due fasci unisecantisi $|K_x|$, $|K_y|$, ogni curva T a valenza zero appartiene al sistema lineare individuato dalle curve K_y che passano pei punti comuni a T e ad una K_x, aumentate delle K_x che passano pei punti ove una K_y incontra T.

Se uno dei due fasci, per esempio $|K_y|$, è razionale, la superficie F è riferibile birazionalmente ad una rigata, di genere uguale al genere p_1 dell'altro

fascio $|K_x|$. Le curve di quest'ultimo fascio si chiameranno *generatrici*, e la F si dirà *rigata*, anche se non lo è nel senso projettivo della parola.

In questo caso è utile vedere quali modificazioni subisca il teorema precedente se la F non rappresenta senza eccezione le coppie di punti delle due curve C, C' (delle quali la seconda è razionale), perché quando si dà una rigata e si cerca di costruire su essa un fascio di unisecanti le generatrici, questo (essendo razionale) viene generalmente ad avere dei punti base.

Supponiamo dunque che il fascio $|K_y|$ abbia n punti base: allora le generatrici passanti per questi si staccheranno da certe n curve del fascio $|K_y|$, e quindi la curva L, di cui prima parlavamo, non conterrà soltanto la T, ma anche ciascuna delle suddette generatrici. Ognuna di queste si dovrà inoltre contare β volte come parte della L, perché taglia in β punti la curva T.

È facile vedere che nel caso che stiamo trattando, il teorema dimostrato ci dà il modo di ottenere tutte le curve della superficie F. Basterà perciò provare che le curve tracciate sopra una rigata sono a valenza zero. Difatti le K_y che passano pei β punti comuni alla curva T e ad una generatrice, mutando questa variano in una serie lineare, perché in un ente razionale ∞^1 tutti i possibili gruppi di β elementi formano una serie lineare.

Potremo dunque enunciare la proposizione seguente:

Sopra una rigata F tutte le curve si ottengono colle operazioni di somma e sottrazione a partire dalle generatrici e da un fascio di unisecanti.

Precisamente: Dato su F un fascio $|K_y|$ di unisecanti le generatrici, e una curva T, se dal sistema lineare individuato dalle unisecanti che escono dai β punti ove T è tagliata da una generatrice, aumentate delle generatrici che escono dagli α punti ove T è tagliata da una K_y, si tolgono le generatrici che passano per gli eventuali punti base di $|K_y|$, ciascuna contata β volte, si ha un sistema lineare che contiene (totalmente) T.

Dal teorema dimostrato discendono subito la formola che dà il numero dei punti comuni a due curve T, T' sopra la rigata, e la formola (di Segre) che dà il genere di una curva tracciata sulla rigata stessa.

Ci tratterremo un momento sulla deduzione di queste formole, affine di avere un primo esempio semplice, delle considerazioni analoghe, che saranno svolte in seguito, per la superficie F con due fasci irrazionali.

Sieno $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ gli indici di T, T'. Indicando con N il gruppo delle generatrici passanti per gli n punti base di $|K_y|$, avremo:

$$T + \beta N \equiv T_x + T_y . \tag{17}$$

Segando con T' le curve che figurano nei due membri della (17) e indicando con i il numero dei punti comuni a T e T' verrà:

$$i + n\beta\beta' = \alpha\beta' + \beta\alpha',$$

ossia:

$$i = \alpha\beta' + \beta\alpha' - n\beta\beta',$$

che è la formola nota pel numero dei punti comuni a due curve tracciate sopra una rigata d'ordine n.

Il genere ϱ della T si desume subito dalla (17) uguagliando i generi delle due curve composte che compaiono nei due membri; si ottiene così:

$$\varrho + (1 - n\beta) + n\beta^2 - 1 = (1 - \alpha) + \left[\beta p_1 + \binom{\beta}{2} n - \beta + 1\right] + \alpha\beta - 1,$$

donde si trae:

$$\varrho = \beta(p_1 - 1) + \alpha(\beta - 1) - n\binom{\beta}{2} + 1,$$

che è la formola di Segre.

Applicando la formola che dà il grado di una curva spezzata, ovvero segando con T i due membri della (17), si ottiene l'espressione del grado ν di T:

$$\nu = 2\alpha\beta - n\beta^2.$$

15. *Concetto di dipendenza fra due o più curve tracciate sulla superficie F con due fasci unisecantisi.* – Sieno $\Gamma'\Gamma''\cdots\Gamma^k$ k curve tracciate sulla superficie F coi due fasci unisecantisi $|K_x|$ e $|K_y|$. Si dirà che esse sono *dipendenti* o che una di esse *dipende* dalle rimanenti, quando esistono dei numeri interi non tutti nulli $\lambda_1\cdots\lambda_k$, tali che:

$$\lambda_1\Gamma' + \cdots + \lambda_k\Gamma^k \equiv \lambda_1(\Gamma'_x + \Gamma'_y) + \cdots + \lambda_k(\Gamma^k_x + \Gamma^k_y). \tag{18}$$

Le curve stesse si diranno *indipendenti* nel caso contrario.

Ricordiamo che Γ^i_x denota il gruppo delle K_x che passano pei punti ove Γ^i è segata da una K_y, e che Γ^i_y denota il gruppo delle K_y passanti pei punti ove Γ^i è segata da una K_x.

Si può brevemente dire *che le curve $\Gamma', \cdots, \Gamma^k$ sono dipendenti, se esistono degli interi non tutti nulli $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, tali che la curva (virtuale) $\lambda_1\Gamma' + \cdots + \lambda_k\Gamma^k$ sia a valenza zero.* Questa locuzione ha un senso puramente convenzionale, quando non esiste una curva corrispondente al simbolo $\lambda_1\Gamma' + \cdots + \lambda_k\Gamma^k$. In tal caso però si potrà scegliere una curva L a valenza zero (appartenente ad un sistema lineare abbastanza ampio) in guisa che esista una curva corrispondente al simbolo $L + \lambda_1\Gamma' + \cdots + \lambda_k\Gamma^k$: la (18) dice allora che anche questa curva è a valenza zero.

Dalla (18) si trae:

$$\lambda_1\Gamma' + \cdots + \lambda_k\Gamma^k - \lambda_1\Gamma'_x - \cdots - \lambda_k\Gamma^k_x \equiv \lambda_1\Gamma'_y + \cdots + \lambda_k\Gamma^k_y,$$

sicché dicendo $\overline{\Gamma}^i_y$ il gruppo delle K_y che passano pei punti ove la curva $\overline{K}_x$ sega Γ^i, avremo:

$$\lambda_1\Gamma'_y + \cdots + \lambda_k\Gamma^k_y \equiv \lambda_1\overline{\Gamma}'_y + \cdots + \lambda_k\overline{\Gamma}^k_y. \tag{19}$$

Viceversa se questa relazione è soddisfatta qualunque sieno le due curve K_x e $\overline{K}_x$ con cui si son segate le Γ^i, sarà vera anche la (18). Difatti quando le λ son tutte positive, la (19) ci dice che la curva $\lambda_1\Gamma' + \cdots + \lambda_k\Gamma^k$ è a valenza zero, e quindi pel teorema dimostrato al n° precedente, sussisterà la (18).

Ma supponiamo, ad esempio che λ_1 sia negativa ($= -\lambda_1'$) e le altre λ positive. Allora si potrà determinare un sistema lineare di curve a valenza zero così ampio, che vi siano in esso curve spezzate nella $\lambda_1' \Gamma''$ e in una parte residua Γ. Poiché la curva $\Gamma + \lambda_1' \Gamma''$ è a valenza zero, avremo:

$$\Gamma_y + \lambda_1' \Gamma_y'' \equiv \overline{\Gamma}_y + \lambda_1' \overline{\Gamma}_y'',$$

la quale addizionata alle (19) dà:

$$\Gamma_y + \lambda_2 \Gamma_y'' + \cdots \equiv \overline{\Gamma}_y + \lambda_2 \overline{\Gamma}_y'' + \cdots,$$

e da questa, essendo tutte le λ positive, si trae:

$$\Gamma + \lambda_2 \Gamma'' + \cdots \equiv (\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_2 (\Gamma_x'' + \Gamma_y'') + \cdots,$$

che combinata colla relazione:

$$\Gamma + \lambda_1' \Gamma'' \equiv (\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_1' (\Gamma_x'' + \Gamma_y''),$$

la quale esprime appunto che $\Gamma + \lambda_1' \Gamma''$ è a valenza zero, porge:

$$\lambda_1 \Gamma'' + \lambda_2 \Gamma'' + \cdots \equiv \lambda_1 (\Gamma_x'' + \Gamma_y'') + \lambda_2 (\Gamma_x'' + \Gamma_y'') + \cdots.$$

16. *Esistenza di un massimo pel numero delle curve indipendenti sopra la superficie con due fasci unisecantisi. – Base del sistema di tutte le curve su essa tracciate.* – Il teorema dimostrato al n° 14 per le rigate, ci dava il modo di ottenere per somma e sottrazione tutte le curve tracciate sopra una rigata, a partire dai fasci $|K_x|$ e $|K_y|$.

In questo n° ci occuperemo del teorema analogo per le superficie F con due fasci irrazionali. Usando delle locuzioni introdotte al n° precedente, questo teorema si può enunciare brevemente così:

Sopra la superficie F con due fasci unisecantisi $|K_x|$ e $|K_y|$, di generi p_1, p_2, è possibile trovare un numero, non superiore a $2 p_1 p_2$, di curve indipendenti, tali che ogni altra curva di F sia dipendente da quelle.

Fissiamo infatti sulla F una curva K di indici μ, ν, diversa dalle curve dei due fasci, ed indichiamo con I, J le due involuzioni di generi p_1, p_2, che i due fasci segano su K. Diremo che una corrispondenza S fra i punti di K è *composta* con una di queste involuzioni, per esempio con J, quando i punti y omologhi del punto a nella S, si distribuiscono in tanti gruppi dell'involuzione J.

Data su F una curva T di indici α, β, essa determina una corrispondenza fra le curve dei due fasci, allorché si riguardino come omologhe due curve K_x, K_y che s'incontrano in un punto di T.

Mediante questa corrispondenza ne possiamo porre una, S, fra i punti di K, nel modo seguente:

Dato un punto a di K, si chiamino suoi omologhi i $\beta\mu$ punti y segnati su K dalle K_y che passano per le intersezioni di T con la K_x uscente da a. La corrispondenza S è composta con J e la sua inversa S^{-1} è composta con I.

Indicheremo con G l'insieme di tutte quelle corrispondenze esistenti su K, che son composte con J ed hanno le inverse composte con I.

Ogni curva di F dà luogo su K, nel modo visto, ad una corrispondenza dell'insieme G, e viceversa una tal corrispondenza dà origine ad uno fra i gruppi delle involuzioni I, J, ossia fra le curve dei due fasci irrazionali. Le $K_x K_y$ omologhe in quest'ultima corrispondenza, s'intersecano nei punti di una curva T di F.

Dal momento che (come fu dimostrato al n° 11) il numero delle corrispondenze indipendenti sopra una curva ammette un massimo, nell'insieme G non ne esisterà più di un certo numero di indipendenti, sicché si potranno fissare in esso t corrispondenze $S_1 \cdots S_t$ indipendenti, tali che ogni altra corrispondenza di G sia dipendente da quelle. Notiamo però, a scanso d'equivoci, che viceversa non è detto che ogni corrispondenza dipendente da $S_1 \cdots S_t$ appartenga a G; così la somma di una corrispondenza di G con una corrispondenza a valenza zero non appartenente a G, dipende da $S_1 \ldots S_t$ e non appartiene a G.

Proviamo ora che corrispondenze dell'insieme G, fra loro dipendenti, dànno luogo su F a curve dipendenti.

Sieno, per esempio, R_1, R_2 due corrispondenze di G dipendenti secondo (λ_1, λ_2). Ciò significa che dicendo Y_1, Y_2 i gruppi degli omologhi del punto a nelle R_1, R_2 e $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$ i gruppi degli omologhi di un altro punto a, si ha:

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \equiv \lambda_1 \overline{Y}_1 + \lambda_2 \overline{Y}_2 .$$

Indichiamo con T', T'' le curve di F che si costruiscono mediante le due corrispondenze R_1, R_2. Poiché ai gruppi di una serie lineare composta con J, rispondono nel fascio $| K_y |$ gruppi di curve appartenenti ad una medesima serie lineare, avremo:

$$\lambda_1 T'_y + \lambda_2 T''_y \equiv \lambda_1 \overline{T}'_y + \lambda_2 \overline{T}''_y ,$$

ove T'_y rappresenta il gruppo delle K_y che passano pei punti comuni a T' ed alla K_x uscente da a, $\overline{T}'_y$ il gruppo delle K_y che passano pei punti ove T' taglia la K_x uscente da a, e $T''_y T''_y$ hanno significati analoghi rispetto a T''. Dalla relazione precedente, in virtù di quanto stabilimmo al n° 15, si trae:

$$\lambda_1 T' + \lambda_2 T'' \equiv \lambda_1 (T'_x + T'_y) + \lambda_2 (T''_x + T''_y) ,$$

la quale prova la dipendenza di T', T'' secondo (λ_1, λ_2).

Viceversa è facile vedere che due curve T', T'' dipendenti secondo (λ_1, λ_2), dànno luogo a due corrispondenze $R_1 R_2$ dell'insieme G, dipendenti secondo gli stessi numeri.

Ciò posto, diciamo $\Gamma', \Gamma'', \cdots, \Gamma^t$ le curve di F che si costruiscono col sussidio delle corrispondenze $S_1, \cdots, S_t$ dell'insieme G. Siccome ogni curva Γ di F dà luogo su K ad una corrispondenza S che appartiene all'insieme G e che dipende quindi da $S_1, \cdots, S_t$, la curva Γ sarà dipendente da $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$. Dunque tutte le curve di F sono dipendenti dalle $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$, e perciò l'insieme

$(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ si dice una *base* del sistema delle curve tracciate su F. Se le corrispondenze $S_1, \cdots, S_t$ furono scelte in guisa che dicendo S una corrispondenza qualsiasi dell'insieme G, le $S, S_1, \cdots, S_t$ siano dipendenti secondo i numeri $(1, \lambda_1 \cdots, \lambda_t)$, ove le λ siano interi convenienti, la *base* $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ si dirà *minima*. Notiamo adesso che il teorema enunciato al principio di questo numero, concernente la totalità delle curve appartenenti ad F, dice in sostanza che *ogni curva di F si può ottenere con operazioni di somma e sottrazione dalle curve dei due fasci unisecantisi e da quelle di una base minima.*

Ritornando alle due curve C, C' dalle quali è nata la superficie F, il risultato ottenuto ci dice che nella totalità delle corrispondenze fra C, C', se ne può trovare un numero finito $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$, per modo che indicando con Y_i, Y_i' i gruppi dei punti di C' omologhi dei punti x, x', di C, nella corrispondenza Γ^i, e con Y, Y' i gruppi dei punti di C' omologhi di x, x' in un'altra corrispondenza qualsiasi Γ fra C, C', abbia luogo la relazione:

$$\lambda Y + \lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_t Y_t \equiv \lambda Y' + \lambda_1 Y_1' + \cdots + \lambda_t Y_t' .$$

La proposizione stabilita al n° 11 nel caso di due curve coincidenti, resta così estesa al caso di due curve distinte. Questa estensione si sarebbe potuta ottenere anche mediante la rappresentazione delle corrispondenze fra due curve cogli integrali abeliani ad esse relativi. Le formole analoghe a quelle date da Hurwitz per rappresentare le corrispondenze sopra una curva, si otterrebbero anche nel caso di due curve distinte C, C', partendosi dal fatto che quando fra C, C' si ha una corrispondenza algebrica, la somma dei valori di un integrale abeliano (di 1ª specie) annesso a C' nei punti y corrispondenti ad un punto x di C, riguardata come funzione di x, è un integrale abeliano di 1ª specie annesso a C.

Anzi mediante la rappresentazione trascendente si sarebbe di più ottenuto che il numero delle corrispondenze indipendenti fra due curve distinte di generi p_1, p_2, non può superare $2 p_1 p_2$. Ma su ciò crediamo inutile d'insistere, trattandosi di cosa che si stabilisce con una leggera modificazione del procedimento usato da Hurwitz, per stabilire il fatto analogo sopra una sola curva.

17. *Discriminante di una base. – Discriminante di una base minima.* – Consideriamo le curve $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ di indici $\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_t, \beta_t$ e rappresentiamo con γ_{ih} il numero dei punti comuni alle due curve Γ^i, Γ^h, dimodoché γ_{ii} rappresenterà il grado virtuale della Γ^i.

Il determinante simmetrico:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2t} \\ \cdots & \cdots \\ c_{t1} & c_{t2} \cdots c_{tt} \end{vmatrix} ,$$

ove si è posto:

$$c_{ih} = \alpha_i \beta_h + \alpha_h \beta_i - \gamma_{ih} \qquad (i, h = 1, \cdots t),$$

si chiamerà il *discriminante dell'aggruppamento* $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$.

È facile provare che *se le curve* $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ *sono dipendenti, il discriminante* Δ *si annulla.*

Difatti dalla relazione di dipendenza delle $\Gamma' \Gamma'' \cdots$:

$$\lambda_1 \Gamma' + \cdots + \lambda_t \Gamma^t \equiv \lambda (\Gamma'_x + \Gamma'_y) + \cdots,$$

segando colla Γ^i tutte le curve che figurano nei due membri della relazione stessa, si ricava:

$$\lambda_1 \gamma_{1i} + \lambda_2 \gamma_{2i} + \cdots + \lambda_t \gamma_{ti} = \lambda_1 (\alpha_1 \beta_i + \alpha_i \beta_1) + \cdots$$

ossia:

$$\lambda_1 c_{1i} + \lambda_2 c_{2i} + \cdots + \lambda_t c_{ti} = 0 \qquad (i = 1 \cdots t).$$

Giacché queste equazioni lineari son soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, sarà zero il determinante dei coefficienti, che è precisamente Δ.

La proposizione dimostrata ci dice che se t è il massimo numero di curve indipendenti che si posson tracciare su F, ogni aggruppamento di t curve che abbia il discriminante diverso da zero, potrà assumersi come base della totalità delle curve appartenenti ad F.

Nell'ipotesi che l'aggruppamento $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ sia una base, vediamo come si passa dal suo discriminante al discriminante Δ' di un'altra base, le cui curve $\Pi', \cdots, \Pi^t$ abbiano gli indici $\alpha'_1, \beta'_1, \cdots, \alpha'_t, \beta'_t$. Le $\Pi', \cdots, \Pi^t$ saranno dipendenti dalle curve $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$, e quindi avremo:

$$(20) \qquad \lambda_i \Pi^i = \lambda_i (\Pi^i_x + \Pi^i_y) + \lambda_{1i} (\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y) + \lambda_{2i} (\Gamma'' - \Gamma''_x - \Gamma''_y) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots t)$$

ove le $\lambda_i, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \cdots$ sono interi convenienti e nessuna delle λ_i è nulla, perché altrimenti le $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ sarebbero dipendenti. Segando con Γ^l le curve che compariscono nei due membri della (20), otterremo:

$$\lambda_i \gamma'_{il} = \lambda_i (\alpha'_i \beta_l + \beta'_i \alpha_l) + \lambda_{1i} (\gamma_{1l} - \alpha_1 \beta_l - \beta_1 \alpha_l) + \cdots$$

ove γ'_{il} rappresenta il numero dei punti comuni a Π^i e Γ^l. Se si pone:

$$\alpha'_i \beta_l + \beta'_i \alpha_l - \gamma'_{il} = c'_{il},$$

verrà

$$(21) \qquad \lambda_i c'_{il} = \lambda_{1i} c_{1l} + \lambda_{2i} c_{2l} + \cdots + \lambda_{ti} c_{tl} \qquad (i, l = 1 \cdots t).$$

Segando con Π^l i due membri della (20), avremo:

$$\lambda_i \overline{\gamma}'_{il} = \lambda_i (\alpha'_i \beta'_l + \beta'_i \alpha'_l) + \lambda_{1i} (\gamma'_{1l} - \alpha_1 \beta'_l - \beta_1 \alpha'_l) + \cdots \qquad (i, l = 1 \cdots t),$$

ove $\overline{\gamma}'_{il}$ rappresenta il numero dei punti comuni a Π^i e Π^l.

Se poniamo:

$$\alpha'_i \beta'_l + \beta'_i \alpha'_l - \overline{\gamma}'_{il} = \overline{c}'_{il},$$

otterremo:

$$\lambda_i \bar{c}'_{il} = \lambda_{1i}\, c'_{l1} + \lambda_{2i}\, c'_{l2} + \cdots + \lambda_{ti}\, c'_{lt} , \tag{22}$$

ed il discriminante della nuova base sarà espresso da:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \bar{c}'_{11} \bar{c}'_{12} \cdots \bar{c}'_{1t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{c}'_{t1} \bar{c}'_{t2} \cdots \bar{c}'_{tt} \end{vmatrix} .$$

Profittando delle (21), (22), e della regola di moltiplicazione dei determinanti, si trova fra Δ e Δ' la relazione seguente:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_t)^2 \Delta' = \Delta^2 \Delta, \tag{23}$$

nella quale si è posto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} \lambda_{12} \cdots \lambda_{1t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{t1} \lambda_{t2} \cdots \lambda_{tt} \end{vmatrix} .$$

Poiché le $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ non son nulle, la relazione ottenuta ci mostra che se fosse $\Delta = 0$ sarebbe pure $\Delta' = 0$, ossia se fosse nullo il discriminante di una base, sarebbe nullo il discriminante di ogni altra base.

Se dunque sopra una superficie F esistesse una base col discriminante nullo, questa sarebbe una proprietà intrinseca della superficie stessa. Ma per quanto io non abbia potuto stabilire in generale il fatto che la condizione $\Delta \neq 0$ è *necessaria* perché le curve $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ formino una base, tuttavia credo che non esistano superficie F dotate della proprietà accennata. Ad ogni modo questa è una questione che per ora lascio insoluta.

Facciamo ora l'ipotesi, eventualmente limitativa, che *il discriminante Δ della base $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ sia diverso da zero.* Vogliamo vedere *come si deve operare (per somma e sottrazione) sulla base data, affine di passare ad una base minima.* Data una curva Γ di F, essa si esprime mediante la base data nel modo seguente:

$$\lambda\Gamma \equiv \lambda (\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_1 (\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y) + \cdots \tag{24}$$

ove λ è un intero diverso da zero. Osserviamo anzitutto che se gli interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ son divisibili per λ, ossia se:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 \lambda , \cdots, \lambda_t = \bar{\lambda}_t \lambda ,$$

la precedente relazione si può sostituire con l'altra:

$$\Gamma = (\Gamma_x + \Gamma_y) + \bar{\lambda}_1 (\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y) + \cdots .$$

Difatti nell'ipotesi fatta, $\Gamma, \Gamma', \cdots, \Gamma^t$ dànno luogo sulla curva K di F, della quale parlavamo al n° precedente, a $t + 1$ corrispondenze dell'insieme G, dipendenti secondo i numeri $(-\lambda , \bar{\lambda}_1 \lambda , \cdots, \bar{\lambda}_t \lambda)$ e quindi dipendenti secondo

$(-1, \overline{\lambda}_1, \cdots, \overline{\lambda}_t)$ (ved. l'Osservazione con cui si chiude la Parte I[a]). Ne deriva che le curve $\Gamma, \Gamma', \cdots, \Gamma^t$ son esse pure dipendenti secondo $(-1, \overline{\lambda}_1, \cdots, \overline{\lambda}_t)$ (n° 16).

Dunque se la base considerata $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ non è minima, esisterà certo una Γ alla quale compete un coefficiente $\lambda > 1$ e primo con una almeno delle $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$: per esempio con λ_1. Si potranno trovare allora due interi μ, μ_1 tali che:

$$\lambda\mu + \lambda_1 \mu_1 = 1. \tag{25}$$

Supponiamo prima μ e μ_1 positivi e consideriamo la curva $\overline{\Gamma}' \equiv \mu_1 \Gamma + \mu\Gamma'$. Vediamo com'essa si esprime colla base data. Si ha evidentemente:

$$\lambda\overline{\Gamma}' \equiv \mu_1 \lambda\Gamma + \mu\lambda\Gamma',$$

dalla quale, mediante la (24) e la relazione identica:

$$\Gamma' \equiv (\Gamma'_x + \Gamma'_y) + (\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y),$$

si trae:

$$\lambda\overline{\Gamma}' \equiv \lambda\mu_1 (\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_1 \mu_1 (\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y) +$$
$$\lambda_2 \mu_1 (\Gamma'' - \Gamma''_x - \Gamma''_y) + \cdots + \lambda\mu (\Gamma'_x + \Gamma'_y) + \lambda\mu (\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y),$$

ossia, ricordando la (25):

$$\lambda\overline{\Gamma}' \equiv \lambda[\mu_1 (\Gamma_x + \Gamma_y) + \mu (\Gamma'_x + \Gamma'_y)] + \tag{26}$$
$$(\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y) + \lambda_2 \mu_1 (\Gamma'' - \Gamma''_x - \Gamma''_y) + \cdots.$$

Le curve $\Gamma'', \cdots, \Gamma^t$ si esprimono mediante la base data colle relazioni identiche:

$$\Gamma'' \equiv (\Gamma''_x + \Gamma''_y) + (\Gamma'' - \Gamma''_x - \Gamma''_y)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma^t \equiv (\Gamma^t_x + \Gamma^t_y) + (\Gamma^t - \Gamma^t_x - \Gamma^t_y),$$

sicché indicando con Δ' il discriminante dell'insieme $(\overline{\Gamma}', \Gamma'', \cdots, \Gamma^t)$, grazie alla formola (23), avremo:

$$\lambda^2 \Delta' = \Delta, \tag{27}$$

perché attualmente il determinante Λ è espresso da:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 \mu_1 & \lambda_3 \mu_1 \cdots \lambda_t \mu_1 \\ 0 & 1 & 0 \quad \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \quad \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \quad \cdots 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Finora abbiamo considerato il caso che i numeri μ, μ_1, sieno positivi; se uno o entrambi son negativi si definirà la $\overline{\Gamma}'$ mediante la relazione:

$$\overline{\Gamma}' \equiv \mu_1 \Gamma + \mu\Gamma' + L ,$$

ove L è una curva a valenza zero appartenente ad un sistema lineare così ampio, che esistano curve corrispondenti al simbolo $\mu_1 \Gamma + \mu\Gamma' + L$. La (26) sarà sostituita dalla:

$$(26') \qquad \lambda\overline{\Gamma}' \equiv \lambda\,[\mu_1 (\Gamma_x + \Gamma_y) + \mu (\Gamma'_x + \Gamma'_y) + (L_x + L_y)] +$$
$$(\Gamma' - \Gamma'_x - \Gamma'_y) + \lambda_2 \mu_1 (\Gamma'' - \Gamma''_x - \Gamma''_y) + \cdots$$

ed anche in tal caso il discriminante Δ' del gruppo $(\overline{\Gamma}', \Gamma'', \cdots, \Gamma^t)$ sarà legato a Δ dalla (27).

La (27) ci dice anzitutto che $\Delta' \neq 0$ e quindi che l'insieme $(\overline{\Gamma}', \Gamma'', \cdots, \Gamma^t)$ si può prendere come base invece di $(\Gamma', \Gamma'', \cdots, \Gamma^t)$, e inoltre ci dice che λ^2 è un divisore di Δ.

Trattiamo ora la base $(\overline{\Gamma}', \Gamma'', \cdots, \Gamma^t)$ come la base iniziale; avremo un'altra base il cui discriminante Δ'' in valore assoluto è minore di Δ'. Così proseguendo si otterrà una successione di numeri interi diversi da zero:

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \cdots$$

di cui ciascuno ha valore assoluto minore del precedente. Dunque la successione avrà un ultimo termine Δ^s e la base corrispondente sarà una *base minima*.

È facile dimostrare che:

Tutte le basi minime hanno lo stesso discriminante.

Difatti se Δ, Δ' sono i discriminanti di due basi minime, in virtù della (23) avremo due relazioni del tipo:

$$\Delta' = A^2 \Delta$$
$$\Delta = A'^2 \Delta' ,$$

ove A, A' son numeri interi. Ora la prima dice che il rapporto Δ'/Δ non è inferiore ad 1, la seconda che lo stesso rapporto non è superiore ad 1, dunque verrà:

$$\Delta'/\Delta = 1 ,$$

ossia:

$$\Delta' = \Delta .$$

Il procedimento che abbiamo indicato per la riduzione alla base minima, dice di più che:

I discriminanti ($\neq 0$) *delle varie basi hanno per massimo comun divisore il discriminante di una base minima.*

18. *Teorema di Bézout sopra una superficie con due fasci unisecantisi. – Espressioni del grado e del genere di una curva tracciata sulla superficie stessa.* – Abbiamo altrove avuto occasione di chiamare *teorema di Bézout* sopra una superficie, un teorema analogo a quello che ci apprende il modo di calcolare il numero dei punti comuni a due curve piane. Per una superficie algebrica qualunque la questione si può porre così: definire un sistema di caratteri di ogni curva tracciata sulla superficie, in guisa che il numero dei punti comuni a due tali curve si esprima *soltanto* mediante i caratteri della superficie ed i caratteri definiti delle due curve [32].

Oltreché sul piano e sulle superficie razionali, il teorema di Bézout si conosce sulle rigate, come risulta dalla formola ritrovata al n° 14, sulle superficie generali nel loro ordine, come si desume dalle ricerche di Nöther [33], sulla *superficie di Kummer* e sulle superficie iperellittiche, come si rileva da un teorema di Poincaré sul numero degli zeri comuni a più funzioni Θ di dato ordine [34].

Qui ci proponiamo di dare il teorema per le superficie con due fasci unisecantisi.

Sia $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ una base del sistema di tutte le curve tracciate sulla superficie F con due fasci unisecantisi, ed in relazione alle curve di questa base conserviamo le notazioni introdotte al principio del n° precedente. Data su F una curva qualunque L di indici α, β, essa si esprime mediante la base data, con la formola:

$$(28) \qquad \lambda L + \lambda_1 \Gamma' + \cdots + \lambda_t \Gamma^t \equiv \lambda (L_x + L_y) + \lambda_1 (\Gamma'_x + \Gamma'_y) + \cdots$$

Segando con Γ^i i due membri di questa relazione, avremo:

$$\lambda \gamma_i + \lambda_1 \gamma_{1i} + \cdots + \lambda_t \gamma_{t1} = \lambda (\alpha\beta_i + \beta\alpha_i) + \lambda_1 (\alpha_1 \beta_i + \beta_1 \alpha_i) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots t),$$

ove γ_i rappresenta il numero dei punti comuni ad L e Γ^i. Se si pone:

$$c_i = \alpha\beta_i + \beta\alpha_i - \gamma_i ,$$

verrà:

$$(29) \qquad \lambda c_i + \lambda_1 c_{1i} + \lambda_2 c_{2i} + \cdots + \lambda_t c_{ti} = 0 .$$

Sia ora L' un'altra curva di indici α', β' tracciata su F, e sia γ'_i il numero dei punti in cui essa incontra Γ^i. Avremo similmente:

$$(30) \qquad \lambda' c'_i + \lambda'_1 c_{1i} + \lambda'_2 c_{2i} + \cdots + \lambda'_t c_{ti} = 0 ,$$

ove si è posto:

$$c'_i = \alpha' \beta_i + \beta' \alpha_i - \gamma'_i .$$

(32) Cfr. la mia Memoria, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, ecc., Memorie della R. Accad. di Torino, (2) *52* (1902), n° 26.

(33) Cfr. NÖTHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Berliner Abhandlung, (1882).

(34) Vedi la Memoria citata di G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, Journal de Math., (4) *9* (1893).

Seghiamo con L' i due membri della (28) e rappresentiamo con I il numero dei punti comuni ad L , L'. Verrà allora:

$$\lambda I + \lambda_1 \gamma'_1 + \cdots + \lambda_t \gamma'_t = \lambda (\alpha\beta' + \beta\alpha') + \lambda_1 (a_1 \beta' + \beta_1 \alpha') + \cdots$$

ossia:

$$\lambda I = \lambda (\alpha\beta' + \beta\alpha') + \lambda_1 c'_1 + \lambda_2 c'_2 + \cdots + \lambda_t c'_t \ . \tag{31}$$

Moltiplicando i due membri di questa per λ', eppoi profittando delle (30), otterremo:

$$\lambda\lambda' I = \lambda\lambda' (\alpha\beta' + \beta\alpha') - \sum_{i,h} c_{ih} \lambda_i \lambda'_h \ ,$$

dalla quale, giacché $\lambda\lambda' \neq 0$, si trae:

$$I = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \frac{1}{\lambda\lambda'} \sum_{i,h} c_{ih} \lambda_i \lambda'_h \ . \tag{31'}$$

In particolare se la base $(I', \cdots, I^t)$ è minima λ e λ' saranno uguali all'unità, e quindi:

$$I = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \sum_{i,h} c_{ik} \lambda_i \lambda'_h \ . \tag{31''}$$

La (31') si può porre sotto una forma diversa facendoci comparire invece delle λ , λ' i numeri c_i , c'_i, che hanno un significato geometrico più netto.

Poiché le t equazioni (29) e la (31) son soddisfatte per valori non tutti nulli delle $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_t$, che figurano in esse linearmente e omogeneamente, avremo:

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta' + \beta\alpha' - I & c'_1 & \cdots & c'_t \\ c_1 & c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ c_2 & c_{21} & \cdots & c_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_t & c_{t1} & \cdots & c_{tt} \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

ossia:

$$(\alpha\beta' + \beta\alpha' - I)\, \Delta + \begin{vmatrix} 0 & c'_1 & \cdots & c'_t \\ c_1 & c_{11} & \cdots & c_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_t & c_{t1} & \cdots & c_{tt} \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

dalla quale se $\Delta \neq 0$, si rileva:

$$I = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \frac{1}{\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c'_h \ , \tag{32}$$

ove Δ_{ih} rappresenta il subdeterminante di c_{ih} nel discriminante Δ.

Il teorema di Bézout sopra la superficie F con due fasci unisecantisi, è espresso dalla formola (31') *o dalla* (32).

Il grado (virtuale) ν della curva L sarà espresso evidentemente da una qualunque delle formole:

$$(33)\qquad \begin{cases} \nu = 2\alpha\beta - \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda_h \\ \nu = 2\alpha\beta - \frac{1}{\Delta}\sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h , \end{cases}$$

che si ottengono dalle (31'), (32) supponendo L' coincidente con L.

Il genere (virtuale) ϱ di L si può ricavare direttamente dalla (28), oppure dalla (15) sostituendoci una delle espressioni (33). Così trovasi:

$$(34)\qquad \begin{cases} \varrho = (\alpha-1)(\beta-1) + \beta p_1 + \alpha p_2 - \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda_h \\ \varrho = (\alpha-1)(\beta-1) + \beta p_1 + \alpha p_2 - \frac{1}{2\Delta}\sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h . \end{cases}$$

19. *Caso di una superficie con due fasci unisecantisi razionalmente identici.* – Fra le superficie con due fasci unisecantisi sono particolarmente notevoli quelle che posseggono due fasci razionalmente identici.

In questo numero ci occuperemo di tali superficie, applicando ad esse i risultati ottenuti nel caso generale.

Sia dunque F una superficie coi due fasci $|K_x|$, $|K_y|$ razionalmente identici di generi $p_1 = p_2 = p$: i suoi punti possono porsi in corrispondenza biunivoca colle coppie di punti di due curve coincidenti, ossia colle coppie di punti di una curva C, ove si considerino come diverse due coppie che differiscono per l'ordine. Ogni corrispondenza T fra i punti di C sarà rappresentata su F da una curva T; in particolare l'*identità* sarà rappresentata da una curva K unisecante le K_x e le K_y.

In generale la C non ammette trasformazioni birazionali in sè stessa, e quindi su F non ci son generalmente altre curve unisecanti le K_x e le K_y all'infuori della K; se però esistono trasformazioni birazionali di C in sè stessa, queste son rappresentate su F da altrettante curve come la K, ed in tal caso è evidente che si potrà porre fra i punti di F e le coppie ordinate dei punti di una curva, una corrispondenza tale che una prefissata di quelle curve unisecanti rappresenti l'identità.

Le corrispondenze a valenza γ (positiva, negativa o nulla) son rappresentate su F da *curve* che diremo *a valenza* γ. Sia T una curva a valenza γ di indici α, β.

Dicendo allora T'_y il gruppo delle K_y che passano pei punti ove la curva K'_x sega T, T''_y il gruppo delle K_y passanti pei punti ove K''_x sega T, e K'_y, K''_y le K_y che passano rispettivamente pei punti ove K è tagliata da K'_x, K'_x, avremo:

$$T'_y + \gamma K'_y \equiv T''_x + \gamma K''_y ,$$

donde, in virtù delle considerazioni svolte al n° 15, si trae:

$$(35)\qquad T + \gamma K \equiv (T_x + T_x) + \gamma (K_x + K_y) .$$

Notiamo qui incidentemente che se si considerano i gruppi segati sulla identità K dalle curve che figurano in questa relazione, *si ottiene nuovamente il teorema dimostrato al n 8° ed il principio di corrispondenza che da esso discende.*

Dalla (35) si ricava facilmente il grado ν di T in funzione di α, β, γ. Difatti se si segano con T i due membri della relazione stessa, viene:

$$\nu + \gamma u = 2\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta),$$

ove u denota il numero dei punti uniti della corrispondenza rappresentata dalla curva T. Giacché:

$$u = \alpha + \beta + 2\gamma p,$$

avremo:

$$\nu = 2(\alpha\beta - \gamma^2 p). \tag{35'}$$

In modo analogo si vede che il numero dei punti comuni a T ed alla curva T' di caratteri α', β', γ', è espresso dalla formola:

$$\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p.$$

Il genere ϱ di T si otterrà dalla formola (15), sostituendoci il valore ora trovato di ν:

$$\varrho = (\alpha - 1)(\beta - 1) + p(\alpha + \beta - \gamma^2). \tag{35''}$$

Se i due fasci unisecantisi sono a moduli generali o, ciò che è lo stesso, se la curva C è a moduli generali, su essa non vi saranno che corrispondenze a valenza [35], e quindi sulla F non si troveranno altre curve che quelle dotate di valenza. Si può dunque enunciare il teorema:

Sopra una superficie con due fasci unisecantisi $|K_x|, |K_y|$, *razionalmente identici ed a moduli generali, tutte le curve si ottengono con operazioni di somma e sottrazione a partire dai due fasci e da una curva* K *unisecante le* $K_x K_y$.

Più precisamente: data una curva T esiste un intero γ, positivo, negativo o nullo (valenza di T), tale che T appartiene totalmente al sistema lineare:

$$|T'_x + T'_y + \gamma(K'_x + K'_y) - \gamma K|,$$

ove $K'_x K'_y$ sono due qualunque curve dei due fasci, e T'_x (o T'_y) denota il gruppo delle K_x (o K_y) passanti per i punti comuni a T ed alla K'_y (o K'_x).

Se p è il genere dei due fasci, α, β gli indici di T, il grado ed il genere di questa curva sono espressi dalle formole (35'), (35'').

Se poi i due fasci non sono a moduli generali, esisterà un numero finito (non superiore a $2p^2$) di curve tali che applicando ad esse ed alle curve dei due fasci le operazioni di somma e sottrazione, si ottengono tutte le curve di F.

(35) HURWITZ, *loc. cit.*, § 2.

Osserveremo per ultimo che K dà luogo su F ad un'*involuzione quadratica* Φ', ove si chiamino omologhi due punti di F quando sono le intersezioni di due coppie di curve dei due fasci che projettano gli stessi due punti di K.

La *inversa* di una corrispondenza che sia rappresentata dalla curva T, è rappresentata dalla curva T^{-1} *coniugata* di T nella involuzione Φ', ossia dalla curva che contiene i coniugati dei punti di T.

Sicché le *corrispondenze simmetriche* son rappresentate da curve mutate in sè dalla involuzione, o come anche si dice *appartenenti all'involuzione*.

§ 2. – *Le superficie con un sistema algebrico d'indice 2 e grado 1.*

20. *Generalità. – Curve a valenza.* – Sia Φ una superficie che rappresenti *senza eccezione* le coppie non ordinate dei punti di una curva di genere p [36]. Le coppie dei punti di C delle quali fa parte un punto fissato, son rappresentate su Φ da una curva H; sicché ai punti di C vengono a corrispondere ∞^1 curve H, razionalmente identiche a C, le quali costituiscono un sistema algebrico Σ d'*indice* 2, cioè tale che per ogni punto di Φ passano due curve H, e di *grado* 1, cioè tale che due sue curve si segano in un punto. – Viceversa è chiaro che ogni superficie con un sistema algebrico d'indice 2 e grado 1, rappresenta le coppie (non ordinate) dei punti di una curva.

La superficie Φ è riferibile alla superficie F che rappresenta le coppie ordinate dei punti di C, in una corrispondenza algebrica (1 , 2), poiché ogni coppia di punti di C dà luogo a due coppie ordinate *diverse*, e in questa corrispondenza ai punti di Φ corrispondono su F le coppie dell'involuzione Φ', che consideravamo alla fine del precedente §.

Ogni corrispondenza simmetrica T fra i punti di C, è rappresentata da una curva T tracciata su Φ, e viceversa. Se sulla C è data una corrispondenza non simmetrica S, e si considerano le coppie dei punti omologhi in questa corrispondenza *prescindendo dall'ordine*, esse vengono rappresentate dai punti di una curva di Φ, la quale però deve riguardarsi come immagine della somma $S + S^{-1}$ di S con la sua inversa.

La corrispondenza identica viene rappresentata su Φ dalla curva K_1 *inviluppo del sistema* Σ, ossia dal luogo dei punti di Φ dai quali escono due H coincidenti.

Per ogni curva T di Φ ci sono da considerare: il *genere* ϱ, il *grado* ν, l'*indice* α, ossia il n° delle intersezioni di T con una H, e il numero u dei punti comuni a T e alla curva K_1 (n° dei punti uniti della corrispondenza di cui T è immagine). Questi quattro caratteri son legati dalla relazione:

$$4\alpha(p-1) + 2\nu = 4(\varrho-1) + u \text{ [37]}.$$

(36) Per le citazioni relative a questa classe di superficie, ved. l'introduzione alla presente Memoria.

(37) DE-FRANCHIS, *loc. cit.*, n° 18.

Nel seguito il gruppo delle curve di Σ, diverse da una H fissata, che escono dai punti in cui questa taglia T, si indicherà con la lettera stessa T dotata dell'indice x.

Una curva di Φ dicesi a valenza γ quando rappresenta una corrispondenza simmetrica a valenza γ.

Sia T una tal curva. Allora trasportando sulla superficie Φ la proprietà caratteristica delle corrispondenze a valenza (n° 4), e indicando con T_x (o T'_x) il gruppo delle curve di Σ uscenti dai punti in cui T vien segata da H (o da H') si può dire che i gruppi di *elementi* di Σ, $T_x+\gamma H$ e $T'_x+\gamma H'$ sono equivalenti entro all'ente algebrico $\infty^1 \Sigma$. Ma siccome una serie razionale di curve di un sistema algebrico, è contenuta totalmente in un sistema lineare [38], avremo:

$$T_x + \gamma H \equiv T'_x + \gamma H' \tag{36}$$

ove il segno $\equiv$ ha il significato che già precisammo al n° 13.

Alla curva T corrisponde sulla superficie F delle coppie ordinate (ved. al n° 19), una curva S, a valenza γ, appartenente all'involuzione Φ'. Sicché continuando ad usare le notazioni del n° 19, avremo:

$$S + \gamma K \equiv (S_x + S_y) + \gamma\,(K_x + K_y)\,.$$

Se H è la curva di Σ omologa di K_x nella corrispondenza $(2\,,\,1)$ tra F e Φ, ed H' la curva omologa di K_y, alla curva S_y (o S_x) corrisponderà la curva T_x (o T'_x) costituita dalle ulteriori curve di Σ uscenti dai punti comuni ad H (o H') e a T.

Siccome nel passaggio da F a Φ a curve equivalenti su F corrispondono su Φ curve equivalenti [39], e d'altronde alla S corrisponde la T contata due volte, perché ogni punto di T proviene da due di S, avremo sulla superficie Φ:

$$2\,T + \gamma K_1 \equiv (T_x + \gamma H) + (T'_x + \gamma H)'\,,$$

ossia, in virtù della (36):

$$2T + \gamma K_1 \equiv 2\,(T_x + \gamma H)\,. \tag{37}$$

In particolare se T è a valenza zero, dalla (36) rileviamo: $T_x \equiv T'_x$, e dalla (37): $2T \equiv 2T_x$.

La prima di queste si può anche enunciare dicendo che una curva a valenza zero sega su ogni curva di Σ un gruppo che equivale a quello segato da un conveniente insieme di curve H: viceversa è chiaro che ogni curva soddisfacente ad una tal condizione, come per esempio una curva che appartenga al sistema lineare individuato da un gruppo di curve H, è a valenza zero.

(38) Cfr. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti di Palermo, *10* (1896).

(39) Ved. la mia Nota, *sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2) *36* (1903), n° 2.

Dalla seconda relazione non si può *a priori* dedurre che T e T_x sono equivalenti, ma noi proveremo che nel caso attuale questa deduzione è lecita, dimostrando che *ogni curva a valenza zero tracciata su* Φ *appartiene ad un sistema lineare individuato da un gruppo di curve di* Σ.

A tal uopo ci occorreranno due lemmi che andiamo ad esporre:

LEMMA I. – *La dimensione del sistema lineare (completo) che contiene totalmente una serie lineare completa di dimensione r, formata con le curve di* Σ, è $\frac{r(r+3)}{2}$.

Sieno infatti $H_1, H_2, \cdots, H_n$ le curve di un gruppo della g_h^r completa che si considera entro Σ. Se $r = 0$ ogni curva del sistema

$$|D| = |H_1 + H_2 + \cdots + H_n|$$

dovrà segare su una qualunque H un gruppo identico a quello segato dalla curva composta $H_1 + \cdots + H_n$, e quindi il sistema $|D|$ si ridurrà a questa sola curva.

Supponiamo ora che il gruppo $H_1, \cdots, H_{n-1}$ individui entro Σ una serie completa ∞^0, ma che il gruppo $H_1, \cdots, H_n$ individui una g^1. In quest'ipotesi calcoliamo la dimensione R del sistema $|D|$. Esso sega sopra una H di Σ una serie ∞^1, perché ogni H è riferita *prospettivamente* alle curve di Σ, e siccome facendo avvicinare indefinitamente H ad H_n, quel riferimento prospettivo permane, la dimensione della serie segata da $|D|$ su H_n non potrà differire da 1. D'altronde l'unica curva del sistema $|D|$ che contenga come parte H_n, è quella spezzata in $H_1, \cdots, H_{n-1}$, dunque:

$$R - 1 - 1 = 0, \qquad \text{ossia:} \quad R = 2.$$

Supponiamo ora che il gruppo $H_1, \cdots, H_{n-1}$ individui una g^1 e che il gruppo $H_1, \cdots, H_n$ individui una g^2. Considerando come prima la serie segata su H_n dal sistema $|D|$, si vede che essa è ∞^2. Ma i resti delle curve D passanti per H_n costituiscono il sistema lineare $|H_1 + \cdots + H_{n-1}|$, che per quanto precede è di dimensione 2, dunque indicando al solito con R la dimensione di $|D|$, avremo:

$$R - 2 - 1 = 2, \qquad \text{ossia:} \quad R = 5.$$

Così proseguendo, servendosi dell'induzione completa, si trova che la dimensione del sistema $|H_1 + \cdots + H_n|$, quando r è la dimensione della serie individuata dal gruppo $H_1, \cdots, H_n$, è espressa da $\frac{r(r+3)}{2}$ (40).

LEMMA II. – *Il sistema lineare che contiene totalmente una serie lineare non speciale di curve di* Σ, *è regolare.*

Dal fatto che ogni curva rappresentante le coppie di punti di un gruppo variabile in una g^1_{2p-2} canonica di C, è una curva canonica di F (41), segue

(40) Un ragionamento analogo si trova nella Nota citata del Dott. Maroni, pel caso di una superficie con due fasci unisecantisi.

(41) Ved. la mia Nota, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti...*, n° 5.

subito che su una H ogni curva canonica sega un gruppo *speciale* di $2p-3$ punti, e quindi che ogni sistema lineare speciale sega su H gruppi speciali. Se ne deduce che il sistema $|D| = |H_1 + \cdots + H_n|$, che contiene totalmente la g_n^r non speciale, è esso pure non speciale.

Calcoliamo ora la dimensione virtuale di questo sistema, data dal teorema di Riemann–Roch (42). Il grado ν di $|D|$ è uguale ad n^2, il genere ϱ è uguale a

$$n(p-1) + \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

come si vede ricordando che le varie parti della curva composta $H_1 + \cdots + H_n$ s'incontrano a due a due in un punto; e il genere aritmetico P_a di Φ è espresso da:

$$P_a = \frac{p(p-1)}{2} - p \quad (43).$$

Sicché:

$$\nu - \varrho + P_a + 1 = n - p + \frac{n(n-2p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2}.$$

Giacché per ipotesi la g_n^r è non speciale sarà $n = r + p$, e quindi sostituendo nella precedente uguaglianza avremo:

$$\nu - \varrho + P_a + 1 = r + \frac{(r+p)(r-p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{r(r+3)}{2}.$$

Dunque la dimensione virtuale di $|D|$ coincide con l'effettiva, e perciò $|D|$ è regolare.

E passiamo infine alla dimostrazione della equivalenza di T e T_x. Anzitutto si osservi che, come già accennammo, su una curva H' di Σ le due curve segano gruppi equivalenti. Difatti sopra H' le due curve (composte) T_x e T_x' (ove T_x' rappresenta il gruppo delle H che passano pei punti comuni ad H' e a T) segano due gruppi equivalenti: ma su H' la T e la T_x' segano lo stesso gruppo, dunque T e T_x segano su H' gruppi che si equivalgono.

Ciò posto supponiamo che la serie individuata da T_x entro Σ, sia non speciale, del che potremo esser sicuri se per esempio il numero α delle parti che compongono T_x è maggiore di $2p-2$. In tale ipotesi non solo il sistema $|T_x|$ sarà regolare, ma il sistema $|T|$ non potrà essere speciale, perché staccherà su ogni H gruppi non speciali. Dal momento che $|T|$ ha gli stessi caratteri (grado e genere) di $|T_x|$, come si rileva, per esempio, dal fatto che $2T \equiv 2T_x$, la dimensione virtuale di $|T|$ sarà uguale alla dimensione effettiva di $|T_x|$, e quindi $|T|$ avrà dimensione effettiva non inferiore a quella di $|T_x|$.

(42) Cfr. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) 25 (1897), n° 34 e sgg.

(43) Cfr. la mia Nota *Sulle superficie...*, n° 6.

Ora si osservi che $|T_x|$ sega su una H generica una serie *completa* (non speciale), e che $|T|$ sega sulla stessa H gruppi di questa serie. Ne viene che il sistema residuo di H rispetto a $|T|$ avrà certo dimensione non inferiore a quella del sistema residuo di H rispetto a $|T_x|$.

La serie individuata entro Σ da una $T_x - H$, sarà non speciale, perché staccando un elemento generico da una serie non speciale entro un ente ∞^1, si ha una serie non speciale. Siccome inoltre i due sistemi residui segano su ogni H gruppi equivalenti, essi si troveranno nelle identiche condizioni dei sistemi primitivi. Ne viene che se da $|T_x - H|$ si può ancora sottrarre una H, si potrà togliere anche da $|T - H|$, e i sistemi residui si troveranno nelle stesse condizioni dei sistemi $|T|$ e $|T_x|$; e così proseguendo.

Dopo un numero finito di sottrazioni si arriverà ad un sistema $|T_x - sH|$ dal quale non è più possibile togliere altre curve di Σ. Perché ciò accada bisogna evidentemente che il sistema *completo* $|T_x - sH|$ si riduca ad una sola curva composta con curve di Σ.

Siccome ogni curva $T - sH$ deve segare sopra una H qualsiasi un gruppo equivalente a quello segato da $T_x - sH$, e d'altronde questo gruppo individua una g^0 completa, la $T_x - sH$ ed una $T - sH$, taglieranno ogni H nello stesso gruppo di punti. Dal che si deduce che $|T - sH|$ riducesi alla curva $T_x - sH$, e quindi che $T \equiv T_x$.

Ci resta da considerare l'ipotesi che la serie individuata da T_x sia speciale. In tal caso aggiungeremo a questa serie una seconda serie individuata da una curva S_x composta con α' curve H, in guisa che $\alpha + \alpha'$ sia maggiore di $2p - 2$. La curva generica S del sistema $|S_x|$ sarà a valenza zero, e quindi la curva $S + T$ sarà pure a valenza zero. Poiché la serie individuata da $S_x + T_x$ è non speciale, avremo:

$$S + T \equiv S_x + T_x ,$$

dalla quale, tenendo conto che $S \equiv S_x$, si trae ancora:

$$T \equiv T_x \qquad \text{c.d.d.}$$

21. *Dipendenza fra curve tracciate sulla superficie* Φ. – Sieno $\Gamma', \Gamma'', \cdots, \Gamma^k$ curve tracciate su Φ. Diremo che esse sono *dipendenti* o che una di esse *dipende* dalle rimanenti, quando si posson determinare dei numeri interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_1 \Gamma' + \cdots + \lambda_k \Gamma^k \equiv \lambda_1 \Gamma'_x + \cdots + \lambda_k \Gamma^k_x , \tag{38}$$

ove Γ^i_x rappresenta il gruppo delle curve del sistema Σ che passano pei punti comuni a Γ^i e ad una H fissata. Se $\overline{\Gamma}^i_x$ denota il gruppo delle H passanti pei punti comuni a Γ^i e alla curva $\overline{H}$, dalla (38) si rileva:

$$\lambda_1 \Gamma'_x + \cdots + \lambda_k \Gamma^k_x \equiv \lambda_1 \overline{\Gamma}'_x + \cdots + \lambda_k \overline{\Gamma}^k_x ,$$

la quale ci dice che le curve $\Gamma' \cdots \Gamma^k$ rappresentano k corrispondenze (simmetriche) fra i punti di C, dipendenti secondo i numeri $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ (n° 9).

Viceversa si vede facilmente, seguendo una via analoga a quella del n° 15, che più corrispondenze (simmetriche) dipendenti secondo $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$, son rappresentate su Φ da altrettante curve dipendenti secondo gli stessi numeri.

Talvolta, per brevità, la (38) si esprimerà dicendo che *la curva (virtuale)* $\lambda_1 \Gamma' + \cdots + \lambda_k \Gamma^k$ *è a valenza zero.* A proposito di questa locuzione si posson ripetere le osservazioni già fatte nel caso analogo, al n° 15.

Dimostreremo ora che:

Sopra la superficie Φ *è possibile trovare un numero finito di curve indipendenti, tali che ogni altra curva di* Φ *sia dipendente da esse.*

Indichiamo con G l'insieme di tutte le corrispondenze simmetriche esistenti sulla curva C. Dal teorema fondamentale del n° 11, segue che nell'insieme G esisteranno certe t corrispondenze indipendenti $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$, tali che ogni altra corrispondenza Γ di G sia dipendente da quelle. Poiché la dipendenza fra più corrispondenze di G, si rispecchia nella dipendenza fra le curve di Φ che rappresentano quelle corrispondenze, le curve $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ di Φ, immagini delle suddette t corrispondenze dell'insieme G, soddisfaranno alle condizioni dell'enunciato.

Il gruppo delle curve $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ si chiamerà una *base* pel sistema di tutte le curve tracciate sopra Φ.

Se le corrispondenze $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ furono scelte in guisa che indicando con Γ un'altra corrispondenza qualsiasi di G, le $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \cdots, \Gamma^t$ risultino dipendenti secondo i numeri $(1, \lambda_1, \cdots, \lambda_t)$, ove le λ sono interi convenienti, la *base* $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ si dirà *minima.*

22. *Discriminante di una base. – Teorema di Bézout. – Espressioni pel grado e pel genere di una curva tracciata su* Φ. – Le considerazioni analoghe a quelle che facemmo ai nn. 17, 18 per la superficie F, si posson ripetere per la Φ, modificando solo la definizione del discriminante di una base. Perciò adesso ci limiteremo ad enunciare i resultati ai quali conducono le considerazioni stesse.

Se $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ son curve appartenenti a Φ, di indici rispettivi $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$, e se γ_{ih} esprime il numero dei punti comuni alle curve $\Gamma^i \Gamma^h$, si chiamerà *discriminante* del gruppo $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ il determinante simmetrico:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{t1} & c_{t2} & \cdots & c_{tt} \end{vmatrix},$$

ove si è posto $c_{ih} = \alpha_i \alpha_h - \gamma_{ih}$.

Quando le curve $\Gamma', \cdots, \Gamma^t$ *son dipendenti il discriminante* Δ *si annulla.*

Supponiamo che le curve $\Pi', \cdots, \Pi^t$ costituiscano anch'esse una base e che le $\Pi^i, \Gamma', \cdots, \Gamma^t$ risultino dipendenti secondo i numeri $(\lambda_i, \lambda_{1i}, \cdots, \lambda_{ti})$: allora il discriminante Δ' della base $(\Pi', \cdots, \Pi^t)$ risulta legato a Δ dalla relazione:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_t)^2 \Delta' = \Lambda^2 \Delta,$$

ove Λ è il determinante delle λ_{ih}.

Da questa si rileva che se si annulla il discriminante di una base, lo stesso accade dei discriminanti di tutte le altre. Noi faremo l'ipotesi (eventualmente limitativa) che i discriminanti delle basi non sieno nulli. Allora si può dire che

Le basi minime hanno lo stesso discriminante, che è il massimo comun divisore dei discriminanti ($\neq 0$) *di tutte le basi.*

Sia L una curva d'indice α dipendente dalla base $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ secondo i numeri $(\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_t)$, e sia γ_i il numero dei punti comuni ad L e alla curva Γ^i. In modo analogo per un'altra curva L' tracciata su Φ, introduciamo i caratteri α', $(\lambda', \lambda_1', \cdots, \lambda_t')$ e γ_i'. Allora il numero I dei punti comuni ad L, L' è espresso dalle due formole:

$$I = \alpha\alpha' - \frac{1}{\lambda\lambda'} \sum_{i,h} c_{ih} \lambda_i \lambda_h'$$

$$I = \alpha\alpha' - \frac{1}{\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h'$$

nella seconda delle quali Δ_{ih} rappresenta il subdeterminante dell'elemento c_{ih} nel discriminante Δ, e c_i, c_h' son definiti dalle uguaglianze:

$$c_i = \alpha\alpha_i - \gamma_i, \qquad c_i' = \alpha'\alpha_i - \gamma_i'.$$

Il grado ν e il genere ϱ della curva L vengono espressi da:

$$\nu = \alpha^2 - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i,h} c_{ih} \lambda_i \lambda_h = \alpha^2 - \frac{1}{\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h,$$

$$\varrho = \alpha(p-1) + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{i,h} c_{ih} \lambda_i \lambda_h + 1 =$$

$$= \alpha(p-1) + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{2\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h + 1,$$

ove u è il numero dei punti comuni ad L e alla curva K_1, inviluppo di Σ. Naturalmente introducendo i caratteri della curva K_1 rispetto alla base $(\Gamma', \cdots, \Gamma^t)$ e l'indice di K_1, che è uguale a 2, perché le curve di Σ toccano il loro inviluppo, dalla precedente formola si elimina la u. Ma l'espressione che così si ottiene per ϱ è complicata e riteniamo inutile trascriverla.

Osservazione. – Nelle formole (34) che davano il genere di una curva tracciata su F, non entravano caratteri della curva immagine dell'identità, perché le curve canoniche di F, risultando all'addizione dei gruppi canonici dei due fasci unisecantesi, erano a valenza zero.

Invece nella formola che dà il genere di una curva tracciata sulla superficie Φ, che consideriamo attualmente, compariscono caratteri della curva K_1 immagine dell'identità, perché le curve canoniche di Φ sono a valenza 1 (come risulta dal fatto che fra esse ci sono le immagini delle g^1_{2p-2} canoniche di C), e quindi esse non si compongono direttamente con le curve di Σ, ma sono legate a queste da una relazione in cui entra anche K_1 (ved. al n° 20).

23. *Caso della superficie che rappresenta le coppie (non ordinate) dei punti di una curva a moduli generali.* – Non vogliamo passare sotto silenzio il caso in cui il sistema Σ, contenuto in Φ, è un ente ∞^1 a moduli generali, perché applicando a questo caso le considerazioni svolte per una Φ qualunque, si ottengono risultati che, per la loro semplicità, riescono interessanti.

Se il sistema Σ è a moduli generali, ossia se la curva C da cui nasce la superficie Φ, è a moduli generali, pel teorema di Hurwitz, sopra Φ non si troveranno che curve a valenza. Dunque, secondo il n° 20, se T è una curva di Φ esisterà sempre un intero γ (positivo, negativo o nullo), tale che:

$$2T + \gamma K_1 \equiv 2\,(T_x + \gamma H)\,. \tag{39}$$

Questa relazione si può enunciare dicendo che *la curva* K_1, *inviluppo del sistema* Σ, *è una base per la totalità delle curve tracciate su* Φ.

Però, al contrario di quanto accadeva nel caso della superficie F rappresentante le coppie ordinate dei punti di C, l'immagine dell'identità non costituisce attualmente una base minima.

Ma è facile vedere che *una curva* Γ *immagine di una corrispondenza simmetrica a valenza uno, può assumersi come base minima.*

Difatti la corrispondenza T a valenza γ e la corrispondenza Γ a valenza 1, sono dipendenti secondo i numeri $(1\,,\,-\gamma)$ (n° 9), e quindi (n° 21) tra le T, Γ passa la relazione:

$$T - \gamma\Gamma \equiv T_x - \gamma\Gamma_x\,. \tag{40}$$

Si può prendere come curva Γ quella che rappresenta le coppie di una qualsiasi g^1_n: in particolare, se $p > 1$, possiamo assumere come base minima una curva canonica. Sicché in tal caso *tutte le curve della superficie* Φ *si ottengono con le operazioni di somma e sottrazione dalle curve del sistema* Σ, *d'indice* 2 *e grado* 1, *e da una curva canonica.*

Dalla (39) o dalla (40) si trae che il numero dei punti comuni a due curve T, T' di indici α, α' e di valenze γ, γ', è:

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' p\,.$$

In particolare il grado ν di T è espresso da:

$$\nu = \alpha^2 - \gamma^2 p\,,$$

e quindi il genere ϱ da:

$$\varrho = \alpha(p-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\,p + 1\,.$$

I risultati precedenti interpretati nel caso in cui la Φ è una *superficie iperellittica generale* ($p = 2$), ne forniscono proprietà, che credo nuove.

§ 3. – *Esame particolare delle superficie che rappresentano le coppie, ordinate o non, dei punti di una curva ellittica.*

24. *Determinazione effettiva di una base minima sulla superficie che rappresenta le coppie ordinate dei punti di una curva ellittica singolare. – Esempio numerico.* – Come applicazione delle considerazioni generali svolte nei §§ precedenti (della Parte II[a]), studieremo dapprima le superficie che rappresentano le coppie ordinate dei punti di una curva ellittica singolare, e poi passeremo ad alcune osservazioni sulle superficie che rappresentano le coppie non ordinate (rigate ellittiche).

La esistenza su C di qualche corrispondenza singolare, porta la esistenza di qualche curva priva di valenza sulla superficie F (coi due fasci ellittici unisecantisi e razionalmente identici, $|K_x|$, $|K_y|$) che rappresenta le coppie ordinate dei punti di C.

Si tratta di caratterizzare geometricamente, in questo caso singolare, una base (minima) di tutte le curve tracciate su F.

Dicendo $(1, \tau)$ i periodi dell'integrale normale di 1[a] specie u disteso sulla C, ad ogni corrispondenza fra i punti di C verrà associata una soluzione in numeri interi (h, g, H, G) della equazione:

$$(h + g\tau)\,\tau = H + G\tau\,. \tag{41}$$

Le corrispondenze a valenza provengono dalle soluzioni *identiche* di quest'equazione, cioè dalle soluzioni:

$$h = G\,, \qquad g = H = 0 \quad (44)\,.$$

Per l'ipotesi fatta che C sia singolare, esisterà almeno una soluzione non identica (h', g', H', G') della (41). Supponiamo che la nostra curva C sia una cubica piana ellittica di equazione:

$$x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3\,,$$

e che sia $p(u\,|\,1, \tau)$ la funzione p di Weierstrass ad essa relativa, dimodoché la rappresentazione parametrica di C sarà:

$$x_1 = p(u)\,, \qquad x_2 = p'(u)\,.$$

Allora se si pone:

$$\pi' = h' + g'\tau\,,$$

in virtù della relazione:

$$(h' + g'\tau)\,\tau = H' + G'\tau\,, \tag{42}$$

potremo dire che la $p(u\,|\,1, \tau)$ possiede il *moltiplicatore complesso* π' (45), ossia che $p(\pi' u)$ è funzione razionale di $p(u)$ del grado $\alpha = G'h' - g'H'$.

(44) HURWITZ, *loc. cit.*, § 2.

(45) Cfr. ad esempio BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*. Pisa, Spoerri (1901); pag. 525 e sgg.

Segue da ciò che ponendo:

$$u' \equiv \pi' u \,, \tag{43}$$

ad ogni punto $x\,(x_1\,,x_2)$ della curva C, e quindi ad ogni valore di u, corrisponde un valore di u' e quindi un altro punto $y\,(y_1\,,y_2)$ della curva; e viceversa che ad un punto y, e quindi ad un valore di u', rispondono α valori (incongrui) di u, e quindi α punti x. La (43) definisce dunque una corrispondenza algebrica singolare $(\alpha\,,\,1)$ fra la serie di punti $x\,,y$.

Questa corrispondenza sarà rappresentata su F da una curva T, unisecante le K_x e α–secante le K_y: il suo genere sarà dunque uguale ad 1, e il suo grado sarà uguale a zero (ved. la formola (15)).

Per rappresentare algebricamente la corrispondenza T basterà determinare due corrispondenze a valenza (positiva o nulla) S', S'', ciascuna delle quali contenga come parte T: il che si fa in infiniti modi. Ragionando per chiarezza sulla F, si potrà, per esempio, proceder così: si determinino genericamente due sistemi lineari $|\,S'\,|\,,\,|\,S''\,|$, di cui ciascuno sia la somma di serie lineari dei due fasci unisecantisi, e tanto ampii che entrambi contengano parzialmente la T. Allora questa curva si potrà definire come l'*intersezione* di due curve a valenza zero ben determinate, all'infuori, eventualmente, di un numero finito di punti comuni alle parti residue. Poiché ogni corrispondenza a valenza si rappresenta con una sola equazione fra i punti $x\,,y$ di C, le coppie dei punti omologhi nella T, resteranno definite dal fatto di soddisfare contemporaneamente a due equazioni, all'infuori forse di un numero finito di soluzioni estranee.

Nel caso attuale è facile scrivere le equazioni di due corrispondenze S', S'', a valenza, che contengano come parte la T. Difatti le coordinate $y_1\,,y_2$ del punto y corrispondente ad x nella T, sono espresse da:

$$y_1 = p\,(u')\,, \qquad y_2 = p'(u')\,,$$

dove u' è legato al valore dell'integrale u nel punto x, dalla relazione (43). E poiché $p\,(u')$ è funzione razionale di $p\,(u)$, avremo:

$$y_1 = \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}\,,$$

nella quale $f\,,\varphi$ sono polinomii. L'equazione:

$$y_1\,\varphi\,(x_1) - f\,(x_1) = 0\,,$$

rappresenta una corrispondenza S' a valenza, fra i punti della curva C, e la S' contiene come parte la T.

Derivando i due membri della relazione:

$$p\,(u') = \frac{f\,(pu)}{\varphi\,(pu)}\,,$$

avremo:

$$p'(u') = \frac{\psi\,(pu\,,p'u)}{\chi\,(pu\,,p'u)}\,,$$

dove ψ e χ son polinomii. Sicché un'altra corrispondenza S'' a valenza, contenente come parte la T, sarà rappresentata dall'equazione:

$$y_2 \chi(x_1 , x_2) - \psi(x_1 , x_2) = 0.$$

Sotto forma trascendente la T si può rappresentare con la sola equazione:

$$\Theta(u' - \pi' u \mid 1 , \tau) = 0 \quad (46). \tag{44}$$

Ad ogni corrispondenza singolare viene associato un moltiplicatore complesso della funzione p, e viceversa ad ogni moltiplicatore complesso si può associare (in infiniti modi) una corrispondenza singolare fra i punti di C. Così se π' è un moltiplicatore complesso, basterà scrivere la (44), per avere la rappresentazione di una corrispondenza singolare ad esso associata.

Siccome ogni altro moltiplicatore complesso π della p è legato a π' da una relazione del tipo:

$$\lambda\pi + \lambda_1 \pi' + \lambda_2 = 0 ,$$

ove $\lambda , \lambda_1 , \lambda_2$ son numeri interi, la corrispondenza già costruita T (associata al moltiplicatore π') ed una corrispondenza qualsiasi associata al moltiplicatore 1 (cioè a valenza —1), costituiranno una *base* di tutte le corrispondenze esistenti sopra C. Conviene scegliere come corrispondenza associata al moltiplicatore 1, l'identità K.

Ma avendo scelto arbitrariamente per costruire la T, uno degli infiniti moltiplicatori complessi della p, la base (T , K) non sarà in generale minima.

Vediamo dunque di procurarci con sicurezza una base minima. Perciò occorrerà applicare il noto procedimento che permette di costruire un *moltiplicatore complesso elementare*, conoscendo un moltiplicatore complesso qualsiasi (47).

Riprendiamo la (42) e scriviamola sotto la forma:

$$g'\tau^2 + (h' - G')\tau - H' = 0 .$$

Moltiplicando i due membri di questa per un conveniente numero (razionale), si può sempre ridurre al tipo:

$$A\tau^2 + 2B\tau + C = 0 ,$$

ove A , B , C sono interi primi fra loro.

Ricordiamo che la *forma quadratica* (A , B , C), il cui discriminante è $D = AC - B^2$, dicesi di *prima* o di *seconda specie*, secondoché A, C non sono o sono ambedue pari. Orbene si dimostra che se (A , B , C) è di 1ª specie

$$\pi'' = B + A\tau$$

è un moltiplicatore complesso elementare, ossia tale che ogni altro moltiplicatore è della forma $\lambda_1 \pi'' + \lambda_2$, con λ_1 , λ_2 interi; e che se (A, B , C) è di

(46) HURWITZ, *loc. cit.*
(47) BIANCHI, *loc. cit.*, p. 529.

2ª specie, un moltiplicatore elementare è:

$$\pi'' = \frac{1}{2}(B + 1 + A\tau) .$$

Ponendo:

$$u' = \pi'' u ,$$

e attribuendo a π'' il primo o il secondo valore, secondoché (A, B, C) è di 1ª o di 2ª specie, avremo la rappresentazione trascendente di una corrispondenza singolare S, di cui un indice è uguale ad 1, e l'altro, a, è dato da:

$$a = D , \qquad a = \frac{1}{4}(D + 1) ,$$

secondoché (A, B, C) è di 1ª o di 2ª specie.

La *base* (S, K) sarà evidentemente *minima*.

Ritornando alla superficie che rappresenta le coppie ordinate dei punti di C, ne possiamo fissare un modello projettivo, considerando nello spazio a quattro dimensioni $(x_1 x_2 y_1 y_2)$ l'intersezione delle due varietà (cilindriche) a tre dimensioni:

$$x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3$$
$$y_2^2 = 4y_1^3 - g_2 y_1 - g_3 .$$

Su questa superficie F del 9° ordine i due fasci unisecantisi $|K_x|$, $|K_y|$ son segati dai piani generatori dei due cilindri, e sono quindi costituiti da cubiche piane ellittiche; l'identità K è pure una cubica ellittica segata su F dal piano:

$$x_1 - y_1 = 0 , \qquad x_2 - y_2 = 0 .$$

Per scrivere le equazioni della curva S bisognerà ricorrere alla formola effettiva di moltiplicazione, che esprime $p(\pi'' u)$ come funzione razionale di $p(u)$. Questa formola ci darà l'equazione di una varietà passante per S; l'equazione di un'altra varietà pure passante per S, si otterrà derivando i due membri della formola suddetta.

Ogni altra curva di F si compone con operazioni di somma e sottrazione a partire dalle curve dei due fasci, e dalle curve S , K.

Poiché il numero dei punti uniti di una corrispondenza (α, β), associata ad una soluzione (h, g, H, G) della (41), è espresso da:

$$\alpha + \beta - h - G \quad [48],$$

il numero dei punti comuni ad S e K sarà uguale ad

$$\alpha + 1 - B + B = \alpha + 1 ,$$

(48) HURWITZ, *loc. cit.*

se (A, B, C) è di 1ª specie, e ad

$$\alpha + 1 - \frac{1}{2}(B+1) - \frac{1}{2}(1-B) = \alpha,$$

se (A, B, C) è di 2ª specie.

Sicché il discriminante Δ della base (S, K) sarà espresso da:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\alpha = 4D$$

nel primo caso, e da:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\alpha - 1 = D$$

nel secondo caso.

Conoscendo il discriminante della base (S, K) si può calcolare il grado e il genere di una curva tracciata su F, e il numero dei punti comuni a due tali curve, in funzione dei loro indici e dei numeri dei punti in cui esse tagliano S, K (ved. il nº 18).

Esempio numerico. – Non ci tratterremo sopra i più semplici esempî numerici che si potrebbero addurre, cioè quelli relativi ai casi di una cubica armonica o equianarmonica [49]. Osserveremo solo che in entrambi i casi tutte le curve tracciate su F si potranno ottenere per somma e sottrazione da una curva rappresentante una corrispondenza biunivoca ordinaria, e da un'altra rappresentante una corrispondenza *biunivoca* singolare, cioè segante in un punto le curve dei due fasci $|K_x|, |K_y|$, nonché dalle curve stesse di questi fasci [50].

Considereremo piuttosto un esempio un po' più elevato, studiando la superficie F relativa alla cubica ellittica singolare:

$$x_2^2 = 4x_1^3 - 30x_1 - 28 \quad [51].$$

Il rapporto τ dei periodi di un integrale di 1ª specie, soddisfa in tal caso alla equazione:

$$\tau^2 + 2 = 0.$$

Siccome questa è una forma quadratica di 1ª specie $(1, 0, 2)$, una corrispondenza singolare come la S, si otterrà prendendo:

$$h = 0, \quad g = 1, \quad H = -2, \quad G = 0,$$

(49) Le corrispondenze biunivoche di ogni specie sopra una curva ellittica, furono studiate geometricamente da C. SEGRE nella Nota: *Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche*, Atti della R. Acc. di Torino (1889).

(50) La superficie delle coppie ordinate dei punti di una curva ellittica, fu incontrata da U. AMALDI come il tipo più generale di superficie con più di due fasci unisecantisi (all'infuori delle superficie razionali). Ved. la sua Nota nei Rendiconti dei Lincei, (5) 2_2 (1902).

(51) A proposito di questa cubica ved. il libro già citato del Bianchi, p. 545.

e sarà rappresentata sotto forma trascendente dalla relazione:

$$u' \equiv i\sqrt{2}\, u .$$

La formola di moltiplicazione relativa al moltiplicatore $i\sqrt{2}$, è:

$$-2p(i\sqrt{2}\, u) = p(u) + \frac{9}{2p(u)+4} ,$$

sicché una prima equazione alla quale soddisfano le coordinate $x_1 , x_2 ; y_1 , y_2$ delle coppie di punti omologhi nella S, sarà:

$$2x_1^2 + 4x_1y_1 + 4x_1 + 8y_1 + 9 = 0 . \tag{45}$$

Derivando i due membri della formola di moltiplicazione, ricaveremo una seconda equazione alla quale soddisfano le coordinate dei punti x , y omologhi nella S:

$$2x_2(x_1+2)^2 + 4i\sqrt{2}(x_1+2)^2 y_2 - 9x_2 = 0 . \tag{46}$$

L'indice α della S non è altro che il discriminante della forma $(1 , 0 , 2)$, cioè $\alpha = 2$.

Le equazioni della superficie F appartenente allo spazio $S_4(x_1 x_2 y_1 y_2)$ saranno attualmente:

$$x_2^2 = 4x_1^3 - 30x_1 - 28$$

$$y_2^2 = 4y_1^3 - 30y_1 - 28 ,$$

e la curva S sarà segata su F dalle due varietà (45), (46).

Sia Γ' una curva di indici (α', β') tracciata su F, e sieno γ_1', γ_2' i numeri dei punti in cui essa taglia S e l'identità K. Il grado di Γ' sarà espresso dalla formola:

$$2\alpha'\beta' + \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & c_1' & c_2' \\ c_1' & 4 & 0 \\ c_2' & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha'\beta' - \frac{c_1'^2 + 2c_2'^2}{4} ,$$

ove si è posto:

$$c_1' = \alpha' + 2\beta' - \gamma_1' , \qquad c_2' = \alpha' + \beta' - \gamma_2' ;$$

il genere verrà dato da:

$$\alpha'\beta' - \frac{c_1'^2 + 2c_2'^2}{8} + 1 .$$

Se poi Γ'' è un'altra curva di F e per questa s'introducono i caratteri $\alpha'', \beta'', \gamma_1'', \gamma_2'', c_1'', c_2''$, analoghi a quelli introdotti per Γ', il numero dei punti comuni a Γ' e Γ'' sarà uguale ad

$$\alpha'\beta'' + \alpha''\beta' + \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & c_1' & c_2' \\ c_1'' & 4 & 0 \\ c_2'' & 0 & 2 \end{vmatrix} = \alpha'\beta'' + \alpha''\beta' - \frac{c_1' c_1'' + 2c_2' c_2''}{4} .$$

E così le più importanti questioni relative alle curve tracciate su F, vengono completamente risolute.

25. *Le rigate ellittiche come superficie delle coppie di punti di una curva ellittica.* – La varietà ∞^2 delle coppie non ordinate dei punti di una curva ellittica C, si può sempre riferire ad una rigata ellittica Φ, e viceversa (52). Le generatrici K_x della rigata rappresentano le g_2^1 di C, e le curve H del sistema di grado 1 e indice 2, Σ, le quali corrispondono ai punti di C, incontrano in un sol punto le generatrici.

Le curve che rappresentano le coppie dei punti delle $\infty^2 g_3^1$ contenute in una g_3^2, costituiscono una rete di grado 3, che contiene ∞^1 curve composte $H + K_x$. Assumeremo come fascio $|K_y|$ uno dei fasci della rete suddetta.

Sia ora T una curva qualsiasi segante in β punti le K_x, in α punti le K_y e in $a\,(=\alpha-\beta)$ punti le curve di Σ. Chiamando K_x', K_x'', K_x''' le generatrici che passano pei punti base di $|K_x|$, avremo per la (17) (n° 14):

$$T + \beta\,(K_x' + K_x'' + K_x''') \equiv T_x + T_y\,, \tag{47}$$

ove T_x (o T_y) denota il gruppo delle K_x (o K_y) passanti pei punti comuni ad una K_y (o K_x) e a T.

Vediamo di dedurre dalla (47) il modo di comporre la T con le curve del sistema Σ e col loro inviluppo K_1.

Le tre curve di $|K_y|$ che contengono come parti rispettivamente K_x', K_x'', K_x''', lasciano come resti tre curve di Σ: H', H'', H''', ciascuna delle quali passa per due dei tre punti base di $|K_y|$. Pel fatto che ogni generatrice rappresenta una corrispondenza a valenza uno, avremo (n° 20):

$$2\,K_x' + K_1 \equiv 2\,(H'' + H'''), \qquad 2\,K_x'' + K_1 \equiv 2\,(H''' + H'),$$
$$2\,K_x''' + K_1 \equiv 2\,(H' + H'')\,,$$

e quindi:

$$2\,(K_x' + K_x'' + K_x''') + 3\,K_1 \equiv 4\,(H' + H'' + H''')\,.$$

Sostituendo nella (47) dopo averla moltiplicata per 2, verrà:

$$2\,T - 3\,\beta K_1 + 4\,\beta\,(H' + H'' + H''') \equiv 2\,T_x + 2\,T_y\,. \tag{48}$$

Se per costruire il gruppo T_x si sega T con la curva composta $H' + K_x'$, avremo:

$$T_x \equiv \beta K_x' + M'\,,$$

ove M' è il gruppo delle K_x che passano pei punti comuni a T e ad H'. Analogamente, se per costruire T_y si sega T con la curva K_x', si otterrà:

$$T_y \equiv \beta\,(H' + K_x')\,.$$

Sostituendo nella (48), avremo:

$$2T - 3\,\beta K_1 + 4\,\beta\,(H' + H'' + H''') \equiv 4\,\beta\,K_x' + 2\,\beta H' + 2\,M'. \tag{49}$$

(52) C. SEGRE, *Ricerche sulle rigate ellittiche...*, Atti della R. Accad. di Torino, *21* (1886), n° 19.

Siccome ognuna delle curve del gruppo M' è a valenza uno, la curva composta M' sarà a valenza a, sicché:

$$2M' + aK_1 \equiv 2(N' + aH'),$$

ove N' è il gruppo delle curve di Σ, diverse da H', che escono dai punti comuni a T ed H'.

Se nella (49) sostituiamo l'espressione di $2M'$ data dalla precedente relazione e quella di $2K_x'$ data dalla:

$$2K_x' + K_1 \equiv 2(H'' + H'''),$$

otterremo, a riduzioni fatte:

$$2T + (a - \beta)K_1 \equiv 2[N' + (a - \beta)H'],$$

la quale prova che la curva T ha la valenza $a - \beta$.

Questo risultato ci dice che:

Sopra una curva ellittica qualsiasi le corrispondenze simmetriche sono tutte a valenza.

Precisamente: Se una corrispondenza simmetrica ha l'indice a ed ha β coppie comuni con una g_2^1 della curva ellittica, la sua valenza è $a - \beta$.

Lo stesso fatto si sarebbe potuto stabilire per via trascendente, identificando le formole che rappresentano la corrispondenza diretta con quelle che rappresentano la corrispondenza inversa.

XVI.

SULLA DEFICIENZA DELLA SERIE CARATTERISTICA DI UN SISTEMA LINEARE DI CURVE APPARTENENTE AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *12*$_2$, fasc. 7 (1903), pp. 250–257 (*).

Nella Memoria: *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (1) il prof. Castelnuovo dimostrò che sopra una superficie di generi P_g, P_a, la deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare completo non supera $P_g - P_a$, e come conseguenza immediata di questa proposizione stabilì in modo esauriente il teorema di Riemann–Roch per le superficie.

Lo scopo di questa mia Nota è di dare una nuova dimostrazione molto semplice del teorema di Castelnuovo e conseguentemente del teorema di Riemann–Roch.

Dirò subito che tra le proposizioni di geometria sopra una superficie, sulle quali si fonda la mia dimostrazione, quelle che hanno carattere più elevato, si riferiscono alla *proprietà fondamentale dell'aggiunzione* e alla dimensione del sistema lineare segato sopra una superficie F dello spazio ordinario dalle aggiunte di un ordine abbastanza alto; la qual dimensione, com'è noto, può calcolarsi direttamente con le formole di postulazione nel caso delle singolarità ordinarie, oppure, prescindendo dalla natura delle singolarità di F, nel modo indicato dal prof. Enriques al n° 40 della sua *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (2).

Esporrò qui le linee generali della dimostrazione sviluppata in questa Nota.

Assunto come modello proiettivo dell'ente ∞^2 una superficie d'ordine n, priva di punti multipli in uno spazio S_r, dopo averla proiettata genericamente sullo spazio ordinario in una superficie F, con linea doppia e punti tripli, della quale sia $|C|$ il sistema delle sezioni piane, deduco anzitutto dalla dimensione effettiva del sistema di curve segato su F dalle superficie aggiunte di un ordine k abbastanza alto, un limite inferiore per la dimensione del sistema completo $|kC|$. Dimostro poi che sopra la curva D, sezione di F con una superficie K d'ordine k, le superficie di un ordine *qualunque* passanti pei punti doppî della D segano, fuori di questi, una serie lineare completa.

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre e pervenuta all'Accademia prima del 4 ottobre 1903.

(1) Annali di Matematica, (2) *25* (1897), pp. 235–318.

(2) Memorie dei XL, (3) *10* (1896), pp. 1–81.

Da ciò si rileva immediatamente che se k è abbastanza grande, le superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad F (supposte esistenti), segano sopra una curva kC una serie completa: basta infatti scegliere $k > n-4$, perché accada che ogni superficie d'ordine $n-4$ passante pei punti doppî di D, contenga in conseguenza la linea doppia, e quindi sia aggiunta ad F. Così trovasi che la dimensione della serie completa residua della serie caratteristica g_{n_k} rispetto alla serie canonica di kC, è uguale a $P_g - 1$.

D'altronde questa dimensione si può anche calcolare in funzione dei caratteri della serie g_{n_k} profittando del teorema di Riemann–Roch, relativo alle serie lineari sopra una curva. Confrontando l'uguaglianza che in tal modo si ottiene, con la disuguaglianza a cui soddisfa la dimensione di $|kC|$, si trova che la deficienza di g_{n_k} non supera $P_g - P_a$.

Stabilito ciò, si scelga k così grande che $|kC|$ seghi su C una serie completa e che al sistema residuo, $|(k-1)C|$, si possano applicare tutte le considerazioni precedenti. Allora con un semplice ragionamento che trovasi al nº 30 della citata Memoria di Castelnuovo (3), si dimostra che la deficienza δ della serie caratteristica di C, non supera quella della serie caratteristica di $(k-1)C$, e quindi che $\delta \leq P_g - P_a$.

Una volta dimostrata questa proprietà pel sistema $|C|$, facilmente si estende ad ogni altro sistema.

In questo riassunto, per semplificare, mi son limitato al caso $P_g > 0$. Nel caso $P_g = 0$ la dimostrazione non è sostanzialmente differente.

1. Data una superficie d'ordine n, priva di punti multipli, indichiamo con F una sua proiezione generica sullo spazio ordinario, la quale sarà dotata soltanto di una linea doppia e di punti tripli, che lo sono anche per questa linea.

Diciamo $|C|$ il sistema delle sezioni piane di F, che sieno di genere π, ed r'_k la dimensione del sistema completo $|(kC)'|$ aggiunto al sistema $|kC|$, di grado n_k, genere π_k, multiplo secondo k del sistema $|C|$.

Poiché, allorquando k è abbastanza grande, $|(kC)'|$ sega su kC una serie canonica avente la deficienza $P_g - P_a$ (4), sarà:

$$r'_k - (\pi_k - 1 - P_g + P_a) - 1$$

la dimensione del sistema residuo $|(kC)' - kC|$. Ma questa dimensione è uguale a $P_g - 1$, perché il sistema residuo suddetto differisce al più dal sistema canonico per componenti fisse, dunque avremo:

$$r'_k = \pi_k - 1 + P_a .$$

(3) Questo ragionamento, come avverte il prof. Castelnuovo, gli fu suggerito da un paragrafo (IV, 1) delle *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche...*, del prof. F. ENRIQUES, Memorie di Torino, (2) *44* (1893), pp. 171–232.

(4) F. ENRIQUES, *Introduzione*, nº 40.

Ciò posto dimostriamo che, quando k è abbastanza grande, il sistema completo $|kC|$ ha la dimensione:

$$r_k \geq n_k - \pi_k + P_a + 1 .$$

Si consideri perciò il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ (o il sistema aggiunto ad un multiplo di $|C|$, quando non esistesse $|C'|$ e si scelga k così grande che la dimensione del sistema $|C' + kC|$, aggiunto a $|(k+1)C|$, sia espressa dalla formola:

$$r'_{k+1} = \pi_{k+1} - 1 + P_a ,$$

e che inoltre esso seghi sopra una C' una serie non speciale. Indicando con n', π' il grado e il genere di $|C'|$, avremo che una C' imporrà al più $k(2\pi - 2) + n' - \pi' + 1$ condizioni alle $C' + kC$ obbligate a contenerla, e quindi il sistema residuo $|C' + kC - C'| = |kC|$, avrà almeno la dimensione:

$$(1) \qquad r'_{k+1} - k(2\pi - 2) - n' + \pi' - 1 = \pi_{k+1} - k(2\pi - 2) - n' + \pi' + P_a - 2 .$$

Ora si osservi che:

$$\pi_{k+1} = \pi_k + \pi + nk - 1 , \qquad \pi_k = n\binom{k}{2} + k(\pi - 1) + 1 ,$$

e che:

$$n' - \pi' = \pi - 2 ,$$

come si rileva calcolando il numero delle intersezioni di una curva del sistema $|C + C'|$ con una curva del sistema aggiunto $|2C'|$ [5]. Sostituendo nella espressione (1) avremo appunto:

$$(2) \qquad r_k \geq n_k - \pi_k + P_a + 1 .$$

2. Passiamo ora a dimostrare che *sulla curva D, sezione di F con una superficie generica K, d'ordine k, le superficie di un dato ordine passanti pei punti doppî della D* (che cadono nelle intersezioni di K con la linea doppia di F) *segano, fuori di quei punti doppî, una serie lineare completa.*

Per brevità nel seguito le superficie passanti pei punti doppî di D, si diranno *aggiunte* a questa curva, e quelle d'ordine l, s'indicheranno con Φ^l.

Il teorema che si tratta di stabilire è vero per le Φ di un ordine abbastanza alto [6]; e quindi sarà dimostrata la sua validità in ogni caso, allorquando dal fatto che le Φ di un certo ordine l segano su D una serie completa, avremo dedotto che anche le Φ^{l-1} segano una serie completa.

Le superficie Φ^l sieno ∞^x e ve ne sieno ∞^y passanti per D, per modo che la dimensione della serie completa g^ϱ_ν, segata da esse sulla D, sia espressa da

$$\varrho = x - y - 1 .$$

(5) F. ENRIQUES, *Introduzione*, n° 41.

(6) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, Rendiconti di Palermo, 7 (1893), pp. 89–110.

Se con $kn - z_l$ $(z_l \geq 0)$ s'indica il numero delle condizioni imposte alle Φ^l (o ciò che è lo stesso ai gruppi di g_ν^ϱ) dalla sezione G di D con un piano α, avremo che la dimensione della serie completa residua di G rispetto a g_ν^ϱ, sarà data da:

$$\varrho - kn + z_l .$$

Sia $\binom{l+2}{2} - 1 - \theta_l$ $(\theta_l \geq 0)$ la dimensione del sistema lineare segato sul piano α dalle Φ^l, e sia $kn - \zeta_l$ $(\zeta_l \geq 0)$ il numero delle condizioni che presentano i punti del gruppo G alle curve d'ordine l, del piano α, obbligate a contenerli.

Le superficie Φ^l spezzate in superficie Φ^{l-1} e nel piano α, saranno $\infty^{x-\binom{l+2}{2}+\theta_l}$, e le superficie Φ^{l-1} passanti per D costituiranno un sistema $y - \binom{l+2}{2} + kn - \zeta_l$ volte esteso, perché le Φ^l contenenti D segano su α il sistema Σ di *tutte* le curve d'ordine l passanti pel gruppo G (7), ossia un sistema di dimensione $\binom{l+2}{2} - 1 - kn + \zeta_l$.

Sicché la dimensione della serie segata su D dalle Φ^{l-1} sarà:

$$\left\{x - \binom{l+2}{2} + \theta_l\right\} - \left\{y - \binom{l+2}{2} + kn - \zeta_l\right\} - 1 = \varrho - kn + \theta_l + \zeta_l .$$

Proviamo ora che:

$$\theta_l + \zeta_l = z_l ,$$

e quindi che le Φ^{l-1} segano su D, fuori dei punti doppî, la serie *completa* $g_\nu^\varrho - G$.

Poiché di Φ^l per G ve ne sono ∞^{x-kn+z_l} e di Φ^l contenenti α ve ne sono $\infty^{x-\binom{l+2}{2}+\theta_l}$, le Φ^l per G segheranno su α un sistema Σ' di dimensione

$$\{x - kn + z_l\} - \left\{x - \binom{l+2}{2} + \theta_l\right\} - 1 = \binom{l+2}{2} - 1 - kn + z_l - \theta_l .$$

(7) Ved. l'osservazione al n° 14 della mia Nota: *Su alcune questioni di postulazione*, Rendiconti di Palermo, *17* (1903), pp. 73–103 [cfr. queste « Opere », p. 144; N.d.R.]. Per comodità del lettore riporterò qui l'osservazione di cui si tratta. Assunto il piano α come piano $x_0 = 0$ di un sistema di coordinate proiettive, sieno $F(x_0 x_1 x_2 x_3) = 0$, $K(x_0 x_1 x_2 x_3) = 0$ le equazioni di F, K, e $\varphi(x_1 x_2 x_3) = 0$ l'equazione di una curva d'ordine l passante per G. Indichiamo con $Q(x_0 x_1 x_2 x_3) = 0$ l'equazione di una superficie d'ordine l, non contenente il piano α, e passante per φ, cosicché sarà $Q(0 x_1 x_2 x_3) \equiv \varphi(x_1 x_2 x_3)$. Allora pel Fundamentalsatz di Nöther avremo:

$$Q(0 x_1 x_2 x_3) \equiv A(x_1 x_2 x_3) F(0 x_1 x_2 x_3) + B(x_1 x_2 x_3) K(0 x_1 x_2 x_3),$$

donde si trae:

$$Q(x_0 x_1 x_2 x_3) \equiv A(x_1 x_2 x_3) F(x_0 x_1 x_2 x_3) + B(x_1 x_2 x_3) K(x_0 x_1 x_2 x_3) + x_0 H,$$

ove H è una forma di ordine $l - 1$. La superficie $Q - x_0 H = 0$ passa per D, per φ, e non contiene α. Dunque è vero che una qualunque φ^l per G è segnata su α da una Φ^l per D.

Ora questo sistema deve contenere quello segato sul piano α dalle Φ^l passanti per D; ma siccome queste Φ^l, come abbiamo osservato, tagliano su α il sistema di tutte le curve d'ordine l per G, Σ' coinciderà con Σ e quindi sarà $z_l - \theta_l = \zeta_l$.

Osservazione. Si noti che dal ragionamento precedente segue pure che se esiste la serie $g_\nu^\varrho - G$, esistono certo superficie Φ^{l-1} non contenenti D (quelle che segnano la serie stessa).

3. Dalle proposizioni stabilite al n° 2, si traggono le due seguenti:

a) Quando $P_g > 0$ e k *è abbastanza grande, le superficie di ordine* $n-4$ *aggiunge ad* F *segano sopra una curva* kC *una serie completa.*

b) Quando $P_g = 0$ *e* k *è abbastanza grande, la serie caratteristica del sistema* $|kC|$ *è non speciale.*

Per dimostrare la *a*) si osservi che le superficie di ordine $n-4$ aggiunte alla sezione D di F con una superficie d'ordine $k > n-4$ (le quali segano su D una serie completa), passano in conseguenza per la linea doppia di F, ossia sono aggiunte ad F.

Per dimostrare la *b*) si rammenti che le superficie d'ordine $n-4$ aggiunte a D, supposte esistenti, segano sulla curva stessa, fuori dei punti doppî, gruppi della serie $g_{2\pi_k-2-n_k}$ residua della serie caratteristica g_{n_k} rispetto alla serie canonica di D (8), e che viceversa, in forza dell'*Osservazione* con la quale si chiude il n. precedente, allorquando esiste la serie residua suddetta, esistono superficie d'ordine $n-4$ aggiunte alla D. Da ciò segue che se $k > n-4$ non può esistere le serie $g_{2\pi_k-2-n_k}$, ossia la serie g_{n_k} non può essere speciale, perché altrimenti esisterebbero superficie d'ordine $n-4$ aggiunte a D, le quali sarebbero di conseguenza aggiunte ad F: il che contraddice all'ipotesi $P_g = 0$.

4. Dimostriamo ora che *la deficienza della serie caratteristica del sistema completo* $|C|$, *contenente totalmente le sezioni piane di* F, *non supera* $P_g - P_a$.

Supponiamo dapprima $P_g > 0$. Sia k così grande che la dimensione di $|kC|$ soddisfaccia alla (2) e che inoltre le aggiunte ad F di ordine $n-4$, seghino su kC una serie completa. Siccome questa serie è residua della serie caratteristica $g_{n_k}^{r_k-1}$ rispetto alla serie canonica di kC, in base al teorema di Riemann–Roch ne possiamo calcolare la dimensione ϱ, in funzione dell'ordine n_k e della dimensione $r_k + \delta_k - 1$ della serie completa che contiene $g_{n_k}^{r_k-1}$. Così trovasi:

$$\varrho = \pi_k - n_k + r_k + \delta_k - 2 .$$

D'altra parte è anche:

$$\varrho = P_g - 1 ,$$

(8) F. ENRIQUES, *Introduzione*, n° 38.

perché se k è abbastanza grande, la curva kC non è contenuta in nessuna aggiunta ad F, di ordine $n-4$, onde avremo:

$$\pi_k - n_k + r_k + \delta_k - 2 = P_g - 1 ,$$

che confrontata con la (2) porge

$$\delta_k \leq P_g - P_a . \tag{3}$$

Supponiamo ora $P_g = 0$ e scegliamo k così grande che la dimensione di $|kC|$ soddisfaccia alla (2), e che inoltre la sua serie caratteristica sia non speciale. Dicendo δ_k la deficienza di questa serie, avremo

$$r_k = n_k - \pi_k - \delta_k + 1 .$$

la quale, confrontata con la (2), dà:

$$\delta_k \leq - P_a .$$

Dunque in ogni caso la deficienza della serie caratteristica di $|kC|$ non supera $P_g - P_a$.

Ora si ricordi che la nostra superficie F è proiezione generica di una superficie F_1, priva di punti multipli e normale in uno spazio S_r. Poiché sopra una sezione iperpiana generica di F_1 le forme di un ordine k abbastanza alto ($\geq n-2$) segano una serie lineare completa (non speciale) [9], il sistema completo $|kC|$ taglierà sopra una sezione piana generica C di F una serie completa. Fissiamo una curva del sistema $|(k-1)C|$ e per brevità indichiamola con D. Sarà anche completa la serie segata su C dalle kC che passano pei punti comuni a C, D, e se questi punti presentano $\varepsilon \leq (k-1)n$ condizioni alle kC obbligate a contenerli, la serie suddetta sarà una $g_n^{r_k - r_{k-1} - \varepsilon - 1}$, la quale conterrà la serie caratteristica g_n^{r-1} del sistema completo $|C|$. Dunque la deficienza δ di quest'ultima serie sarà espressa da:

$$\delta = r_k - r_{k-1} - r - \varepsilon .$$

Similmente la serie segata su D dalle kC che passano pei punti comuni a C, D, è una $g_{(k-1)^2 n}^{r_k - r - \varepsilon - 1}$, e siccome questa serie contiene la serie caratteristica di D, dicendo δ_{k-1} la deficienza di quest'ultima, avremo:

$$\delta_{k-1} \geq r_k - r_{k-1} - r - \varepsilon ,$$

ossia:

$$\delta_{k-1} \geq \delta . \tag{4}$$

Se k fu scelto abbastanza grande, sarà:

$$\delta_{k-1} \leq P_g - P_a ,$$

e quindi avremo:

$$\delta \leq P_g - P_a$$ c. d. d.

(9) G. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare*, ecc.

5. Passiamo ad estendere la proposizione dimostrata ad un sistema qualsiasi (irriducibile e almeno ∞^1).

Prendiamo perciò come modello proiettivo dell'ente ∞^2 la superficie F_1 priva di punti multipli, normale nello spazio S_r, e sia $|C_1|$ un sistema completo irriducibile, almeno ∞^1, privo di punti base su F_1. Le forme (varietà ad $r-1$ dimensioni) di ordine k, passanti per una C_1, segano su F_1, fuori di questa curva, un sistema $|C_2|$ che, se k è abbastanza grande, si può supporre privo di gruppi neutri di un numero finito o infinito di punti (cioè di gruppi che impongono *una* condizione alle C_2 obbligate a contenerli); e quindi si può riguardare come il sistema rappresentativo di una superficie F_2, priva di punti multipli, riferita birazionalmente ad F_1. Elevando, se occorre, il valore di k, si può esigere che le sezioni D di F_1 con le forme di ordine k, seghino sulla curva C_1 (che è priva di punti multipli) una serie completa. Applicando ancora il ragionamento (di Castelnuovo) con cui al n. precedente si pervenne alla (4), avremo:

$$\delta_1 \leq \delta_2,$$

ove δ_1 è la deficienza della serie caratteristica di $|C_1|$ e δ_2 quella della serie caratteristica di $|C_2|$, reso completo, ove non lo sia. Ma in virtù della proposizione dimostrata al n° 4, si ha:

$$\delta_2 \leq P_g - P_a;$$

dunque sarà:

$$\delta_1 \leq P_g - P_a.$$

Se il sistema $|C_1|$ ha punti base su F_1, assegnati con molteplicità virtuale uguale all'effettiva, la cosa potrà stabilirsi considerando invece delle curve D, di cui sopra, le sezioni di F_1 con forme di ordine k assoggettate a convenienti condizioni nei punti base di $|C_1|$; e invece delle C_2, le sezioni di F_1 con quelle tra le forme suddette, che passano per C_1; oppure si trarrà profitto del fatto che la F_1 si può mutare birazionalmente in una superficie F_1^*, priva di punti multipli, in guisa che a $|C_1|$ risponda un sistema $|C_1^*|$, senza punti base.

Per estendere la proposizione ad un sistema dotato di punti base accidentali, occorre adottare opportune convenzioni, ma su ciò non crediamo d'insistere.

Concludendo, potremo enunciare:

La deficienza della serie caratteristica di ogni sistema lineare irreducibile, almeno ∞^1, *appartenente ad una superficie di generi* P_g, P_a, *non supera* $P_g - P_a$.

Da questa proposizione segue subito il *teorema di Riemann–Rock per le superficie*, come può vedersi al n° 34 della Memoria di Castelnuovo.

XVII.

SUI PROBLEMI DETERMINATI RISOLUBILI COLLA RIGA E COL COMPASSO

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *18* (1904), pp. 256–259.
(Estratto da una Lettera al Prof. F. Enriques).

...Ella ricorderà che l'anno scorso, parlando insieme del bel teorema enunciato da Descartes e dimostrato da Smith (1), concernente la possibilità di risolvere colla riga e col compasso ogni problema determinato di 3° o di 4° grado, appena sia tracciato sul foglio del disegno un arco, comunque piccolo, di una conica (che non sia un circolo), osservammo come sarebbe stato opportuno stabilire, con mezzi elementari, una proprietà analoga, che si prevedeva valesse pei problemi di 2° grado, e, più in generale, per quelli risolubili colla riga e col compasso; dei quali Ella discorre nel § 74 delle Sue *Lezioni di Geometria proiettiva* (2).

Ora, nel preparare una raccolta di problemi di Geometria proiettiva, che tra pochi giorni licenzierò alle stampe, ho ripensato alla cosa ed ho stabilito facilmente che *ogni problema determinato risolubile colla riga e col compasso, si può risolvere coll'uso della riga e di un arco di circolo, di dato centro, tracciato sul foglio del disegno.*

Prima di esporle la dimostrazione di questo teorema, gliene delineerò in poche parole il concetto.

Ogni problema di 2° grado si può ridurre con proiezioni e sezioni al problema tipico di determinare i punti X, Y comuni ad una retta u e ad una conica K (non tracciata); sicchè basterà provare come si possano costruire questi punti coll'uso della riga e del dato arco di circolo.

A tal uopo cercherò di individuare linearmente un arco della conica K, che contenga uno dei punti X, Y (se son reali); eppoi trasformerò omograficamente quest'arco nel dato arco di circolo. Si potranno allora costruire linearmente i punti X', Y' trasformati di X, Y, e si potrà quindi passare da quelli a questi con sole operazioni lineari.

Per effettuare le operazioni indicate, si costruisca linearmente il polo U della retta u rispetto a K: se U ed u si appartengono, la u tocca K nel punto U, e quindi le intersezioni della retta e della conica son già costruite.

(1) Cfr. il *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques*, Annali di Matematica, (2) *3* (1869), pp. 112–165 e 218–242. Ho esposto questa dimostrazione, con qualche miglioramento, nel mio libro di problemi, a cui accenno più sotto.

(2) Zanichelli, Bologna (1904), 2ª ed. p. 289.

Se U ed u non si appartengono, preso un punto generico A di K e costruita linearmente l'ulteriore intersezione B della retta UA con K, la coppia AB risulterà armonica con la coppia XY dei punti, reali o immaginari, in cui la u sega K. Ne deriva che se C è un altro punto generico di K, e se i punti X, Y son reali, l'arco ACB conterrà certo uno di questi punti (e l'arco completamentare, l'altro).

Sia ora K' il circolo a cui appartiene l'arco dato, A', B' due punti di quest'arco e C' un punto dell'arco stesso, intermedio tra A', B'. La proiettività tra K e K', individuata dalle tre coppie di punti corrispondenti AA', BB', CC', muta l'arco ACB di K nell'arco tracciato $A'C'B'$ di K'; e l'omografia ω che subordina tra K, K' la proiettività posta, muta la retta u in una retta u', che sega K' nei punti X', Y', omologhi di X, Y.

Se dunque il problema ha soluzioni reali, uno dei punti X', Y' si determinerà graficamente appena tracciata la retta u', perché è interno all'arco $A'C'B'$; e l'altro, dopo ciò, si costruirà linearmente. — Operando colla ω^{-1} sui punti X', Y', si otterranno i punti incogniti X, Y.

Ella osserverà che *il centro dell'arco tracciato serve soltanto per individuare l'assoluto*, e non occorre affatto se il problema è grafico.

Dal teorema che Le ho esposto, si può trarre una conseguenza notevole relativa alla potenzialità della riga *finita* a due orli (paralleli), come strumento di disegno; ma prima di parlare di ciò, è necessario ch'io dimostri la possibilità d'individuare linearmente un'omografia la quale muti K in K', e una data retta, segante K in due punti reali, in una retta segante K' in due punti reali, che appartengano *ambedue* all'arco tracciato.

Mantenendo le notazioni di poc'anzi, si costruisca l'ulteriore intersezione D di K colla retta UC, e, mediante la proiezione delle due coppie AB, CD da un altro punto di K, si stabilisca in quale ordine si susseguono entro alla conica i punti di queste coppie.

Se le sue coppie si separano, la costruzione eseguita ci dice già che il problema ha due soluzioni immaginarie (e, ove si richieda, si potranno costruire linearmente quante si vogliano coppie dell'involuzione ellittica che rappresenta quelle soluzioni); se le due coppie non si separano, la retta u sega K in una coppia reale XY, armonica con entrambe.

Supponiamo ad esempio che i punti di quelle coppie si susseguano nell'ordine $ABCD$; allora l'arco $ABCD$ di K conterrà i punti X, Y; e quindi se A', D' son due punti dell'arco tracciato di K', e B' un punto dello stesso arco, intermedio tra A' e D', l'omografia che subordina tra K, K' la proiettività $\begin{pmatrix} ABD \\ A'B'D' \end{pmatrix}$, muterà u in una retta u', segante in *due* punti reali X', Y' l'arco $A'B'D'$.

Trasportando per dualità le considerazioni precedenti, se ne trae la possibilità di risolvere coll'uso della riga e di un *arco–inviluppo* appartenente ad un circolo di dato centro, ogni problema risolubile colla riga e col compasso. Anzi vediamo che se un problema di 2° grado ha due soluzioni reali, colla sola riga si riesce a determinare un punto da cui escono *due* tali tangenti

del dato arco–inviluppo, che da esse si risale linearmente alle soluzioni del problema.

Passo ora a dimostrare che *tutti i problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, si risolvono pure con l'uso della sola riga a due orli*, DI LUNGHEZZA FINITA (3).

Poiché una riga a due bordi R, di lunghezza finita, permette (com'è noto) di eseguire qualunque costruzione lineare, per quanto precede, basterà provare che, data la riga R, si può *individuare* sul foglio un arco di circolo, di centro conosciuto, e tale se da un punto del piano escono due rette che tocchino il circolo *in 2 punti di quell'arco*, esse si possano costruire colla riga R.

Fissato un punto O del foglio ed un punto P che disti da O meno della lunghezza l della riga, ma più della sua larghezza r, disponendo la riga, nei due modi possibili, in guisa che uno de' suoi bordi passi per P e l'altro per O, si tracciano subito due rette a, b che escono da P e toccano il circolo K' di raggio r e centro O.

Dei due archi determinati dai punti di contatto delle a, b, considereremo quello minore di mezza circonferenza. Quest'arco sarà individuato quando se ne conosca una tangente intermedia.

Per costruire una tale tangente, si muova la riga R in modo che un suo bordo passi sempre per O, e che l'altro si disponga secondo una retta c soddisfacente alle condizioni che il triangolo finito racchiuso dalle $a\,b\,c$ lasci all'esterno il punto O, e che questo punto appartenga all'angolo $a\,b$ (inteso nel senso della Geometria elementare) del triangolo suddetto. È evidente che queste due condizioni si possono soddisfare in infiniti modi.

Se da un punto Q del piano escono due tangenti del circolo K', appartenenti entrambe all'arco–inviluppo $a\,c\,b$ (il quale aderisce ad un arco $\alpha < \pi$), l'angolo β sotto cui i punti di contatto di quelle tangenti son veduti da O, non supera α (è uguale ad α soltanto quando Q coincide con P). Da ciò, osservando che:

$$OP = \frac{r}{\cos\frac{1}{2}\alpha}, \qquad OQ = \frac{r}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

si trae:

$$OQ \leq OP < l.$$

Dunque se da un punto Q del foglio escono due tangenti dell'arco–inviluppo $a\,c\,b$, esse si costruiscono con la riga R; sicchè una volta dato questo strumento, è dato (potenzialmente) *tutto* un arco–inviluppo appartenente ad un circolo di centro assegnato.

(3) La possibilità di sostituire all'uso del compasso quello della riga a due bordi *indefinita*, fu rilevata dall'Adler nei Sitzungsberichte dell'Acc. viennese (1890); ed Ella pure ne parla a pag. 292 delle Sue Lezioni citate.

XVIII.

OSSERVAZIONI SUI SISTEMI CONTINUI DI CURVE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *39* (1904), pp. 371–392 (*).

La considerazione dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica, sembra avere una grandissima importanza per gli ulteriori progressi della geometria sopra una superficie, specialmente ove si abbia riguardo alla questione, che ormai s'impone, di stabilire se l'esistenza di un sistema continuo, non contenuto in un sistema lineare, sia caratteristica per una superficie irregolare.

E poiché mi pare che il concetto di serie caratteristica possa essere utile nello studio dei sistemi continui, come la considerazione analoga si rivela utilissima nella geometria dei sistemi lineari, in questa Nota pongo tale concetto e ne traggo alcune conseguenze che non mi sembrano sprovviste di qualche interesse.

Il punto di partenza delle osservazioni raccolte in questo lavoro, è una definizione della *serie caratteristica* di una curva tracciata sopra una superficie, indipendente dall'esistenza di un sistema lineare infinito che contenga la curva (1) (n° 1). Quando un tal sistema esiste, si ricade in una nozione notissima; ma con la nuova definizione si ha il vantaggio di poter parlare di serie caratteristica anche per una *curva isolata*.

Qui bisogna subito avvertire che sopra una curva isolata la serie caratteristica può anche mancare (n° 2); ciò accade per esempio tutte le volte che la curva sia tracciata sopra una superficie regolare (n° 5).

Ma quando una curva isolata C possiede la serie caratteristica, questa è ancora residua della serie segata su C dalle curve canoniche della superficie, rispetto alla serie canonica esistente su C (n° 3); e inoltre vale una relazione, analoga a quella di Castelnuovo pei sistemi infiniti, tra la dimensione della serie caratteristica completa e l'irregolarità della superficie (n° 5).

La nozione di serie caratteristica diviene feconda specialmente pel fatto che se una curva C appartiene ad un sistema continuo, ogni curva del sistema infinitamente vicina a C, segna sulla curva stessa un gruppo caratteristico (n° 4).

Ciò mi ha indotto a porre il concetto di *serie caratteristica di un sistema continuo* ∞^r. Con questa denominazione intendo la serie *lineare*, tutta costi-

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 28 febbraio 1904.

(1) Fu in seguito ad un'osservazione comunicatami dal prof. Castelnuovo, che ebbi il desiderio di definire in tal modo la serie caratteristica di una curva.

tuita da gruppi caratteristici, segata sopra una curva generica del sistema dalle ∞^{r-1} curve che le sono infinitamente vicine (n° 4).

Applicando un teorema di Castelnuovo, esteso, come sopra accennai, anche ai sistemi lineari completi ∞^0, si trova subito una disuguaglianza tra la dimensione di un sistema algebrico *completo*, la dimensione del sistema lineare completo individuato da una sua curva generica, e l'irregolarità della superficie (n° 6).

Da questa relazione seguono come corollarï immediati il teorema di Castelnuovo, che efferma l'irregolarità di una superficie con un fascio irrazionale (n° 5), e più in generale il teorema di Enriques, che afferma l'irregolarità di una superficie con un sistema continuo non appartenente ad un sistema lineare (n° 6). Anzi il teorema di Castelnuovo viene determinato maggiormente, perché si dimostra che l'irregolarità della superficie non è inferiore al genere del fascio irrazionale.

Alla fine applico la disuguaglianza per dimostrare che l'irregolarità di una superficie con p integrali finiti di Picard, a $2p$ periodi, non è inferiore a p; ma prima presento la dimostrazione del prof. Enriques, concernente l'esistenza sopra una tal superficie di un sistema algebrico non contenuto in un sistema lineare, sotto una forma più semplice e che mi sembra possa portare qualche luce anche sulla questione generale d'invertire un noto teorema di Humbert [2].

1. *Serie caratteristica di una curva tracciata sopra una superficie.* Data sopra una superficie F una curva C irriducibile, si scelga un sistema lineare infinito $|E|$ contenente parzialmente C, ma non come parte fissa; e s'indichi con $|D|$ il sistema residuo $|E - C|$.

Se la serie completa a cui appartiene la serie segata da $|E|$ su C, contiene la serie lineare segata da $|D|$ sulla stessa curva, la differenza tra la prima serie e la seconda si dirà la *serie caratteristica completa della curva* C.

Nel seguito, per brevità, designeremo con (EC) il gruppo comune alle curve E, C e con $|EC|$ la serie lineare completa individuata da quel gruppo. Con queste notazioni la serie caratteristica di C vien rappresentata dal simbolo:

$$|EC| - |DC|, \qquad \text{od anche:} \quad |(EC) - (DC)|.$$

Conviene considerare la serie caratteristica anche quando le due serie $|EC|$, $|DC|$ coincidono: soltanto per distinguere in modo particolare questo caso, parleremo di una *serie caratteristica d'ordine zero*.

Quando C appartiene ad un sistema lineare infinito, la serie ora definita non è altro che la serie segata sopra C dalle altre curve del sistema, completata, se occorre; cioè precisamente quella che in tal caso si suol chiamare la serie caratteristica del sistema lineare.

(2) *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques*, Comptes rendus, (1893). — Mi riservo di fare nel testo della Nota le citazioni relative alle altre parti di essa.

Invero, considerando una curva $\overline{C}$ del sistema, diversa da C, anche la $\overline{C}$ apparterrà parzialmente al sistema completo $|E|$ di cui sopra, e la differenza $|E - \overline{C}|$ darà ancora luogo al sistema $|D|$. Sicchè una particolare E si può costituire con la $\overline{C}$ aumentata di una D, e quindi verrà:

$$|EC| = |DC| + |\overline{C}C|,$$

ossia:

$$|\overline{C}C| = |EC| - |DC|.$$

Ma in ogni caso *se esiste la serie* $|EC| - |DC|$, *essa riesce indipendente dalla scelta del sistema* $|E|$.

E infatti se $|E_1|$ è un altro sistema soddisfacente alle stesse condizioni di $|E|$, e si pone:

$$|D_1| = |E_1 - C|,$$

aggiungendo membro a membro le relazioni:

$$|E_1| = |D_1 + C|, \qquad |D + C| = |E|,$$

viene:

$$|E_1 + D| = |E + D_1|,$$

la quale prova che:

$$|E_1 C| + |DC| = |EC| + |D_1 C|;$$

e da questa si trae che se esiste la serie $|(EC) - (DC)|$, esiste pure la serie $|(E_1 C) - (D_1 C)|$, ed anzi essa coincide con la precedente.

Risulta immediatamente dalla definizione del grado virtuale di una curva [3], che *l'ordine* x *della serie caratteristica uguaglia il grado virtuale di* C.

Invero, se n, N indicano i gradi di $|D|$, $|E|$, e i, j i numeri delle intersezioni di D con C e con E, siccome per ipotesi E sega C in $x + i$ punti, dalla relazione:

$$|E| = |C + D|,$$

si traggono le seguenti:

$$N = x + i + j, \qquad j = i + n,$$

che sommate membro a membro, dànno:

$$N = x + n + 2i,$$

la quale prova che x è il grado virtuale di C.

2. *Il valore del grado virtuale non basta sempre a decidere sull'esistenza della serie caratteristica.* Dal nº 1 si trae che una curva sulla quale esista la serie caratteristica, ha il grado ≥ 0; ma il viceversa non è vero, come a prima

(3) Cfr. per esempio, ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, Atti della R. Acc. di Torino, (1901); nº 12.

vista potrebbe credersi. Ed è facile, come ora vedremo, costruire curve di grado ≥ 0, sulle quali non esiste la serie caratteristica.

Sopra la superficie data F può sempre trovarsi una curva C, di genere > 0, sulla quale la serie caratteristica completa ha la dimensione ϱ minore del grado n di C.

Basta ad esempio considerare la curva generica di un sistema lineare di grado e genere > 0.

Orbene, togliendo dalla curva C $\varrho + 1$ punti, $a' a'' \cdots a^{\varrho+1}$, che non appartengano ad un gruppo caratteristico, si ha una curva del grado $n - \varrho - 1$ (≥ 0), priva di serie caratteristica. Di fatti possiamo costruire un sistema lineare $|E|$ contenente C (non come parte fissa) e inoltre così ampio che esistano delle curve E passanti pei punti $a' a'' \cdots$, le quali non contengano di necessità la C. Indicando con $|E_1|$ il sistema che si ottiene da $|E|$ con l'imposizione dei punti base $a' a'' \cdots$; con C_1 la curva che si ottiene da C togliendo gli stessi punti, e ponendo:

$$|D| = |E - C| ,$$

avremo pure:

$$|D| = |E_1 - C_1| .$$

Da ciò si trae che non può esistere la serie $|(E_1 C_1) - (DC_1)|$, perché nell'ipotesi contraria un gruppo di questa serie addizionato ai punti $a' a'' \cdots$, darebbe un gruppo della serie caratteristica di C passante per questi punti, il che è assurdo, dato il modo generico con cui essi furono scelti.

Nel fare l'osservazione precedente chi voglia evitare di considerare dei punti come componenti di una curva, potrà usare del solito procedimento di sostituire ad essi delle curve eccezionali, mediante una trasformazione birazionale che abbia su F i punti fondamentali $a' a'' \cdots a^{\varrho+1}$.

L'osservazione stessa può essere completata provando che *quando il grado n della curva C non è inferiore al genere π, si può affermare senz'altro che sulla C esiste la serie caratteristica.*

Difatti costruendo al solito i sistemi $|E|$, $|D|$ e chiamando con i il numero delle intersezioni di C con una D, l'ordine $n + i$ della serie $|EC|$ non sarà inferiore a $\pi + i$ e quindi la sua dimensione non sarà inferiore ad i; sicchè per un gruppo della serie $|DC|$, che è d'ordine i, passerà sempre qualche gruppo $|EC|$, ossia esisterà la serie residua $|(EC) - (DC)|$.

Se la C possiede dei punti multipli e se la disuguaglianza $n \geq \pi$ è soddisfatta tra i caratteri di C, allorché quei punti si riguardino come assegnati con la loro molteplicità effettiva, l'esistenza della serie caratteristica si potrà affermare anche quando quei punti si riguardino come virtualmente inesistenti. Ma si badi che in quest'ultimo caso la curva irriducibile C costituirà soltanto una *parte* di una curva del sistema lineare individuato prescindendo dai punti multipli. Tuttavia in base alla definizione del n° 1, avrà ancora senso parlare della serie caratteristica di C.

3. *La serie caratteristica in relazione alle curve canoniche della superficie.* Dopo aver definito la serie caratteristica anche sopra una *curva C isolata*, cioè non appartenente ad un sistema lineare infinito, ci possiamo domandare se questa serie ha con la serie segata su C dalle curve canoniche della superficie, la stessa relazione a cui soddisfa la serie caratteristica di un sistema lineare infinito [4]. E, come si prevede, la risposta è affermativa.

Ragioneremo per semplicità col linguaggio proiettivo, fissando l'attenzione sopra una superficie F, d'ordine m, dello spazio ordinario, dotata soltanto di linea doppia e punti tripli; e indicheremo con C una curva (isolata o no) sulla quale non sono assegnati punti base e i cui punti doppî eventuali (o singolarità superiori che hanno i loro equivalenti in punti doppî) cadono in punti semplici di F [5].

Potremo determinare un sistema $|E|$, segnato su F da superficie d'ordine abbastanza elevato k, il quale contenga C e lasci come residuo un sistema $|D| = |E - C|$.

Se Ψ è una superficie d'ordine k passante per C e segante ulteriormente la F lungo la curva $\overline{D}$ del sistema $|D|$, la jacobiana di F, Ψ e di una retta dello spazio, è una superficie di ordine $m + k - 2$, che passa per la linea doppia di F, pel gruppo $(\overline{D}C)$, per gli eventuali punti doppï di C, e sega ulteriormente quest'ultima curva in un gruppo jacobiano della serie formata dalle sezioni piane di C [6].

Dunque una superficie di ordine $m + k - 4$ aggiunta ad F, sega C, fuori della linea doppia, in un gruppo appartenente alla somma della serie canonica, con la serie $|DC|$ e con le coppie che cadono nei punti doppî di C. Considerando un'aggiunta di ordine $m + k - 4$ spezzata in una superficie d'ordine $m - 4$ aggiunta ad F ed in una superficie qualunque d'ordine k, e ricordando che per ipotesi la serie $|EC|$ contiene la serie $|DC|$, concludiamo che:

Anche sopra una curva isolata C, priva di punti base assegnati, la serie caratteristica, addizionata alla serie segata dalle curve canoniche, dà la serie canonica, aumentata delle coppie che cadono nei punti doppî di C.

S'intende che se la superficie F contiene delle curve eccezionali, nell'enunciato precedente esse si dovranno considerare come parti (fisse) delle curve canoniche, perché appartengono a tutte le aggiunte d'ordine $m - 4$.

Se sulla C vengono assegnati punti base, ci ridurremo al caso considerato, eliminando quei punti base con una trasformazione rispetto alla quale essi sieno fondamentali.

(4) Cfr. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, Memorie dei XL, (3) *10* (1896); n° 38.

(5) Giova di non escludere la presenza di punti doppî, perchè quando la C appartiene ad un sistema algebrico non lineare, essa può avere dei punti multipli variabili.

(6) Cfr. per esempio la nota a pie' di pagina al n° 8 del mio lavoro: *Su alcune questioni di postulazione*, Rendiconti di Palermo, (1903) [cfr. queste « Opere », p. 140; N.d.R.].

4. *Serie caratteristica di un sistema algebrico.* Quando tra una superficie algebrica F ed una varietà algebrica V, ad r dimensioni, si considera una corrispondenza algebrica — cioè una varietà subordinata a quella della coppie di punti di F e V — tale che ad un punto di V corrisponda su F una curva e che ogni tal curva provenga da un sol punto di V, il sistema di tutte le curve di F corrispondenti ai punti di V, dicesi un *sistema algebrico di curve, di dimensione r.* — I punti di V si possono assumere come immagini degli elementi (curve) di questo sistema.

L'interesse nello studio dei *sistemi continui di curve*, si concentra sui sistemi algebrici. Ciò dipende dal fatto che le curve di un dato ordine appartenenti ad una superficie F, costituiscono una varietà algebrica la quale si scinde in un numero finito di parti algebriche irriducibili (non necessariamente della stessa dimensione), e quindi ogni sistema continuo di curve, è contenuto in un sistema algebrico di curve dello stesso ordine.

Noi considereremo di solito *sistemi algebrici irriducibili*, cioè rappresentabili con varietà irriducibili, e quindi, salvo avviso contrario, sottintenderemo la irriducibilità.

Dimostreremo anzitutto che:

Allorquando una curva irriducibile C appartiene totalmente ad un sistema algebrico (almeno ∞^1), esiste su essa la serie caratteristica, ed ogni gruppo comune a C e ad una curva del sistema infinitamente vicina, è un gruppo di questa serie (7).

Dicasi C_0 una curva del sistema algebrico, infinitamente vicina a C, e Σ un sistema (algebrico) ∞^1 subordinato al sistema dato e contenente le due curve C e C_0. Nella varietà i cui *punti* rappresentano le curve del sistema dato, un sistema ∞^1 contenente C e C_0, è rappresentato da una *curva*, che in un dato punto della varietà (nell'immagine di C) ha una data tangente.

Consideriamo entro all'ente algebrico Σ una serie lineare di dimensione 2 (o maggiore) priva di elementi fissi. Le curve spezzate che costituiscono i gruppi di questa serie, formano un sistema ∞^2 che, essendo razionale, sarà contenuto totalmente in un sistema lineare $|E|$ (8), e per l'ipotesi che la serie sia priva di elementi fissi, non tutte le E conterranno come parte C.

I gruppi della serie lineare ∞^2 contenenti C, ove se ne tolga la C medesima, dànno una serie lineare ∞^1, i cui gruppi appartengono totalmente ad un sistema lineare:

$$|D| = |E - C|.$$

Fissiamo entro alla serie ∞^2 una serie lineare $\infty^1 g$, diversa da quella che ha come elemento fisso C, e consideriamo il gruppo della g di cui fa parte una

(7) L'interpretazione aritmetica di questo teorema, dà luogo alla proposizione dimostrata dal sig. DE FRANCHIS nella Nota: *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve*, Rendiconti dei Lincei, (1903); n° 5.

(8) Cfr. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti di Palermo, (1896); n° 4.

curva C_1 di Σ, diversa da C. Questo gruppo costituisce una curva E, spezzata nella C_1 e in altre curve di Σ il cui insieme denotiamo con D_1. Facendo avvicinare indefinitamente la C_1 alla C, quel gruppo $C_1 + D_1$ tenderà al gruppo della g passante per C, e quindi la curva composta D_1 avrà per limite una curva D. D'altronde al variare di C_1 il gruppo dei punti segato su C dalla $C_1 + D_1$ varia entro alla serie $|EC|$: dunque il gruppo segato su C dalla curva C_0 infinitamente vicina, e dalla D che si ottiene come limite della D_1, quando C_1 si avvicina a C, appartiene alla serie $|EC|$; ossia il gruppo segato su C da C_0 è un gruppo della serie:

$$|(EC) - (DC)|\,, \qquad \text{c. d. d.}$$

Si noti che il ragionamento esposto vale anche se il sistema algebrico a cui appartiene C è un fascio (razionale o irrazionale). Però nel caso in cui il fascio è privo di punti base, il che avviene sempre quando esso è irrazionale, il ragionamento prova che la serie caratteristica esistente su C, è d'ordine zero (n° 1).

Per quanto questo caso si possa ritener racchiuso nell'enunciato generale, tuttavia sarà utile che lo enunciamo separatamente:

Allorquando una curva irriducibile C appartiene ad un fascio (razionale o irrazionale) senza punti base, su essa esiste la serie caratteristica ed è di ordine zero.

Possiamo ora porre il concetto di *serie lineare caratteristica di un sistema algebrico* ∞^r. Con tale denominazione indicheremo la serie lineare di dimensione $r - 1$, segata sopra una curva generica C del sistema dalle ∞^{r-1} curve che sono infinitamente vicine ad essa.

La linearità di questa serie risulta *a priori*, ove si osservi che per $r - 1$ punti generici di C passa un sol gruppo di essa e che inoltre la serie stessa è razionale, perché i suoi elementi si rappresentano biunivocamente con le tangenti in un punto generico alla varietà algebrica immagine del sistema ∞^r.

Ma il teorema dimostrato in questo numero, che stabilisce l'identità di questa serie lineare, con quella già definita al n° 1, ci permetterà di trarre facilmente varie conseguenze notevoli dalla considerazione della serie stessa.

5. *Dimensione della serie caratteristica sopra una curva isolata.* Secondo un notevole teorema di Castelnuovo, la dimensione della serie caratteristica completa esistente sopra una curva di un sistema lineare irriducibile completo di dimensione $r \geq 1$, non supera $r + P_g - P_a - 1$, ove P_g, P_a sono i generi, geometrico e aritmetico, della superficie F a cui appartiene il sistema [9].

(9) Cfr. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) 25 (1897); n° 29. Vedi anche la mia Nota, *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rendiconti dei Lincei, (1903) [queste «Opere», XVI, p. 224; N.d.R.], ove trovasi una dimostrazione più semplice del teorema di Castelnuovo.

Orbene, questo teorema è applicabile anche al caso di una curva isolata, priva di punti multipli, e dotata di serie caratteristica.

Ciò si stabilisce (tenendo conto della definizione data al n° 1) mediante lo stesso ragionamento che serve al prof. Castelnuovo per estendere il suo teorema alle reti e ai fasci (10).

Per comodità del lettore esporrò questo ragionamento con speciale riguardo al caso di una curva isolata (priva di punti multipli).

Immaginando la curva C tracciata sopra la superficie F, priva di singolarità in una spazio S_r, consideriamo su F il sistema lineare $|E|$ segato dalle forme di ordine così elevato, che la serie da esse segnata su C sia completa (ciò è sempre possibile per l'ipotesi che C non abbia punti multipli), e che inoltre vi sieno delle forme contenenti C.

Poniamo al solito:

$$|D| = |E - C| .$$

Dicansi r_1 , r_2 le rispettive dimensioni dei sistemi $|E|$, $|D|$, completati, ove occorra, ϱ la dimensione della serie caratteristica completa della C ed ϵ il numero delle condizioni indipendenti, che impongono alle E i punti di un gruppo (CD).

Le E pel gruppo fissato (CD) segheranno ulteriormente su C una serie completa $|(EC) - (DC)|$, ossia la serie caratteristica completa di C. D'altronde esse costituiscono un sistema di dimensione $r_1 - \varepsilon$, ed in questo sistema vi sono ∞^{r_2} curve che contengono C, dunque:

$$\varrho = r_1 - r_2 - \varepsilon - 1 . \tag{1}$$

Analogamente le E pel gruppo (CD) segano ulteriormente sulla D fissata, una serie di dimensione $r_1 - \varepsilon - 1$ che contiene la serie caratteristica della D, e siccome questa serie, completata, ha la dimensione non superiore ad $r_2 + P_g - P_a - 1$, avremo:

$$r_1 - \varepsilon - 1 \leq r_2 + P_g - P_a - 1 , \tag{2}$$

che confrontata con la (1), dà:

$$\varrho \leq P_g - P_a - 1 . \tag{3}$$

Quando la serie caratteristica di C ha l'ordine zero, ossia quando la serie $|EC|$ coincide con la serie completa $|DC|$, la dimensione della serie $|EC|$ sarà precisamente uguale ad ε, onde la (1) sarà sostituita dalla relazione:

$$\varepsilon = r_1 - r_2 - 1 ; \tag{1}'$$

la (2) continuerà a sussistere e quindi se ne dedurrà:

$$0 \leq P_g - P_a - 1 . \tag{3}'$$

(10) *Alcune proprietà fondamentali...*, n° 30.

Sicché, volendo far rientrare quest'ultimo caso nel caso generale, basterà *riguardare come nulla la dimensione d'una serie caratteristica d'ordine zero.*

Le (3), (3)′ si possono allora enunciare nel modo seguente:

Se sopra una superficie di generi P_g, P_a *esiste una curva isolata, senza punti multipli, con una serie caratteristica completa di dimensione* ϱ, *la irregolarità* $P_g - P_a$ *della superficie è almeno uguale a* $\varrho + 1$.

La stessa cosa può dirsi anche *se la curva è dotata di punti multipli,* purché questi si riguardino come assegnati con molteplicità virtuale uguale all'effettiva.

Ciò si stabilisce immediatamente, facendo sparire quei punti multipli con una trasformazione che li muti in curve eccezionali.

Viceversa è facile provare che *sopra una superficie irregolare di generi* P_g, P_a, *esistono sempre curve isolate dotate di una serie caratteristica completa di dimensione* $P_g - P_a - 1$.

Basta infatti considerare sulla superficie un sistema regolare di dimensione r, e quindi dotato di una serie caratteristica, che completata avrà la dimensione $r + P_g - P_a - 1$, e dalla curva C di questo sistema che passa per r punti generici della superficie, togliere questi punti. La curva residua sarà isolata e con la serie caratteristica di dimensione $P_g - P_a - 1$ (cfr. col n° 2).

Volendo evitare di sottrarre dei punti, si opererà una trasformazione che li muti in curve eccezionali e si considererà la trasformata della C, astraendo da queste curve eccezionali.

Dunque possiamo dire che *l'esistenza sopra una superficie di curve isolate con serie caratteristica* (*di ordine* ≥ 0), *è condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie sia irregolare.*

Una prima conseguenza immediata di ciò è il teorema di Castelnuovo che *ogni superficie con un fascio irrazionale di curve, è irregolare* [11]. Invero se sulla superficie esiste un fascio irrazionale, ogni curva di un tal fascio è evidentemente isolata, e inoltre su essa esiste la serie caratteristica ed è d'ordine zero (vedere il n° 4).

Un'altra conseguenza è la seguente:

Sopra una superficie regolare una curva priva di punti mutipli, dotata di una serie caratteristica completa di dimensione ϱ, *appartiene totalmente ad un sistema lineare completo di dimensione* $\varrho + 1$.

Invero se la C possiede una serie caratteristica completa di dimensione ϱ, essa non può essere isolata, perché altrimenti la superficie sarebbe irregolare. Dunque il sistema $|C|$ è certamente infinito. Ma allora, ricordando che sopra una superficie regolare ogni sistema lineare completo ha la serie caratteristica completa, si deduce che la dimensione di $|C|$ uguaglia $\varrho + 1$.

(11) Cfr. CASTELNUOVO, *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica,* Memorie dei XL, (3) *10* (1896); n° 10.

6. *Sistemi algebrici completi. Relazione tra la dimensione di un sistema algebrico completo e quella del sistema lineare completo individuato da una sua curva generica.* Un sistema algebrico, al pari di un sistema lineare, può dirsi *completo* quando non è contenuto in un sistema più ampio (irriducibile) di curve dello stesso ordine.

È ben chiaro che ampliando successivamente un sistema algebrico, si deve giungere almeno ad un sistema completo.

Anzi si può osservare subito che la curva generica C di un sistema algebrico completo Σ, non può appartenere ad un sistema algebrico che non stia tutto in Σ, perché se C appartenesse a più sistemi irriducibili $\Sigma_1 \Sigma_2 \cdots$, diversi da Σ, variando C quei sistemi descriverebbero uno o più sistemi irriducibili contenenti Σ, contro il supposto che questo sia completo.

In particolare si vede che un sistema algebrico completo, contiene il sistema lineare completo individuato da una sua curva generica.

Considerando la serie caratteristica di un sistema algebrico di dimensione R, la cui curva generica appartenga ad un sistema lineare completo di dimensione $r \geq 0$, questa serie caratteristica sarà contenuta nella serie caratteristica completa, che è di dimensione non superiore ad $r - 1 + P_g - P_a$ (ved. il n° 5); dunque avremo:

$$R - 1 \leq r - 1 + P_g - P_a, \qquad \text{ossia:} \quad R \leq r + P_g - P_a.$$

Ciò vale indipendentemente dalla completezza del sistema algebrico considerato, ma per enunciare la disuguaglianza sotto la forma più espressiva, giova considerare il caso di un sistema completo, e dire che:

La dimensione di un sistema algebrico completo non può superare la dimensione del sistema lineare completo individuato da una sua curva generica, aumentata della irregolarità della superficie.

Veramente l'uso della serie caratteristica per stabilire la disuguaglianza precedente, richiede che la curva generica del sistema algebrico sia irriducibile e priva di punti multipli fuori degli eventuali punti base del sistema (cfr. col n° 5); ma la cosa si estende anche ai sistemi algebrici (irriducibili) di curve riducibili e con punti multipli variabili.

Invero dicasi Σ un sistema algebrico ∞^R irriducibile e completo, costituito da curve algebriche *qualunque*, e supponiamo che la sua curva generica C individui un sistema lineare completo ∞^r ($r \geq 0$).

Si assuma come modello proiettivo dell'ente ∞^2 una superficie F, priva di singolarità in un iperspazio. Considerando le forme di ordine abbastanza alto, si può esigere che ve ne sieno di quelle contenenti una C generica, e che inoltre il sistema lineare residuo $|D|$ sia irriducibile e privo (effettivamente) di punti base, e quindi che una curva generica D sia irriducibile e senza punti multipli.

Poiché il sistema $|D|$ costruito a partire da una C generica, è distinto dal sistema costruito a partire da una curva di Σ diversa dalle ∞^r che sono equivalenti a C, variando C entro Σ, il sistema $|D|$ descriverà un sistema

algebrico Σ' di dimensione $R + r' - r$, ove r' è la dimensione di $|D|$. E si noti che anche Σ' sarà irriducibile (come varietà), perché riguardandone come elementi i sistemi $|D|$, esso può riferirsi birazionalmente a Σ, di cui si riguardino come elementi i sistemi $\infty^r |C|$.

Applicando a Σ' la proposizione già dimostrata pei sistemi di curve irriducibili e senza punti multipli, avremo allora:

$$R + r' - r \leq r' + P_g - P_a, \qquad \text{donde:} \quad R \leq r + P_a - P_g, \qquad \text{c.d.d.}$$

Una prima conseguenza del teorema dimostrato, ove si tenga presente che un sistema algebrico completo contiene il sistema lineare individuato da una sua curva generica, è il teorema di Enriques [12]: *Sopra una superficie regolare ogni sistema algebrico di curve, è contenuto totalmente in un sistema lineare.* E difatti se $P_g = P_a$, R non potrà essere maggiore (né inferiore) di r, e quindi il sistema algebrico completo Σ coinciderà col sistema lineare completo individuato da una sua curva.

Giova pure di rilevare quest'altra conseguenza, che determina maggiormente il teorema di Castelnuovo, già incontrato al n° 5:

Ogni superficie con un fascio irrazionale di genere p, ha l'irregolarità non inferiore a p. Invero, dal momento che il sistema lineare completo individuato da un gruppo di curve del fascio, è formato da tutti i gruppi della serie completa a cui appartiene quel gruppo, la curva *generica* del sistema ∞^p costituito da tutti i possibili gruppi di p curve del fascio, sarà isolata; e quindi applicando la disuguaglianza sopra stabilita, al sistema ∞^p ($R = p$, $r = 0$), verrà:

$$p \leq P_g - P_a.$$

Si osservi che vi sono effettivamente dei casi in cui è $p = P_g - P_a$ e $p < P_g - P_a$. Un esempio del primo caso è fornito dalle rigate di genere p ($P_g = 0$ $P_a = -p$); ed un esempio del secondo caso dalla superficie con due fasci unisecantisi di generi p, p' ($P_g - P_a = p + p'$) [13].

7. *Limite inferiore per l'irregolarità di una superficie che possiede p integrali finiti di differenziali totali, a $2p$ periodi.* Un'altra applicazione notevole della disuguaglianza stabilita al numero precedente, può farsi determinando un limite inferiore per l'irregolarità di una superficie F che possegga p integrali finiti di Picard, a $2p$ periodi.

Il prof. Enriques ha dimostrato che sopra una tal superficie esiste sempre un sistema continuo di curve non appartenente totalmente ad un sistema

(12) *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie regolare*, Rendiconti di Palermo, (1899).

(13) Cfr. MARONI, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, (1903) e DE FRANCHIS, *Sulla varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, Rendiconti di Palermo, (1903); n° 5.

lineare [14], sicché risulta senz'altro che la superficie non è regolare. Prima di occuparmi della sua irregolarità, non mi sembra inutile presentare sotto una forma più semplice la dimostrazione di questo teorema.

Questa forma del ragionamento si presenta naturale, quando si pensi che sopra una curva di genere $p > 0$, ossia dotata di p integrali abeliani di 1ª specie $u_1, \cdots, u_p$, un sistema algebrico di gruppi di punti, non contenuto in una serie lineare, si ottiene subito, in base alla risoluzione del problema di Jacobi, come l'insieme di tutti i gruppi di punti $X_1, X_2, \cdots, X_p$, che soddisfano alle equazioni:

$$u_i(X_1) + \cdots + u_i(X_p) \equiv c_i \qquad (i = 1, \cdots, p),$$

allorché si fanno variare i parametri c_i.

Ciò premesso, sieno:

$$I_i = \int A_i\,dx + B_i\,dy \qquad (i = 1, \cdots, p)$$

p integrali di 1ª specie, linearmente indipendenti, a $2p$ periodi, appartenenti alla superficie F di equazione:

$$F(x, y, z) = 0,$$

e, fissato un punto X_0 di F come origine delle integrazioni, si scrivano le equazioni:

$$(1) \qquad I_i(X_1) + \cdots + I_i(X_p) \equiv c_i \qquad (i = 1, \cdots, p),$$

ove $X_1, X_2, \cdots, X_p$ son p punti di F.

Fissiamo su F un fascio $|C|$ di curve irriducibili, che per semplicità può supporsi dotato di un punto base in X_0. Riguardando $I_1, \cdots, I_p$ come funzioni di un punto di una curva C di quel fascio, avremo su questa p integrali abeliani indipendenti con $2p$ periodi distinti.

Se il genere di C fosse proprio p, le equazioni (1), considerate sopra C, sarebbero soddisfatte da un solo gruppo di p punti; ma in ogni caso un teorema di Picard [15] ci permette di affermare che i gruppi $X_1, \cdots, X_p$ di C soddisfacenti alle (1), sono in numero finito m, in guisa che al variare delle costanti c_i questi aggruppamenti descrivono un'involuzione di grado m sulla varietà dei gruppi di p punti della C.

(14) *Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce*, Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, (2) *3* (1901).

(15) *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes...*, Bulletin de la Société Math. de France, *11* (1883); n° 1. Di questo teorema profitta anche il prof. Enriques per la costruzione delle funzioni abeliane corrispondenti ai periodi degli integrali $I_1, \cdots, I_p$. Cfr. pure WIRTINGER, *Ueber einige Probleme in der Theorie der Abel'schen Functionen*, Acta Matematica, *26* (1902); § 3.

Sicché per valori generici delle c_i sopra ogni curva del fascio $|C|$ si determinano razionalmente m gruppi di p punti. Il luogo di questi gruppi di mp punti è dunque una curva algebrica Γ.

Al variare delle c_i otteniamo così su F un sistema algebrico Σ di dimensione p, le cui curve Γ sono algebriche e segano sopra ogni C un'involuzione di gruppi di p punti.

Si osservi che il ragionamento assume una forma semplicissima nel caso ellittico $p = 1$, giacché allora si ottiene subito sulla superficie un fascio ellittico di curve algebriche, soddisfacenti all'equazione:

$$I_1 = \text{cost.}$$

Ritornando al caso generale, osserviamo anzitutto che se si riguardano i punti base di $|C|$ come assegnati con la moltiplicità che hanno effettivamente per le curve di Σ, *nel sistema* stesso *non esistono curve equivalenti ad una curva generica* Γ. Invero sopra una C due generiche Γ segano, fuori dei punti base, due gruppi di mp punti che non sono equivalenti, perché le somme dei valori di un integrale I_i nei punti di quei due gruppi non sono uguali, come richiederebbe il teorema di Abel.

Ne deriva che se una Γ generica individua un sistema lineare completo ∞^r, variando la Γ entro Σ quel sistema lineare descriverà un sistema algebrico di dimensione $r + p$, e quindi applicando la disuguaglianza del numero precedente, verrà:

$$r + p \leq r + P_g - P_a, \qquad \text{ossia:} \quad p \leq P_g - P_a.$$

Si conchiude pertanto che:

Una superficie algebrica con p integrali finiti di Picard a $2p$ periodi, ha l'irregolarità non inferiore a p.

Termino additando una questione importantissima che qua si presenta.

Si potrà sostituire la precedente disuguaglianza con una uguaglianza, quando si supponga che la varietà lineare considerata di integrali di differenziali totali di 1ª specie, sia la più ampia possibile?

Mi spiego con un esempio. La varietà di tutti gl'integrali di Picard distesi sopra la superficie delle coppie di punti di due curve distinte C, C' di generi p, p', contiene due varietà lineari distinte di p, p' integrali, rispettivamente con $2p$ e $2p'$ periodi, che provengono ciascuna dagli integrali abeliani di 1ª specie di C, C'; e l'irregolarità della superficie è uguale alla somma $p + p'$ delle dimensioni di quelle varietà, cioè è uguale alla dimensione della varietà lineare più ampia formata dagli integrali di Picard distesi sulla superficie [16].

(16) PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier–Villars, t. I, p. 129).

XIX.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CHE POSSEGGONO INTEGRALI DI PICARD DELLA SECONDA SPECIE

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 13_2, fasc. 5 (1904), pp. 253–258 (*).

1. Sia

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di una superficie algebrica irriducibile d'ordine m, a sezioni piane di genere p, dotata di singolarità ordinarie (1), ed

$$Adx + Fdy \tag{2}$$

un differenziale totale esatto, appartenente al campo di razionalità definito dalla (1); vale a dire siano A, B due funzioni razionali di x, y, z, tali che la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

risulti soddisfatta allorquando z si riguardi come funzione algebrica di x, y, definita mediante la (1).

Dicesi che in un punto (x_0, y_0, z_0) di F l'*integrale di Picard*

$$J = \int A\,dx + B\,dy, \tag{3}$$

presenta una *singolarità polare* o un *polo*, quando scegliendo una curva qualunque di F, uscente da $(x_0\, y_0\, z_0)$ e rappresentabile, nell'intorno di questo punto, colle formole

$$x = x_0 + x(t), \qquad y = y_0 + y(t), \qquad z = z_0 + z(t), \tag{4}$$

ove $x(t), y(t), z(t)$ sono funzioni analitiche olomorfe nell'intorno di $t = 0$, e che si annullano in $t = 0$, l'integrale

$$\int f(t)\,dt,$$

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre e pervenuta all'Accademia prima del 4 settembre 1904.

(1) Cioè una linea doppia, con un numero finito di punti tripli. Quest'ipotesi, com'è noto, non è restrittiva nello studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali.

che si ottiene come trasformato dell'integrale (3), mediante le formole (4), presenta in $t = 0$ una singolarità polare [2].

L'integrale (3) dicesi *di seconda specie* quando su tutta la superficie F presenta al più singolarità polari. In particolare se esso conservasi finito in ogni punto di F, dicesi *di prima specie*.

Tra gl'integrali di seconda specie vanno noverate le funzioni razionali; anzi i soli integrali di seconda specie appartenenti ad una superficie dello spazio ordinario, priva di punti multipli, sono le sue funzioni razionali, e gl'integrali di prima specie riduconsi a costanti [3].

La questione fondamentale che si affaccia intorno agli integrali di Picard della seconda specie, dalla quale dipende la soluzione di molti importanti problemi nella teoria delle superficie algebriche, è di assegnare le condizioni geometriche (traducibili in condizioni algebriche) necessarie e sufficienti affinché la superficie F possegga integrali *trascendenti* di seconda specie (in particolare di prima).

A tale questione risponde parzialmente, assegnando una condizione necessaria, il teorema seguente:

Una superficie algebrica che possegga integrali di Picard trascendenti, della seconda specie (in particolare di prima), è irregolare.

Nella presente Nota mi propongo di esporre il concetto che mi ha guidato nella dimostrazione di questo teorema, riservandomi di pubblicarne i particolari in un altro lavoro più ampio [cfr. la successiva Memoria XX, p. 252; N.d.R.] [4].

Ma prima di tutto, per rendere intelligibile l'enunciato del teorema anche a quei lettori che non hanno famigliare la moderna teoria delle superficie algebriche ed il relativo linguaggio, dirò brevemente cosa s'intende per *superficie regolare* ed *irregolare*.

Considerando tutte le superficie di ordine $m - 3$ *aggiunte* alla (1) (cioè passanti per la sua linea doppia), due casi possono presentarsi: o esse segano sopra un piano qualunque, non tangente ad F, tutte quante le curve d'ordine $m - 3$ aggiunte alla sezione di F con quel piano, oppure ne segano soltanto una parte. Nel primo caso la F dicesi *regolare*, nel secondo *irregolare* [5].

Così per esempio sono regolari le superficie razionali, le superficie dello spazio ordinario prive di punti multipli, ecc., ecc.; mentre sono irregolari

(2) Cfr. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, p. 145 (Paris, Gauthier-Villars, 1897).

(3) *Ibidem*, pp. 91 e 119.

(4) Le superficie con integrali di Picard risulterebbero caratterizzate in modo completo, ove si stabilisse la reciproca del teorema enunciato; ed io non mancherò di tentare la dimostrazione [cfr. queste «Opere», p. 280, nota alla fine della Memoria XX; N.d.R.].

(5) La definizione ordinaria equivale a quella che noi abbiamo qui preferito, come più espressiva e più breve (Ved. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) *25* (1897), n. 28).

le rigate irrazionali, le superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere > 0, ecc., ecc.

Ciò premesso, passo ad esporre nelle sue linee fondamentali, la dimostrazione del teorema enunciato.

Un integrale (3) di seconda specie, appartenente ad F, riguardato come funzione del punto scorrente sopra una curva algebrica irriducibile D della superficie, dà luogo ivi ad un integrale abeliano di seconda specie. Se la D è variabile in un fascio, l'integrale J stacca su essa razionalmente (rispetto al parametro che individua la posizione della curva entro al fascio) un gruppo di un *numero finito* di poli, i quali, al variare della D, descrivono una o più curve algebriche irriducibili, che si dicono le *curve polari* dell'integrale J [6].

In relazione a queste curve polari io considero gli *ordini d'infinito* e le *funzioni razionali residue* (dei varî ranghi), le quali hanno un ufficio analogo a quello dei coefficienti delle potenze negative dell'argomento, negli sviluppi di Laurent, che caratterizzano un integrale abeliano di seconda specie, intorno ai suoi poli.

Supposto che gli assi di riferimento abbiano posizione generica rispetto ad F, e supposto inoltre che tra le sezioni di F coi piani $y = \text{cost.}$ non si trovi nessuna curva polare di J (il che può sempre ottenersi, operando, nel caso, una conveniente trasformazione omografica), si dirà che lungo la curva irriducibile C *l'integrale* J *diviene infinito d'ordine* s, allorquando l'integrale abeliano $J(x, \bar{y}, z)$ relativo alla sezione di F col piano generico $y = \bar{y}$, ha per poli d'ordine s i punti d'intersezione di questo piano con C.

Nell'intorno di ciascun polo $(x_0, \bar{y}, z_0)$ l'integrale $J(x, \bar{y}, z)$ riguardato come funzione di x, dà luogo ad uno sviluppo ben determinato, che comincerà con un termine in $\frac{1}{(x - x_0)^s}$. Al variare del punto $(x_0, \bar{y}, z_0)$ lungo la curva C, il coefficiente di $\frac{1}{(x - x_0)^h}$ $(h = s, s-1, \cdots, 1)$ risulta funzione algebrica uniforme, cioè funzione razionale del punto stesso. È questa funzione ch'io chiamo la *funzione razionale residua di rango* h, individuata da J sopra la curva polare C.

Nel mio ragionamento occorre in modo speciale la considerazione della funzione residua di rango s, della quale trovo il gruppo dei poli ed il gruppo degli zeri. Profittando di questo risultato (che trovasi enunciato in modo esplicito più sotto, nel caso particolare $s = 1$), e della costruzione degli integrali di seconda specie appartenenti ad una superficie, dovuta al sig. Picard [7], riesco a stabilire che *tutti gl'integrali di Picard della seconda specie, appartenenti ad una superficie* F, *si possono ridurre, per sottrazione di funzioni razionali, ad integrali che divengano infiniti del primo ordine soltanto lungo una conveniente curva irriducibile* E, *priva di punti multipli, e appartenente ad un sistema lineare infinito.*

(6) PICARD et SIMART, p. 147.
(7) PICARD et SIMART, pp. 93 e sgg.

Non mi trattengo sulla dimostrazione di questo lemma, perché anche in essa giuoca in modo essenziale il concetto che ispira la dimostrazione del teorema fondamentale, di cui vado ora ad occuparmi, supponendo già effettuata la riduzione suddetta.

Il gruppo dei poli della funzione residua $\varphi(x, y, z)$, di rango 1, individuata sopra E da un integrale di seconda specie J, che divenga infinito del primo ordine soltanto lungo questa curva, è costituito dai punti di contatto delle tangenti di E parallele al piano xz, e dai punti all'infinito della curva stessa; ed il gruppo degli zeri è costituito dai punti di E in ciascuno dei quali il piano tangente ad F è parallelo all'asse z, e dai punti di E ove l'integrale abeliano $J(x, \bar{y}, z)$ (con $\bar{y}$ parametro variabile) è regolare.

Questi ultimi punti costituiscono un gruppo G della serie caratteristica completa esistente sulla E, cioè della serie lineare completa che contiene i gruppi segati su E dalle curve del sistema completo $|E|$. Diremo perciò che G è il *gruppo caratteristico individuato su E dall'integrale J*.

Mutando J nella totalità degli integrali che divengono infiniti del primo ordine soltanto lungo E, restano fissi tutti i poli della funzione residua φ, e degli zeri variano soltanto quelli che costituiscono il gruppo G. Ciò accade in particolare anche quando J si riduce ad una funzione razionale. In tal caso G non è altro che il gruppo base del fascio $J = \text{cost}$.

Ciò posto, se la superficie F possiede integrali trascendenti di seconda specie, si può sempre supporre che l'integrale J non si riduca alla prima specie per sottrazione di una funzione razionale.

Basterà ad esempio scegliere J per modo che i suoi periodi distinti sieno tutti reali (o tutti immaginari puri): ciò è sempre possibile, perché i periodi di un integrale di seconda specie appartenente ad F, si possono assegnare ad arbitrio [8]. Fatta questa scelta, non potrà darsi che $J - R$, ove R è una funzione razionale qualunque, riducasi ad un integrale di prima specie, perché altrimenti sopra una sezione piana della superficie, $J - R$ darebbe luogo ad un integrale abeliano di prima specie, i cui $2p$ periodi, essendo determinati in funzione dei periodi distinti dell'integrale J mediante relazioni lineari omogenee *a coefficienti interi* [9], risulterebbero tutti reali (o tutti immaginarî puri): il che è notoriamente assurdo [10].

Proverò ora che *il gruppo caratteristico G individuato su E dall'integrale J, non appartiene alla serie segata su E dalle curve del sistema completo* $|E|$.

Invero nell'ipotesi contraria che il gruppo G sia segato dalla curva $\overline{E}$ di $|E|$, la funzione razionale $R(x, y, z)$ (determinata a meno d'un fattore costante), che ha per curva di livello zero la $\overline{E}$ e per curva d'infinito la E, individuerebbe sulla curva polare una funzione residua φ', avente gli stessi

(8) *Ibidem*, pp. 100 e sgg.

(9) PICARD et SIMART, p. 100.

(10) Ved. ad esempio APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1895), § 118.

poli e gli stessi zeri di φ. Sarebbe dunque:

$$\varphi = \lambda\varphi'$$

con λ costante, e quindi l'integrale $J - \lambda R$, resterebbe finito in ogni punto di E; cioè sarebbe di prima specie su tutta la superficie, contro il supposto.

Ne deriva che la serie caratteristica del sistema completo $|E|$ non è completa, e quindi [11] che la superficie F è irregolare.

2. Giovandomi sempre del lemma enunciato al numero precedente; nonché della considerazione delle funzioni residue, determino maggiormente il teorema fondamentale, nel mondo che segue:

Data una superficie algebrica F di generi, artmetico e geometrico, P_a, P_g, l'irregolarità $P_g - P_a$ della superficie, è almeno uguale all'eccesso del numero degli integrali di seconda specie algebricamente distinti sul numero degli integrali di prima specie linearmente indipendenti [12].

3. Terminerò questo riassunto osservando che il teorema fondamentale da me dimostrato, può anche enunciarsi come una proprietà di *Analysis situs*, relativa alla varietà reale chiusa, a quattro dimensioni, i cui punti rappresentano le soluzioni complesse dell'equazione d'una superficie regolare.

Basta a tal uopo ricordare che se una superficie algebrica F possiede integrali di Picard trascendenti, della seconda specie, sulla varietà riemanniana V, immagine reale di F, esistono dei *cicli lineari* (cammini chiusi) che non si possono ridurre a punti per deformazione continua; cioè l'ordine di connessione lineare della V (o della F) è maggior d'uno [13].

Si può dunque dire che:

Per una superficie regolare l'ordine di connessione lineare è uguale ad 1; oppure, in altri termini:

Ogni cammino chiuso reale tracciato sulla varietà riemanniana a quattro dimensioni, immagine di una superficie regolare, si può ridurre ad un punto per deformazione continua operata entro alla varietà stessa [14].

Questo teorema va confrontato col seguente, relativo alle curve razionali:

« Sopra la superficie di Riemann, immagine d'una curva razionale, ogni cammino chiuso può ridursi ad un punto per deformazione continua ».

(11) CASTELNUOVO, *loc. cit.*, n. 27; ved. pure la mia Nota, *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rendiconti dei Lincei, (5) *12* (1903), 2° sem. fasc. 7 [queste « Opere », XVI, p. 224; N.d.R.].

(12) Ricordo che più integrali di Picard della seconda (o della prima) specie diconsi *algebricamente distinti* (*o linearmente indipendenti*), quando una loro combinazione lineare a coefficienti costanti, non tutti nulli, non riducesi mai ad una funzione razionale (o ad una costante).

(13) PICARD et SIMART, p. 150.

(14) In particolare si ha il teorema di Picard già citato (PICARD et SIMART, pp. 91 e 119), relativo alle superficie prive di punti multipli; e l'estensione di questo teorema dovuta a BERRY (Acta math., *27* (1903), p. 157).

XX.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CHE POSSEGGONO INTEGRALI DI PICARD DELLA 2ª SPECIE (*).

Mathematische Annalen, *61* (1905), pp. 20–49.

I.

Le superficie algebriche, considerate dal punto di vista fecondo delle trasformazioni birazionali, si distribuiscono in due grandi famiglie, secondo che i *generi*, *geometrico* e *aritmetico*, sono uguali tra loro, oppure il primo è maggiore del secondo. Quelle della prima famiglia diconsi *regolari*, e quelle della seconda *irregolari*.

Senza riandare alla definizione dei generi, si può presentare questa suddivisione sotto una forma alquanto diversa, ricordando un criterio di regolarità, dovuto al sig. Castelnuovo (1).

Una superficie algebrica irriducibile, d'ordine m,

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

dotata di singolarità ordinarie, cioè di una linea doppia con un numero finito di punti tripli (2), è regolare o irregolare secondo che le superficie d'ordine $m - 3$, *aggiunte* ad F (cioè passanti per la sua linea doppia), segano o no sopra un piano qualunque dello spazio, non tangente ad F, tutte quante le curve d'ordine $m - 3$, aggiunte alla sezione di F con questo piano.

Così ad esempio son regolari le superficie dello spazio ordinario prive di punti multipli, le superficie razionali, le superficie che hanno per linea doppia la completa intersezione di due altre (3), ecc; mentre sono irregolari le rigate irrazionali, le superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere > 0; ecc, ecc.

(*) Un estratto dei risultati principali contenuti in questa Memoria, è già stato pubblicato sotto lo stesso titolo, tra i Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5) *13* (1904) [cfr. la precedente Nota XIX, p. 247; N.d.R.].

(1) Ved. la Memoria, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) *25* (1897), n° 28.

(2) Nella geometria delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, tale ipotesi non è restrittiva, perché, com'è ben noto, ogni superficie algebrica si può trasformare birazionalmente in un'altra dotata di sole singolarità ordinarie (Noether, Del Pezzo, C. Segre, B. Levi).

(3) Notiamo incidentalmente che quest'affermazione segue, in base al criterio di regolarità di Castelnuovo, dal teorema dimostrato al n° 14 della mia Nota, *Su alcune questioni di postulazione*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, *25* (1903).

Lo studio di alcune particolari classi di superficie irregolari, ha fatto presentire da tempo un legame intimo tra l'irregolarità di una superficie, e l'esistenza su questa di sistemi continui di curve (algebriche), non contenuti in sistemi lineari; nonché di quegli integrali di differenziali totali, che il sig. Picard ha felicemente introdotti nella teoria delle funzioni algebriche di due variabili [4].

Ma prima di parlare dei contributi che sono stati portati finora in questo ordine di questioni, e di ciò che ad essi aggiunge il presente lavoro, stimo opportuno di richiamare brevemente alcune definizioni ed alcuni teoremi, concernenti gl'*integrali di Picard*, affinché il lettore abbia dinanzi a sé un quadro possibilmente completo [5].

Se R, S son due funzioni razionali appartenenti alla superficie (1), affinché il differenziale

$$R\,dx + S\,dy$$

sia esatto, cioè possa riguardarsi come differenziale totale di una funzione (generalmente polidroma) appartenente al campo di razionalità definito dalla (1), occorre e basta che sia soddisfatta la *condizione d'integrabilità*

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dS}{dx}, \tag{2}$$

quando, beninteso, nel fare le derivazioni, si riguardi z come funzione algebrica di x, y. Supposta soddisfatta la condizione d'integrabilità, dicesi che l'integrale

$$J = \int R\,dx + S\,dy \tag{3}$$

presenta una *singolarità polare* od un *polo* in un punto $(x_0\,y_0\,z_0)$ di F, quando scegliendo una curva qualunque della superficie, uscente da $(x_0\,y_0\,z_0)$, e rappresentata nell'intorno di questo punto dalle formole

$$x = x_0 + x(t), \qquad y = y_0 + y(t), \qquad z = z_0 + z(t), \tag{4}$$

ove $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son funzioni analitiche olomorfe nell'intorno di $t = 0$ e che si annullano in $t = 0$, l'integrale

$$\int f(t)\,dt,$$

che si ottiene da J mediante la sostituzione (4), presenta in $t = 0$ una singolarità polare.

(4) Cfr. ad esempio PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, t. I, 1897: t. II, 1900–1904). Da questo libro trarrò, talora con qualche piccola variante, le definizioni richiamate più sotto.

(5) Per altri risultati posteriori a quelli contenuti nel presente lavoro, veggasi la nota aggiunta alla fine della Memoria (16 luglio 1905).

L'integrale J dicesi *di 2ª specie*, quando su tutta la F presenta al più singolarità polari. In particolare dicesi *di 1ª specie*, quando conservasi finito in *ogni* punto di F.

Gl'integrali di 2ª specie possono essere *trascendenti* e *algebrici*: in questo ultimo caso riduconsi a funzioni razionali. Un integrale di 1ª specie, che non sia costante su tutta la superficie, non è mai algebrico. Nel seguito, quando non si avverta esplicitamente il contrario, parlando degli integrali di 1ª o di 2ª specie, intenderemo sempre che sieno trascendenti.

Come nello studio degli integrali abeliani si presenta opportuna la rappresentazione della funzione algebrica di una variabile, sopra una superficie di Riemann, così nello studio degli integrali di Picard giova figurarsi la varietà reale chiusa V, a quattro dimensioni, i cui punti rappresentano le soluzioni complesse dell'equazione (1).

In forza della condizione (2), l'integrale J, preso tra due punti qualunque di V, ha un valore che non s'altera deformando con continuità il cammino d'integrazione; cosicché, chiamando *periodo* il valore dell'integrale lungo un *ciclo lineare* di V, cioè lungo un cammino chiuso tracciato su V con un determinato verso, per una deformazione continua del ciclo, il periodo non s'altera.

Da ciò deriva una notevole relazione tra i periodi di un integrale di differenziale totale ed i cicli lineari di V. Per enunciare brevemente, converrà premettere alcune definizioni.

Due cicli si diranno *equivalenti* (*omologhi* secondo Poincaré) quando, senza uscire da V, si posson ridurre l'uno all'altro per deformazione continua.

Se σ è un ciclo, col simbolo $k\sigma$, ove k è un intero positivo o negativo, s'intende il ciclo σ percorso k volte nel verso di σ o nel verso contrario, secondo che k è positivo o negativo.

Il ciclo $k\sigma$ si può concepire come un'elica di passo infinitesimo, la quale gira k volte nel verso debito, ed ha i due estremi saldati tra loro.

Si chiamerà *somma dei due cicli* σ_1, σ_2, e s'indicherà con $\sigma_1+\sigma_2$, un terzo ciclo che, per deformazione continua, si possa ridurre all'insieme dei due dati (percorsi ciascuno col proprio verso), e di una linea, percorsa una volta in un senso ed una volta nell'altro, la quale congiunga un punto di σ_1 con un punto di σ_2.

Da queste definizioni discende un significato preciso per la *combinazione lineare*

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_r\sigma_r ,$$

ove $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ son cicli, e $k_1, \cdots, k_r$ son interi, positivi o negativi.

Più *cicli* diconsi *dipendenti*, quando un multiplo conveniente di uno di essi, è equivalente ad una combinazione lineare dei rimanenti.

Diconsi *indipendenti* nel caso contrario.

Si dimostra che il numero dei cicli indipendenti di V, non riducibili a punti per deformazione continua, raggiunge un massimo finito, che si suole indicare con $p_1 - 1$. In altri termini, si possono fissare entro V $p_1 - 1$ cicli

indipendenti, per modo che ogni altro ciclo risulti dipendente da questi. Il numero p_1 dicesi *ordine di connessione lineare* della varietà V, o della superficie F, di cui V è l'immagine reale.

Se $p_1 = 1$, ogni ciclo di V può ridursi ad un punto per deformazione continua.

I periodi non nulli di un integrale di 2ª specie appartenente ad F, provengono tutti da cicli lineari di V, che non possono ridursi a punti per deformazione continua [6]; ed anzi i *periodi distinti* (cioè non legati da nessuna relazione lineare a coefficienti interi) di un integrale di 2ª specie generico, son tanti quanti i cicli indipendenti di V.

Ma il sig. Picard ha fatto un altro passo innanzi veramente importante, dimostrando che: se più *integrali di* 2ª *specie* diconsi *algebricamente distinti* allorquando una loro combinazione lineare qualunque, a coefficienti costanti, non riducesi mai ad una funzione razionale, il numero degli integrali distinti appartenenti alla superficie, è uguale al numero dei loro periodi, cioè a $p_1 - 1$.

Questa proposizione ne rammenta un'altra, del tutto analoga, relativa agl'integrali abeliani di 2ª specie, appartenenti ad una curva. Tuttavia un divario profondo si riscontra fra gl'integrali abeliani e gl'integrali di Picard. Invero, sopra una curva priva di punti multipli, esistono integrali trascendenti di 2ª specie, mentre non esistono integrali di Picard trascendenti della 2ª specie, sopra una superficie priva di punti multipli [7].

Per le curve basta la *irrazionalità* per assicurare l'esistenza di integrali abeliani di 1ª e 2ª specie; mentre tale condizione non basta per assicurare, sopra una superficie, l'esistenza di integrali di Picard delle due specie.

Si presenta dunque come essenziale, nella teoria delle superficie algebriche, la questione di assegnare le condizioni d'esistenza di tali integrali: e si presenta tanto più difficile e tanto più attraente, in quanto ad una gran parte delle induzioni, manca il fondamento dell'analogia!

Ecco ora qual'è lo stato attuale della questione.

Il sig. Humbert ha dapprima dimostrato che una superficie, la quale contenga un sistema continuo di curve, non appartenente ad un sistema lineare, ammette integrali di differenziali totali di 1ª specie [8]; ed il sig. Enriques ha successivamente stabilito che una superficie algebrica, la quale possegga p integrali di differenziali totali di 1ª specie, con $2p$ periodi, contiene un sistema continuo di curve, non appartenente ad un sistema lineare [9].

(6) Mentre ciò non accadrebbe se l'integrale fosse *di* 3ª *specie*, cioè se possedesse singolarità logaritmiche.

(7) PICARD et SIMART, t. I, pp. 91 e 119.

(8) *Sur une classe de surfaces algébriques*, Comptes rendus, (1893). Ved. pure la Memoria, *Sur quelques points de la théorie des surfaces algébriques*, Journal de Math., (1894).

(9) *Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce*, Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, (2) 3 (1901). Ved. pure un'altra dimostrazione dello stesso teorema, nella mia Nota, *Osservazioni sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 39 (1904), n° 7 [cfr. queste «Opere», XVIII, p. 244; N.d.R.].

La irregolarità delle superficie che si considerano in questi teoremi, discende dal fatto che, sopra una superficie regolare, ogni sistema continuo di curve appartiene ad un sistema lineare (10). Abbandonando per ora i tentativi diretti a costruire sopra ogni superficie che possegga integrali di 1ª e di 2ª specie, una serie continua, non appartenente ad un sistema lineare, mi son proposto di porre in relazione diretta l'esistenza degli integrali di Picard, colla irregolarità della superficie, e son giunto così al teorema:

Ogni superficie che possegga integrali di Picard della 2ª specie (in particolare di 1ª), è irregolare.

In altri termini:

Per una superficie regolare F l'ordine di connessione lineare è uguale ad 1; *cioè ogni cammino chiuso, tracciato sulla varietà riemanniana immagine reale di F, può ridursi ad un punto per deformazione continua* (11).

La dimostrazione di questo teorema è lo scopo precipuo della presente Memoria; tuttavia intorno ad essa si raggruppano altri risultati, tra i quali ricorderò in modo speciale il seguente, che precisa maggiormente il teorema fondamentale:

Data una superficie algebrica di generi, geometrico ed aritmetico, P_g *e* P_a, *l'irregolarità* $P_g - P_a$ *della superficie, è almeno uguale all'eccesso del numero degli integrali di 2ª specie algebricamente distinti, sul numero degli integrali di 1ª specie linearmente indipendenti.*

II.

Passerò ora ad esporre le linee generali di questa Memoria.

Un integrale (3) di 2ª specie, appartenente alla superficie F, riguardato come funzione del punto scorrente sopra una curva algebrica irriducibile di F, dà luogo ad un integrale abeliano di 2ª specie.

Se la curva è variabile in un fascio, l'integrale J stacca razionalmente su essa (rispetto al parametro che ne individua la posizione entro al fascio) un gruppo di un numero finito di poli, i quali, al variare della curva, descrivono una o più curve algebriche irriducibili, che si dicono le *curve polari* dell'integrale J (12).

(10) Cfr. ENRIQUES, *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie regolare*, Rendiconti di Palermo, (1899). Il caso del fascio irrazionale era stato trattato prima da Castelnuovo. — Ved. pure la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui...*, ove trovasi di più dimostrato che l'irregolarità $(P_g - P_a)$ di una superficie con p integrali finiti a $2p$ periodi, non è inferiore a p.

(11) In particolare si ha il teorema di Picard, già citato, sulle superficie dello S_3 prive di punti multipli; e l'estensione di questo teorema dovuta a BERRY, Acta math., *27* (1903), pag. 157. — Si confronti il teorema del testo con quest'altro relativo alle curve: « Ogni cammino chiuso tracciato sulla superficie riemanniana, immagine d'una curva razionale, può ridursi ad un punto per deformazione continua ».

(12) PICARD et SIMART, t. I, p. 147.

In relazione a queste curve polari io introduco gli *ordini d'infinito* e le *funzioni razionali residue* (dei varî ranghi), le quali hanno un ufficio analogo a quello dei coefficienti delle potenze negative dell'argomento, negli sviluppi di Laurent, che caratterizzano un integrale abeliano di 2ª specie intorno ai suoi poli.

Supposto che gli assi di riferimento sieno in posizione generica rispetto ad F, e supposto inoltre che tra le sezioni di F coi piani $y = \text{cost.}$, non si trovi nessuna curva polare di J (il che può sempre ottenersi operando, nel caso, una conveniente trasformazione omografica), si dirà che lungo la curva irriducibile C *l'integrale* J *diviene infinito d'ordine* s, allorquando l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$, staccato da J sulla sezione di F col piano generico $y = \bar{y}$, ha per poli d'ordine s i punti d'intersezione di questo piano con C.

Nell'intorno di ciascun polo $(x_0\,\bar{y}\,z_0)$, l'integrale $J(x\bar{y}z)$, riguardato come funzione di x, si sviluppa in una serie di potenze dell'argomento $x - x_0$, la quale comincia con un termine in $\dfrac{1}{(x-x_0)^s}$.

Al variare del punto $(x_0\,\bar{y}\,z_0)$ lungo la curva C, il coefficiente di $\dfrac{1}{(x-x_0)^h}$ $(h = s,\ s-1, \cdots, 1)$, risulta funzione algebrica uniforme, cioè funzione razionale, del punto stesso. È questa funzione ch'io chiamo la *funzione razionale residua di rango* h, *individuata da* J *sulla curva polare* C.

Nel § 1 prendo a studiare la funzione residua $\varphi(xyz)$, di rango 1, individuata sulla propria curva polare, da un integrale $J(xyz)$ che presenti soltanto poli di 1° ordine, distribuiti sopra un'unica curva C, irriducibile e priva di punti multipli; e determino il gruppo dei poli ed il gruppo degli zeri di φ (Teorema I).

Da questa determinazione segue che, variando J nella totalità degli integrali che divengono infiniti del 1° ordine soltanto lungo C, rimangono fissi *tutti* i poli di φ e variano soltanto *alcuni* degli zeri. Questi ultimi zeri variabili costituiscono un gruppo caratteristico di C [13], che chiamo il *gruppo caratteristico individuato su* C *dall'integrale* J.

Tutto ciò vale, in particolare, quando J riducesi ad una funzione razionale: in tal caso il gruppo caratteristico individuato da J su C, è il gruppo base del fascio costituito dalle curve $J = \text{cost.}$

Nel § 2 dimostro anzitutto che sopra una superficie F, che abbia l'ordine di connessione lineare $p_1 > 1$, esistono sempre integrali di 2ª specie, i quali non si possono ridurre alla 1ª specie, per sottrazione di funzioni razionali. Da ciò e dai risultati del § 1, segue in modo semplicissimo il teorema

(13) Il lettore potrà vedere la definizione generale di gruppo caratteristico nella nota (1) a piè della p. 252. Nel caso (che del resto non è per noi restrittivo) in cui la C appartiene ad un sistema lineare infinito, cioè nel caso in cui esiste una funzione razionale, i cui punti di un determinato livello costante son distribuiti lungo C, per *serie caratteristica* s'intende il sistema di gruppi di punti segati su C dalle altre curve del sistema. Ogni gruppo appartenente a questa serie, resa *completa* se non lo è, dicesi un gruppo caratteristico di C.

fondamentale, facendo uso del seguente criterio d'irregolarità, dovuto al sig. Castelnuovo:

« Se sopra una superficie algebrica esiste un sistema lineare completo, la cui serie caratteristica non sia completa, la superficie è irregolare ». (Ved. le citazioni alla fine del § 2).

Ma la dimostrazione del teorema fondamentale poggia essenzialmente sull'ipotesi che sopra ogni superficie col $p_1 > 1$, si possa costruire un integrale di 2ª specie coi periodi arbitrari e con una sola curva polare del 1° ordine, prefissata.

Nel § 3 ottengo la giustificazione di quest'ipotesi, dimostrando che *ogni integrale di 2ª specie appartenente ad una superficie algebrica, si può ridurre, per sottrazione di funzioni razionali, ad un integrale che possegga (al più) una sola curva polare del 1° ordine, irriducibile e priva di punti multipli* (Teor. VI).

A questo risultato pervengo mediante un'analisi assai minuta, concernente gli zeri ed i poli delle funzioni residue dei ranghi più alti, individuate sopra le proprie curve polari, da un integrale che divenga infinito di ordini qualunque lungo più curve (Teor. III).

Infine determino maggiormente il teorema fondamentale, nella forma che ho indicata terminando la parte I di quest'introduzione.

§ 1. – Sulla funzione residua a cui da luogo un integrale che possegga una sola curva polare del 1° ordine.

1. Sia

$$J(x, y, z) = \int R\,dx + S\,dy$$

un integrale di Picard, della 2ª specie, appartenente alla superficie algebrica d'ordine m,

$$F(x, y, z) = 0,$$

della quale indichiamo con D la linea doppia; e supponiamo che J possegga un'unica curva polare del 1° ordine C, irriducibile e priva di punti multipli, né coincidente con alcuna delle sezioni piane $y = \text{cost.}$

Immaginando di aver già assoggettato la F ad una trasformazione omografica generica, si posson ritenere soddisfatte le condizioni seguenti:

1ª) Le funzioni razionali R, S si annullano semplicemente lungo la curva all'infinito di F;

2ª) esse non divengono infinite in nessun piano $y = \text{cost.}$ o $x = \text{cost.}$ (14)

(14) Picard et Simart, t. I, p. 114.

Ogni punto comune a C ed al piano generico $y = \bar{y}$, essendo un polo del 1° ordine per l'integrale abeliano

$$J(x, \bar{y}, z) = \int R(x, \bar{y}, z)\, dx,$$

risulta un polo di 2° ordine per $R(x, \bar{y}, z)$; sicché lungo C la $R(x, y, z)$ diviene infinita di 2° ordine.

Cerchiamo ora se la R può avere altre curve polari, all'infuori di C. Poiché per ipotesi una sezione $y =$ cost. non è mai curva polare di R, una curva polare diversa da C taglierà certo una sezione piana $F(x, \bar{y}, z) = 0$, fuori dei punti all'infinito di questa; e tali intersezioni risulteranno poli per la funzione $R(x, \bar{y}, z)$. Siccome inoltre in questi punti l'integrale abeliano $J(x, \bar{y}, z)$ deve conservarsi finito, la $R(x, \bar{y}, z)$, *riguardata come funzione di* x, dovrà ivi divenire infinita d'ordine < 1; cioè i punti stessi dovranno essere di diramazione per la funzione z di x definita dalla $F(x, \bar{y}, z) = 0$.

Ne deriva che, fuori di C, la $R(x, y, z)$ può divenire infinita al più lungo la curva K segnata su F, fuori della linea doppia D, dalla superficie $F'_z = 0$. Similmente dicasi della funzione razionale S.

2. Considerando dapprima l'ipotesi che R divenga infinita lungo la curva K, si vede subito che questa è una curva polare del 1° ordine, perché, a causa della genericità degli assi coordinati e della natura delle singolarità supposte in F, lo sviluppo della $R(x, \bar{y}, z)$ nell'intorno di un punto di diramazione $(x_0, \bar{y}, z_0)$, comincia con un termine in $\frac{1}{(x - x_0)^{1/2}}$.

Ciò posto, per studiare la funzione residua di rango 1, $\varphi(x, y, z)$, individuata da J sulla C (Introduzione, parte II), converrà porre la R sotto forma di quoziente di due polinomî aggiunti ad F. A tal uopo costruiscasi una superficie $B(x, y, z) = 0$, d'ordine l, aggiunta ad F, passante doppiamente per C e semplicemente per K: ciò è sempre possibile quando l sia abbastanza grande Se la B sega F, fuori delle curve K, C, D, lungo la curva M, pel Restsatz (15) esisterà un'aggiunta $A(x, y, z) = 0$ passante per M e segante F, fuori delle curve D, M, lungo la curva E costituita dagli zeri di R. Dall'ipotesi che la curva all'infinito di F faccia parte semplicemente della E, segue che la A è di ordine $l - 1$.

Poiché la funzione $\frac{RB}{A}$ non si annulla mai (né mai diviene infinita) su F, avremo:

$$\frac{RB}{A} = \text{cost.},$$

ed inglobando la cost. nel polinomio A, potremo scrivere

$$R = \frac{A}{B}.$$

(15) NÖTHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...*, Math. Annalen, *8* (1874), p. 509.

In simil guisa si trova:

$$S = \frac{A_1}{B},$$

ove A_1 è pure di ordine $l - 1$. Onde l'integrale J potrà porsi sotto la forma:

$$\int \frac{A\,dx + A_1\,dy}{B}.$$

Sviluppando ora il numeratore e il denominatore della $R(x,\bar{y},z)=\frac{A(x,\bar{y},z)}{B(x,\bar{y},z)}$, secondo le potenze ascendenti di $x - x_0$, nell'intorno di un punto generico $(x_0, \bar{y}, z_0)$ della curva C, avremo:

$$(1)\quad \begin{cases} A(x,\bar{y},z)=A(x_0,\bar{y},z_0)+(x-x_0)\,A'(x_0,\bar{y},z_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2!}\,\bar{A}''(x_0,\bar{y},z_0)+\cdots \\ B(x,\bar{y},z)=B(x_0,\bar{y},z_0)+(x-x_0)\,\bar{B}'(x_0,\bar{y},z_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2!}\,\bar{B}''(x_0,\bar{y},z_0)+\cdots \end{cases}$$

ove $\bar{A}', \bar{A}'', \cdots$ denotino le derivate di $A(x, \bar{y}, z)$ rispetto ad x, tenuto conto del fatto che z è funzione implicita di x, definita dalla $F(x, \bar{y}, z) = 0$. Analogo significato hanno i simboli $\bar{B}', \bar{B}'', \cdots$.

Dalla regola di derivazione delle funzioni implicite si trae:

$$\bar{B}' = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}\,\frac{dz}{dx},$$

$$\bar{B}'' = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial z}\,\frac{dz}{dx} + \frac{\partial B}{\partial z}\,\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

od anche, simbolicamente:

$$(2)\qquad \bar{B}' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)B;$$

$$(3)\qquad \bar{B}'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B + \frac{\partial B}{\partial z}\,\frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Poiché C è doppia per B, dalla (2) rilevasi che nei punti di C, $\bar{B}' = 0$. Ma nel punto generico $(x_0, \bar{y}, z_0)$ di C, sarà $\bar{B}'' \neq 0$, perché altrimenti questo punto risulterebbe un polo d'ordine maggior di 2 per la funzione $R(x, \bar{y}, z)$.

Ciò premesso, facendo il quoziente delle serie (1), troviamo che nello sviluppo di $R(x, \bar{y}, z)$ il coefficiente di $\frac{1}{(x-x_0)^2}$ è $\frac{2A(x_0,\bar{y},z_0)}{\bar{B}''(x_0,\bar{y},z_0)}$; e quindi tale sarà (a meno del segno) il coefficiente di $\frac{1}{x-x_0}$ nello sviluppo di $J(x, \bar{y}, z)$; cioè avremo (a meno d'un coefficiente numerico):

$$\varphi(x,y,z) = \frac{A(x,y,z)}{\bar{B}''(x,y,z)}.$$

Se si osserva che nei punti di C (come risulta dalla (3)):

$$\overline{B}'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B ,$$

e che inoltre (allorquando si riguardi y come un parametro):

$$F'_x + F'_z \frac{dz}{dx} = 0 ,$$

potremo scrivere:

$$\varphi(x , y , z) = \frac{A(x , y , z)\, F'^2_z}{\left(F'_z \frac{\partial}{\partial x} - F'_x \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B} . \tag{4}$$

Se gli assi son disposti genericamente, il numeratore di φ risulta di grado $l - 1 + 2(m - 1)$, mentre il denominatore risulta di grado $l - 2 + 2(m - 1)$: onde ciascuno dei punti all'infinito di C (costituenti il gruppo P), è un polo di 1° ordine per la funzione φ.

Sbarazzato il terreno dai punti all'infinito, vediamo quali sono i punti al finito di C, in cui annullasi il numeratore o il denominatore di φ, per poterne poi desumere, previa la soppressione degli zeri comuni ai due termini, la posizione degli altri poli e degli zeri di φ.

Il numeratore si annulla:

a) Nei punti del gruppo (CE_1) [16], ove E_1 denota la curva di livello zero della R, astrazione fatta dalla curva all'infinito di F. Ciascuno di questi punti deve contarsi una volta tra gli zeri. – Bisogna però osservare che, se il gruppo (CE_1) possiede punti multipli (il che accade per esempio quando E_1 abbia dei contatti con C), ciascuno di questi punti va contato fra gli zeri del numeratore, colla molteplicità che gli spetta entro a (CE_1). – Nel seguito, in casi analoghi, quest'osservazione verrà sottintesa.

b) Nei punti del gruppo (CM), che son pure zeri semplici.

c) Nei punti del gruppo (CD), ciascuno dei quali va contato tre volte, perché A si annulla ivi semplicemente, ed F'^2_z vi si annulla doppiamente.

d) Nei punti del gruppo $Q = (CK)$, in ciascun dei quali il piano tangente ad F è parallelo all'asse z.

Ognuno di questi punti, essendo segnato su C dalla superficie doppia $F'^2_z = 0$, conta 2 volte tra gli zeri del numeratore.

Passiamo ora a ricercare gli zeri del denominatore

$$\Delta \equiv \left(F'_z \frac{\partial}{\partial x} - F'_x \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B .$$

E cominciamo dall'osservare che nello sviluppo del quadrato simbolico, ogni termine viene a contenere le F'_x, F'_z complessivamente al 2° grado;

(16) Il simbolo (CE_1), che ho già usato nella mia Nota *Osservazioni sui sistemi continui di curve...*, rappresenta il gruppo dei punti comuni alle curve C, E_1.

onde Δ passerà doppiamente per D. Fuori della D, la superficie Δ sega F lungo una curva L, il cui punto generico è geometricamente definito dalla condizione che la sua quadrica polare rispetto a B ed il pian tangente in esso ad F, si tagliano in un medesimo punto della retta all'infinito u del piano xz.

Ciò risulta dal fatto che l'equazione $\Delta = 0$ si ottiene eliminando z'/x' tra le equazioni:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{z'}{x'}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B = 0\,, \qquad F'_x + \frac{z'}{x'}F'_z = 0\,,$$

la 1ª delle quali dà le intersezioni della retta u colla quadrica polare del punto (xyz) rispetto a B; e la 2ª l'intersezione di u col piano polare del medesimo punto rispetto ad F.

Tenendo presente che la quadrica polare di un punto generico di C rispetto a B, si spezza nei due piani ivi tangenti a questa superficie, si conclude che Δ si annulla:

a') Nei punti del gruppo (CD). La linea L passerà per ciascuno di questi punti, perché uno dei piani tangenti a B in un punto (CD), tocca F. Dunque, non soltanto Δ passa per ogni punto (CD) colla molteplicità 2, ma uno dei piani tangenti a Δ ivi (quello che contiene le tangenti delle curve L, D), tocca F, e quindi un punto (CD) conta tre volte fra le intersezioni di C con Δ.

b') Nei punti dei gruppi (CM) e (CK), perché uno dei due piani tangenti a B in ciascuno di questi punti, tocca F. Ogni tal punto conta una volta tra le intersezioni di C con Δ. – Si tenga presente, pel seguito, che il gruppo (CK) coincide col gruppo Q, definito in d).

c') Nei punti del gruppo N, in ciascun dei quali la tangente a C è parallela al piano xz. Per valutare la molteplicità d'intersezione di C e Δ in uno, O, di questi punti, trasportiamo ivi l'origine delle coordinate, prendendo come asse x la tangente a C in O, ma lasciando inalterata la posizione della retta all'infinito del piano xz, dalla quale dipende la costruzione geometrica della superficie Δ.

Poiché $\dfrac{\partial B}{\partial z}$ annullasi lungo la C, ed il pian tangente in O alla superficie $\dfrac{\partial B}{\partial z} = 0$, passa pel punto all'infinito dell'asse x, nel punto O sarà $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial z} = 0$. Similmente si vede che in O si annulla pure $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}$. Ma si può inoltre provare che la superficie $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ ha in O con C molteplicità d'intersezione uguale a 2. Invero la $B = 0$, avendo in O contatto quadripunto coll'asse x, dai termini di B, indipendenti da y, z, esce il fattore x^4, e quindi dai termini di $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}$, indipendenti da y, z, esce il fattore x^2.

Se a ciò si aggiunge il fatto che la F'_x si annulla in O, si conclude che ciascuno dei tre termini di Δ ha incontro bipunto con C in O, e quindi che

lo stesso accade per la superficie Δ (17). Prescindendo dagli zeri che già appaiono comuni al numeratore e al denominatore di φ, segue che la $\varphi(xyz)$ diviene infinita del 1° ordine nei punti del gruppo all'infinito P, e del 2° ordine nei punti del gruppo N; mentre si annulla semplicemente nei punti del gruppo (CE_1) e nei punti di Q.

Ma un esame più intimo della questione permette di effettuare un'ulteriore riduzione tra gli zeri dei due termini di φ.

Se, invero, facciamo variare il piano $y = \bar{y}$, in guisa che si avvicini indefinitamente al piano $y = y_0$, *tangente* a C nel punto (x_0, y_0, z_0), due poli di 1° ordine dell'integrale $J(x, \bar{y}, z)$ si muovono sulla C, tendendo a coincidere in (x_0, y_0, z_0): onde questo punto risulta un polo di 2° ordine per $J(x, y_0, z)$, e quindi di 3° ordine per la funzione razionale $R(x, y_0, z)$. Siccome al variare di $y = \bar{y}$ verso $y = y_0$, due poli di 2° ordine di $R(x, \bar{y}, z)$ tendono ad (x_0, y_0, z_0), affinché questo punto risulti un polo di 3° ordine per $R(x, y_0, z)$, bisognerà che uno zero di $R(x, \bar{y}, z)$ tenda contemporaneamente ad (x_0, y_0, z_0): cioè bisognerà che la curva E_1 passi per (x_0, y_0, z_0).

Ne deriva che il numeratore di φ si annulla semplicemente nei punti di N, e quindi che questi punti sono in realtà poli di 1° ordine per la $\varphi(x, y, z)$.

In conseguenza viene a ridursi anche il gruppo degli zeri di φ, rimanendo costituito soltanto dal gruppo Q e dal gruppo $(CE_1) - N$, che designeremo con G.

È poi chiaro che i punti di G son caratterizzati dalla proprietà che in essi è regolare l'integrale abeliano $J(x, \bar{y}, z)$ (con $\bar{y}$ parametro variabile).

Ma possiamo di più osservare che sulla curva C esiste necessariamente la serie caratteristica (18), e che G è un gruppo di questa serie.

Costruiamo infatti una superficie Φ, d'ordine r, che passi semplicemente per C e seghi altrove F lungo la curva H. La jacobiana di F, Φ e di due piani dello spazio (la cui equazione si ottiene, in coordinate omogenee, uguagliando a zero il determinante funzionale di F, Φ e dei due dati piani), è una superficie d'ordine $m + r - 2$, aggiunta ad F, e segante C, fuori del gruppo (CD), nel gruppo (CH) ed in un gruppo jacobiano della serie formata dalle sezioni piane di C (19).

(17) Ho tolto la ricerca della molteplicità d'intersezione di C e Δ nel punto O, da un passo delle Lezioni del prof. SEGRE, ove era esposta per tutt'altro scopo.

(18) Nella mia Nota citata, *Osservazioni sui sistemi continui...*, ho definito la serie caratteristica di una curva C, tracciata sopra una superficie algebrica F, indipendentemente dall'esistenza di un sistema lineare infinito, a cui appartenga totalmente la C; cioè indipendentemente dall'esistenza di una funzione razionale, di cui C sia una curva di livello costante. Per comodità del lettore richiamerò brevemente questa definizione.

Determiniamo su F un sistema lineare $|E|$, tale che una delle sue curve (ma non tutte) si spezzi nella C e in una parte residua H. Se la serie lineare individuata su C dai gruppi (CE), contiene la serie lineare individuata dal gruppo (CH), la *differenza* tra le due serie riesce indipendente dalla scelta del sistema $|E|$, e dicesi la *serie caratteristica* della curva C. — Quando la C appartiene ad un sistema lineare infinito, la serie caratteristica è quella che contiene tutti i gruppi segati su C dalle altre curve del sistema.

(19) Diconsi *gruppi jacobiani* di una serie esistente sopra una curva C, quelli formati dai punti doppî delle singole serie lineari semplicemente infinite, contenute nella data serie.

Considerando una superficie aggiunta d'ordine $m + r - 2$, spezzata in una superficie qualunque d'ordine $r - 1$ e in un'aggiunta d'ordine $m - 1$, ne deriva che quest'ultima sega C, fuori di (CD), in un gruppo equivalente [20] a

$$3P + T + (CH) - (C + H, C),$$

ove T denoti un gruppo canonico di C.

Poiché la F_z' è un'aggiunta d'ordine $m - 1$, avremo dunque:

$$Q \equiv 3P + T + (CH) - (C + H, C).$$

Confrontando questa relazione coll'altra

$$G + Q \equiv P + N,$$

la quale deriva dal fatto che $G + Q$ è il gruppo degli zeri e $P + N$ il gruppo dei poli della funzione razionale $\varphi(xyz)$, verrà:

$$G \equiv N - 2P - T + (C + H, C) - (H, C).$$

Se si osserva ancora che N, come gruppo jacobiano della serie segata su C dal fascio $y = \text{cost}$, equivale a $2P + T$, avremo in definitiva:

$$G \equiv (C + H, C) - (H, C),$$

la quale, secondo la definizione già richiamata della serie caratteristica (ved. la nota [18] a piè della pag. 263), esprime che G è un gruppo di questa serie.

3. Passiamo ora ad esaminare l'ipotesi che la R non divenga infinita fuori di C.

Dopo aver posto, come nel caso antecedente, la funzione razionale R sotto forma di quoziente $\frac{A}{B}$ di due polinomî aggiunti ad F, si giunge all'espressione (4) della funzione residua $\varphi(x, y, z)$, individuata da J sulla curva C.

E l'esame di quest'espressione, del tutto analogo a quello svolto precedentemente, ci permette di concludere che la φ diviene infinita del 1° ordine nei punti del gruppo P, e del 2° ordine nei punti del gruppo N, mentre diviene nulla del 1° ordine nei punti di (CE_1) e del 2° ordine nei punti di Q.

Per le ragioni già addotte nel numero precedente, si vede che la curva E_1 deve passare pei punti del gruppo N: onde può dirsi che in questi punti la φ

(20) Due gruppi di punti di una curva algebrica C, diconsi *equivalenti*, allorquando appartengono ad una medesima serie lineare; cioè sono gruppi di livello costante di una medesima funzione razionale. L'equivalenza s'indica col segno $\equiv$ posto fra i due gruppi.

Similmente si definisce, sopra una superficie, l'*equivalenza di due curve*; e si denota col medesimo segno.

Per la piena intelligibilità di quanto è affermato nel testo, convien ricordare che un gruppo jacobiano di una serie lineare esistente sulla curva C, equivalente a due gruppi di questa serie, aumentati di un gruppo canonico. Ved. ad esempio la nota a piè della pag. 11 nel mio lavoro: *Su alcune questioni di postulazione* [queste «Opere», XIII, p. 140; N.d.R.].

diviene infinita del 1° ordine, e che il gruppo de' suoi zeri viene costituito dal gruppo $(CE_1) - N$, contato una volta, e dal gruppo Q contato due volte.

Ma qui si presenta una modificazione, rispetto all'ipotesi precedentemente discussa. Invero, per ciascun punto del gruppo Q deve passare la curva E_1, perché nel caso contrario un punto (x_0, y_0, z_0) di Q, sarebbe un polo di 2° ordine per la funzione razionale $R(x, y_0, z)$; cioè, trattandosi di un punto di diramazione, lo sviluppo di $R(x, y_0, z)$ comincerebbe con un termine in $\frac{1}{(x - x_0)^{2/2}}$: il che porterebbe una singolarità logaritmica nell'integrale $J(x, y_0, z)$. Ne discende che in ciascun punto (x_0, y_0, z_0) di Q, la φ possiede in realtà uno zero di 3° ordine, che proviene dalla coincidenza di uno zero di 2° ordine con uno di 1° ordine.

Tuttavia al risultato definitivo si può dare la stessa forma di quella che deriva dall'analisi del n° 2, definendo il gruppo G mediante la relazione

$$G = (CE_1) - N + Q.$$

Con questa posizione, in forma dell'equivalenza del gruppo dei poli al gruppo degli zeri di φ, si ottiene ancora:

$$G + Q \equiv P + N,$$

e, come prima, si vede che G è un gruppo caratteristico della curva C.

È poi evidente che in ogni punto (x_0, y_0, z_0) di G, l'integrale abeliano $J(x, y_0, z)$ è regolare.

Soltanto, per la *particolar* natura della funzione R, qui c'è da osservare che il gruppo G contiene il gruppo Q contato due volte.

4. Come conseguenza dei ragionamenti svolti finora possiamo enunciare il seguente

TEOREMA I. *Allorquando un integrale semplice di 2ª specie $J(x, y, z)$, appartenente ad una superficie algebrica F, non ammette che poli di 1° ordine, e questi sono distribuiti lungo una sola curva C, irriducibile e priva di punti multipli, tale curva possiede necessariamente la serie caratteristica.*

La funzione residua di rango 1, $\varphi(x, y, z)$, *individuata da J sulla C, diviene infinita (del 1° ordine) nei punti all'infinito di C e nei punti di contatto dei piani $y = cost.$, che toccano la curva polare; e diviene nulla (del 1° ordine) nei punti di C in ciascun dei quali il pian tangente ad F è parallelo all'asse z, e nei punti della curva stessa, ove è regolare l'integrale abeliano $J(x, \bar{y}, z)$. Questi ultimi punti formano un gruppo delle serie caratteristica esistente su C.*

Tale gruppo si chiamerà il *gruppo caratteristico individuato su C dall'integrale J.*

Osservazione 1ª. In qualche caso particolare può accadere che alcuni dei punti enumerati compariscano contemporaneamente tra i poli e tra gli zeri di φ. Potremo allora sopprimerli o mantenerli nei due gruppi, secondo che ci piaccia. – Nel seguito, in casi analoghi, ci dispenseremo dal ripetere quest'osservazione.

Osservazione 2ª. Il teorema dimostrato vale in particolare *quando l'integrale riducesi ad una funzione razionale: in tal caso il gruppo caratteristico individuato da J su C, non è altro che il gruppo base del fascio $J = cost.$*

Del resto, quando J è una funzione razionale, il teorema si può stabilire direttamente e più semplicemente, osservando che, se A, B son due polinomi aggiunti ad F, tali che $J = \frac{A}{B}$, la funzione residua di rango 1, individuata da J sulla C, risulta uguale ad

$$\frac{AF_z'}{F_z' B_x' - F_x' B_z'} .$$

Osservazione 3ª. Nel ragionamento dei n. 2, 3, ci ha servito il fatto che la curva E_1 passa pei punti del gruppo N. Ora questo fatto, che abbiamo giustificato provvisoriamente in modo intuitivo, si stabilisce in modo rigoroso, facendo capo alla condizione d'integrabilità pel differenziale totale

$$\frac{A\,dx + A_1\,dy}{B} .$$

Nel calcolo seguente useremo i d senza incurvare, per le derivate parziali (rispetto ad x, y) di una funzione di x, y, z, allorquando la z si riguardi come funzione implicita di x, y, definita dalla

$$F(x, y, z) = 0;$$

mentre useremo i ∂ incurvati, per le derivate parziali esplicite. – Con queste notazioni la condizione d'integrabilità si scrive sotto la forma:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{A_1}{B}\right),$$

ossia:

$$B\frac{dA}{dy} - A\frac{dB}{dy} = B\frac{dA_1}{dx} - A_1\frac{dB}{dx} .$$

Derivando i due membri rispetto ad x, otterremo:

$$\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dx} + B\frac{d^2A}{dx\,dy} - \frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy} - A\frac{d^2B}{dx\,dy} = B\frac{d^2A_1}{dx^2} - A_1\frac{d^2B}{dx^2} .$$

Poiché nei punti di C si annullano le derivate parziali esplicite di B, rispetto ad x, y, z, in quei punti si annulleranno pure le derivate parziali implicite, rispetto ad x, y, onde lungo la C la relazione precedente diverrà:

$$A\frac{d^2B}{dx\,dy} = A_1\frac{d^2B}{dx^2} . \tag{5}$$

Siccome inoltre nei punti di C:

$$\frac{d^2 B}{dx\,dy} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_y\right) B}{F'^2_z},$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_x\right)^2 B}{F'^2_z},$$

la (5) si trasforma nella:

$$(6) \qquad A\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_y\right) B\right\} = A_1\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_x\right)^2 B\right\}.$$

Osserviamo ora che la superficie

$$\Lambda \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_y\right) B = 0,$$

passa semplicemente per C, perché in C si annullano semplicemente le $\frac{\partial B}{\partial y}$, $\frac{\partial B}{\partial z}$. Ne segue che la superficie

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_x\right) \Lambda = 0,$$

luogo dei punti dello spazio i cui piani polari rispetto alle F, Λ, si tagliano in un medesimo punto della retta all'infinito del piano xz, passa semplicemente pei punti del gruppo N.

Ricordando ora (n° 2) che la superficie

$$\Lambda \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} F'_z - \frac{\partial}{\partial z} F'_x\right)^2 B = 0,$$

passa pure pei punti di N, avendo ivi con C incontro bipunto, dalla relazione (6) si rileva che A si annulla in questi punti, come volevasi provare.

§ 2. – Dimostrazione del teorema fondamentale.

5. In questo § stabiliremo un legame tra l'irregolarità di una superficie e l'esistenza d'integrali di differenziali totali di 1ª o di 2ª specie ad essa appartenenti. Per spianare la via nella ricerca di questo legame, giova premettere il seguente

Lemma. *Se per una superficie algebrica F l'ordine di connessione lineare è $p_1 > 1$, esistono sempre integrali di Picard della 2ª specie, appartenenti ad F, i quali non si possono ridurre alla 1ª specie per sottrazione di funzioni razionali.*

Invero, poiché i $p_1 - 1$ periodi di un integrale di 2ª specie appartenente ad F, sono assegnabili ad arbitrio [21], potremo costruire un integrale di 2ª specie, $J(x, y, z)$, che abbia tutti i periodi reali (od immaginarî puri). Tale integrale non può ridursi alla 1ª specie per sottrazione di una funzione razionale, perché altrimenti sopra una sezione piana generica della superficie, la differenza darebbe luogo ad un integrale abeliano di 1ª specie, i cui periodi, essendo determinati in funzione dei $p_1 - 1$ periodi di J, mediante relazioni lineari omogenee *a coefficienti interi* [22], risulterebbero tutti reali (o tutti immaginari puri): il che è notoriamente assurdo [23].

6. Ciò premesso passiamo a dimostrare il seguente

TEOREMA II. *Una superficie algebrica F, che abbia l'ordine di connessione lineare maggior d'uno, cioè che possegga integrali trascendenti di 2ª specie (o di 1ª), è irregolare.*

Consideriamo infatti un integrale trascendente di 2ª specie, $J(x, y, z)$, appartenente ad F, il quale non riducasi alla 1ª specie per sottrazione di funzioni razionali, e che divenga infinito del 1° ordine soltanto lungo una curva C, irriducibile e priva di punti multipli.

Indichiamo con φ la funzione razionale residua di rango 1, individuata da J sulla curva polare C, e con G il gruppo caratteristico di C, nei punti del quale l'integrale abeliano $J(x, \bar{y}, z)$ è regolare (n° 4).

Proveremo che il gruppo caratteristico G, individuato su C dall'integrale J, non è segato sulla curva stessa da nessun'altra curva del sistema lineare completo $|C|$.

Invero, se esistesse una curva $\overline{C}$ di $|C|$, segante il gruppo G, la funzione razionale $R(x, y, z)$ (determinata a meno di un fattore costante), che ha per curva di livello zero la $\overline{C}$ e per curva polare la C, in virtù del teorema dimostrato al n° 4 (ved. anche l'Oss. 2ª dello stesso n°), individuerebbe su C una funzione residua φ', che avrebbe gli stessi zeri e gli stessi poli di φ. Onde risulterebbe

$$\varphi = \lambda\varphi',$$

con λ costante, e quindi l'integrale

$$J' = J - \lambda R,$$

sarebbe di 1ª specie, contro il supposto.

Ne deriva che il sistema completo $|C|$ ha la serie caratteristica parziale, e quindi [24] che la superficie F è irregolare.

(21) Cfr. PICARD et SIMART, *loc. cit.*, t. I, Cap. IV, n° 23 e Cap. VI, n° 4.

(22) PICARD, Cap. IV, n° 22.

(23) Ved. ad esempio APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*. (Paris, Gauthier–Villars, 1895; n° 118).

(24) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali...*, n° 27. Ved. pure la mia Nota, *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (5) *12* (1903) [Nota XVI, p. 224; N.d.R.].

§ 3. – Riduzione di tutti gl'integrali di 2ª specie ad integrali che posseggano una sola curva polare del 1° ordine.

7. La dimostrazione svolta al n° 6 presuppone che sopra una superficie F, avente l'ordine di connessione lineare $p_1 > 1$, si possa sempre costruire un integrale di 2ª specie (coi periodi arbitrarî) dotato di una sola curva polare del 1° ordine, irriducibile e priva di punti multipli.

Questa proprietà, che ci viene suggerita da ragioni di analogia considerando le funzioni razionali come particolari integrali di 2ª specie, verrà stabilita nel presente §, ove dimostreremo la possibilità di ridurre, mediante sottrazione di funzioni razionali, ogni integrale di 2ª specie appartenente ad F, ad un integrale che possegga una sola curva polare del 1° ordine prefissata.

8. Cominceremo perciò a studiare le funzioni residue, individuate sopra le proprie curve polari, da un integrale di 2ª specie

$$J = \int R\,dx + S\,dy,$$

che divenga infinito rispettivamente degli ordini $s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$, lungo le curve irriducibili $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ prive di punti multipli o dotate al più di punti doppî nodali.

Per caratterizzare geometricamente il gruppo dei poli ed il gruppo degli zeri della funzione residua di rango s_1, $\varphi(xyz)$, individuata da J sulla curva polare C_1, non avremo che da estendere l'analisi del § 1.

Nell'esporre questa estensione, sorvoleremo su quei punti in cui non occorrono che leggeri cambiamenti di forma, trattenendoci invece su quei punti ove occorrono considerazioni nuove.

Supponendo di aver già assoggettata la F ad una trasformazione omografica generica, riterremo che le funzioni razionali R, S si annullino semplicemente lungo la curva all'infinito di F, e che non divengano infinite in nessun piano $y = \text{cost.}$ o $x = \text{cost.}$ (il che implica che nessuna delle curve polari di J appartenga a questi fasci).

Due casi si possono allora presentare: o la funzione R, che diviene infinita necessariamente degli ordini $s_1 + 1, s_2 + 1, \cdots, s_\varrho + 1$ lungo le curve $C_1, \cdots, C_\varrho$, possiede inoltre la curva polare del 1° ordine K, segata su F, fuori della linea doppia D, dalla superficie $F'_z = 0$; oppure la R non diviene infinita fuori delle curve $C_1, \cdots, C_\varrho$.

9. Fermandoci ad esaminare la prima ipotesi, si determinino due polinomi A, B aggiunti ad F, di gradi rispettivi $l - 1$ ed l, ed il secondo dei quali passi per K, semplicemente, e per le linee $C_1, \cdots, C_\varrho$, colle molteplicità

$s_1 + 1, s_2 + 1, \cdots, s_\varrho + 1$, in guisa che risulti

$$R(x, y, z) = \frac{A(x, y, z)}{B(x, y, z)}.$$

Si avverta che le due superficie A, B si taglieranno su F, fuori della linea doppia, lungo una curva M, la quale non ha alcun particolar legame colla funzione R.

Sviluppando in serie di Taylor–Cauchy il numeratore e il denominatore della R, riguardati come funzione di x, nell'intorno di un punto generico della curva C_1, e facendo poi il quoziente delle due serie, si trova, a meno d'un fattore numerico:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{A(x, y, z)\, F_z'^{s_1+1}}{\left(\frac{\partial}{\partial x} F_z' - \frac{\partial}{\partial z} F_x'\right)^{s_1+1} B}.$$

Indicando con E_1 la curva di livello zero della R, astrazion fatta dalla curva all'infinito di F, si prova, come al § 1, che la $\varphi(x, y, z)$ si annulla semplicemente nei punti del gruppo $(C_1 E_1)$, ed s_1 volte nei punti del gruppo $Q_1 = (C_1 K)$, in ciascun dei quali il pian tangente ad F è parallelo all'asse z; e inoltre che la φ diviene infinita d'ordine s_1 in ciascuno dei punti all'infinito di C_1 (costituenti il gruppo P_1).

All'infuori dei punti di P_1, i poli di $\varphi(x, y, z)$ cadono nei punti di C_1, diversi da quelli dei gruppi $(C_1 D)$, $(C_1 K)$, $(C_1 M)$, pei quali passa la superficie:

$$\Delta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} F_z' - \frac{\partial}{\partial z} F_x'\right)^{s_1+1} B = 0,$$

luogo di un punto (xyz) dello spazio la cui polare d'ordine $s_1 + 1$ rispetto a B, incontra il piano polare di (xyz) rispetto ad F, in un medesimo punto della retta all'infinito u del piano xz.

La superficie Δ, fuori della linea D, per cui essa passa colla molteplicità $s_1 + 1$, e fuori dei gruppi $(C_1 K)$ e $(C_1 M)$, per cui passa semplicemente, sega C_1 nei punti dei gruppi $(C_1 C_2), \cdots, (C_1 C_\varrho)$; nei punti del gruppo N_1, in ciascuno dei quali la C_1 è toccata da un piano $y =$ cost; e negli eventuali nodi di C_1. Ma per sapere quali ordini devonsi attribuire ai punti suddetti, come poli di φ, occorre valutare la molteplicità d'intersezione di C_1 e Δ in ciascuno di essi.

Ciò può farsi nel modo più rapido, osservando che la molteplicità d'intersezione di Δ e C_1, in un loro punto comune, dipende esclusivamente dalle proprietà di Δ e di C_1 nell'intorno di quel punto; sicché, se vogliamo valutare ad esempio la molteplicità d'intersezione in un punto del gruppo N_1, potremo supporre che la curva C_1 non abbia nodi, e che manchino le curve $M, K, C_2, \cdots, C_\varrho$; cioè che B seghi F, fuori della D, lungo la curva C_1, $(s_1 + 1)$–pla per B.

Diciamo allora n, π, ν, l'ordine, il genere ed il grado di C_1 (25), λ il numero dei punti del gruppo $(C_1 D)$, e teniamo presente la relazione:

$$n(m-4) - \lambda = 2\pi - 2 - \nu \quad (26). \tag{7}$$

La superficie Δ, d'ordine $l - s_1 - 1 + (s_1 + 1)(m-1)$, sega C_1 nei punti $(C_1 D)$, da contarsi ciascuno $s_1 + 2$ volte (ved. n° 2, a'), e ulteriormente nei punti del gruppo N_1, da contarsi ciascuno un numero incognito ξ di volte. Onde avremo:

$$2\xi(n + \pi - 1) = n(s_1 + 1)(m-2) + nl - (s_1 + 2)\lambda,$$

la quale, ricordando la (7), diviene:

$$2\xi(n + \pi - 1) = 2(s_1 + 1)(n + \pi - 1) + nl - (s_1 + 1)\nu - \lambda. \tag{8}$$

Ora si osservi che un'aggiunta d'ordine l, diversa da B, sega C_1, fuori, della D, in $nl - \lambda$ punti, i quali costituiscono la completa intersezione di C_1 con una curva del sistema $|(s_1 + 1) C_1|$. Dunque:

$$nl - \lambda = (s_1 + 1)\nu,$$

e quindi dalla (8) si trae

$$\xi = s_1 + 1.$$

Similmente, per determinare la molteplicità d'intersezione di Δ con C_1 in ciascun punto di $(C_1 C_2)$, potremo supporre che C_1 sia ancora priva di nodi, e che B seghi F, fuori della D, lungo le curve C_1, C_2, rispettivamente $(s_1 + 1)$-pla ed $(s_2 + 1)$-pla per B.

La superficie Δ sega C_1, fuori della D, in

$$n(s_1 + 1)(m-2) + nl - (s_1 + 2)\lambda$$

punti, dei quali $2(n + \pi - 1)$, da contarsi ciascuno $s_1 + 1$ volte, cadono nei punti di contatto delle tangenti di C_1 appoggiate ad u, e gli altri nei δ punti comuni a C_1, C_2, da contarsi ciascuno η volte. Onde avremo:

$$n(s_1 + 1)(m-2) + nl - (s_1 + 2)\lambda = 2(s_1 + 1)(n + \pi - 1) + \eta\delta.$$

Tenendo presente la (7), questa relazione dà:

$$nl - (s_1 + 1)\nu - \lambda = \eta\delta.$$

Un'aggiunta d'ordine l, diversa da B, sega C_1, fuori della D, in $nl - \lambda$ punti, che costituiscono il gruppo comune a C_1 e ad una curva del sistema $|(s_1 + 1) C_1 + (s_2 + 1) C_2|$. Onde:

$$nl - \lambda = (s_1 + 1)\nu + (s_2 + 1)\delta,$$

(25) Cfr. per esempio ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, Atti della R. Acc. di Torino, (1901); n° 12.

(26) Ved. la mia Nota, *Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, 37 (1902); n° 1 [Nota X, p. 104; N.d.R.].

la quale, confrontata colla precedente, porge

$$\eta = s_2 + 1.$$

Supponendo infine che la curva C_1 possegga d nodi, e che B seghi F, fuori della D, soltanto lungo la curva C_1, $(s_1 + 1)$-pla per B, determiniamo la molteplicità d'intersezione di Δ con C_1 in ciascuno di questi nodi.

La relazione (7), viene sostituita in tal caso dalla

$$n(m-4) - \lambda = 2\pi - 2 - \nu + 2d, \tag{7'}$$

ove π denoti il genere *effettivo* di C_1, e ν il suo grado *virtuale*, calcolato prescindendo dai d punti doppî.

Ciò posto, osserviamo che la Δ sega C_1 in

$$n(s_1 + 1)(m-2) + nl - (s_1 + 2)\lambda$$

punti, dei quali $2(s_1 + 1)(n + \pi - 1)$ cadono nei punti del gruppo N_1, e $2\zeta d$ nei punti doppî: denotando con ζ la molteplicità d'intersezione di Δ con ciascuno dei rami di C_1 aventi l'origine in un nodo. Onde avremo:

$$2(s_1 + 1)(n + \pi - 1) + 2\zeta d = n(s_1 + 1)(m-2) + nl - (s_1 + 2)\lambda,$$

la quale, tenendo conto della (7'), porge:

$$2\zeta d = 2(s_1 + 1)d + nl - (s_1 + 1)\nu - \lambda.$$

Poiché un'aggiunta d'ordine l, diversa da B, sega F, fuori della D, lungo una curva del sistema $|(s_1 + 1)\overline{C}_1|$, ove $\overline{C}_1$ rappresenta la curva C_1 virtualmente priva dei punti doppî, verrà:

$$nl - \lambda = (s_1 + 1)\nu,$$

e quindi

$$\zeta = s_1 + 1.$$

Riassumendo, possiamo dire che la $\varphi(x,y,z)$ si annulla semplicemente nei punti di $(C_1 E_1)$ ed s_1 volte nei punti di Q_1; e che diviene infinita d'ordine s_1 in ciascun punto del gruppo P_1; infinita d'ordine $(s_1 + 1)$ nei punti di N_1, e nelle origini di ciascuno dei due rami che s'incrociano in un nodo di C_1; e infinita d'ordine $(s_i + 1)$ nei punti di $(C_1 C_i)$ $(i = 2, \cdots, \varrho)$.

Ma, come nel § 1, anche qui si presenta un'ulteriore riduzione tra gli zeri e tra i poli sopra enumerati.

Invero, poiché in un punto di N_1, o in un punto doppio di C_1, l'integrale $J(x,\bar{y},z)$ presenta un polo d'ordine $2s_1$, proveniente dalla coincidenza di due poli d'ordini s_1 variabili su C_1, la funzione razionale $R(x,\bar{y},z)$ dovrà ivi presentare un polo d'ordine $2s_1 + 1$; e dunque bisognerà che, quando un piano $y = \bar{y}$ tende a passare per uno dei punti suddetti, non soltanto due poli d'ordine $s_1 + 1$ della $R(x,\bar{y},z)$, tendano al punto stesso, ma vi tenda pure uno zero (del 1° ordine); cioè la curva E_1 dovrà passare per quel punto.

Similmente, dal fatto che la $R(x,\bar{y},z)$ presenta un polo d'ordine s_1+s_i+1 in ciascun punto di (C_1C_i), si deduce che ogni tal punto appartiene alla curva E_1 [27].

Osservando inoltre che ogni punto comune alle curve C_1 ed E_1, all'infuori dei punti ultimamente nominati, è un polo d'ordine $s_1 - 1$ per l'integrale abeliano $J(x,\bar{y},z)$, si conclude col

TEOREMA III. *Se $J(x,y,z)$ è un integrale semplice di 2ª specie, appartenente alla superficie $F(x,y,z)=0$, il quale divenga infinito rispettivamente degli ordini $s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$, lungo le curve irriducibili $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$, dotate al più di punti doppî nodali; e se N_i denota il gruppo dei punti di contatto delle tangenti di C_i parallele al piano xz, P_i il gruppo all'infinito di C_i, ed X_i l'insieme delle coppie di punti che cadono negli eventuali nodi della curva stessa, i poli della funzione residua φ_i di rango s_i, individuata da J lungo la curva polare C_i, formano il gruppo*:

$$s_i(N_i + P_i + X_i) + s_1(C_1\,C_i) + \cdots + s_{i-1}(C_{i-1}\,C_i) + \\ + s_{i+1}(C_{i+1}\,C_i) + \cdots + s_\varrho(C_i\,C_\varrho).$$

Inoltre, se Q_i è costituito dai punti di C_i ove i piani tangenti ad F son paralleli all'asse z, ed Y_i dai punti di C_i ove l'integrale abeliano $J(x,\bar{y},z)$ ha poli d'ordine $s_i - 1$, gli zeri di φ_i formano il gruppo:

$$s_iQ_i + Y_i.$$

Osservazione. Veramente prima di arrivare a questa conclusione, ci restava da esaminare l'ipotesi che la funzione razionale R non divenisse infinita fuori delle curve $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$. Abbiamo tralasciato quest'esame, perché non presentava ormai nessuna difficoltà. Osserveremo soltanto che nell'ipotesi suddetta, attesa la particolar natura della funzione R, il gruppo Y_i contiene come parte Q_i (cfr. col nº 3).

10. Vediamo ora di estendere la proprietà che ci condusse a definire il gruppo caratteristico, individuato sopra la propria curva polare, da un integrale che divenga infinito del 1º ordine, lungo una sola curva irriducibile (nº 4).

Tenendo conto del fatto che la jacobiana della F, di un'altra superficie passante per la curva C_i, e di due piani qualunque dello spazio, sega C_i fuori della linea doppia D, oltreché nel gruppo N_i, anche nel gruppo X_i, definito nell'enunciato del teorema precedente, avremo (come al nº 2) la relazione:

$$(9) \qquad Q_i \equiv 3P_i + T_i + X_i + (H, C_i) - (H + \overline{C}_i, C_i),$$

ove T_i denota un gruppo canonico di C_i, e $\overline{C}_i$ la curva stessa, virtualmente priva de' suoi punti doppî.

(27) Quest'affermazione e la precedente derivano anche dalla condizione d'integrabilità (nº 4, Oss. 3ª).

Quanto alla curva H, essa è assoggettata alla sola condizione che il sistema lineare $|H + \overline{C}_i|$ sia infinito e non contenga C_i come parte fissa.

Si chiamino $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \cdots, \overline{C}_\varrho$ le ϱ curve polari, virtualmente prive dei loro punti doppî, e s'indichi con U la curva composta

$$s_1 \overline{C}_1 + s_2 \overline{C}_2 + \cdots + s_{i-1} \overline{C}_{i-1} + s_{i+1} \overline{C}_{i+1} + \cdots + s_\varrho \overline{C}_\varrho .$$

Se V è una curva tale che il sistema lineare $|U + V + (s_i - k) \overline{C}_i|$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, s_i - 1)$ sia infinito, e non contenga C_i come parte fissa, si può far coincidere successivamente la H colle curve

$$U+V+(s_i-1)\overline{C}_i, \quad U+V+(s_i-2)\overline{C}_i, \cdots, \quad U+V+\overline{C}_i, \quad U+V.$$

Sommando membro a membro le s_i relazioni, analoghe alla (9), che così si ottengono, viene:

$$s_i Q_i \equiv 3 s_i P_i + s_i T_i + s_i X_i + (U+V, C_i) - (U+V+s_i \overline{C}_i, C_i).$$

Poiché (n° 2):

$$N_i \equiv 2 P_i + T_i ,$$

avremo pure:

$$s_i Q_i \equiv s_i (N_i + P_i + X_i) + (U+V, C_i) - (U+V+s_i \overline{C}_i, C_i),$$

la quale, confrontata colla relazione:

$$s_i (N_i + P_i + X_i) + (U, C_i) \equiv s_i Q_i + Y_i ,$$

dimostrata al n° 9, porge:

$$Y_i \equiv (U+V+s_i \overline{C}_i, C_i) - (V, C_i).$$

Se in particolare la curva

$$U + s_i \overline{C}_i = \sum_{j=1}^{j=\varrho} s_j \overline{C}_j$$

individua un sistema lineare infinito, avremo:

$$Y_i = (\Sigma s_j \overline{C}_j, C_i);$$

cioè, in parole:

TEOREMA IV. *Allorquando la curva $s_1 \overline{C}_1 + s_2 \overline{C}_2 + \cdots + s_\varrho \overline{C}_\varrho$, costituita dalle ϱ curve polari dell'integrale $J(x, y, z)$, considerate come virtualmente prive di punti doppî, individua un sistema lineare infinito, il gruppo Y_i dei punti di C_i, ove l'integrale abeliano $J(x, \bar{y}, z)$ ha poli d'ordine $s_i - 1$, equivale al gruppo segato sulla C_i da una curva del sistema $|s_1 \overline{C}_1 + \cdots + s_\varrho \overline{C}_\varrho|$.*

In ogni caso Y_i si chiamerà il *gruppo singolare individuato da J sulla curva polare C_i.*

Osservazione. In particolare *quando J riducesi ad una funzione razionale, quei punti base del fascio $J = cost$, che appartengono ad una curva polare, costituiscono ivi il relativo gruppo singolare.*

Ciò segue senz'altro dal n° 9; ma lo si può verificare direttamente, senza cioè riguardare la funzione razionale come un integrale di differenziale totale.

11. Per ottenere la riduzione che costituisce l'oggetto di questo §, ci occorre pure il

TEOREMA V. *Ogni integrale semplice di 2ª specie appartenente alla superficie algebrica F, si può ridurre, mediante sottrazione di una conveniente funzione razionale, ad un integrale che divenga infinito soltanto lungo curve di un fascio fissato.*

Svilupperemo la dimostrazione supponendo che il fascio fissato sia segato su F dai piani $y = \text{cost}$, e che la retta all'infinito comune a questi piani, tagli F in punti distinti. A questo caso ci possiamo sempre ridurre con una trasformazione birazionale, se il fascio dato possiede punti base semplici ed appartiene ad un sistema lineare semplice, almeno ∞^3 (28). Non ci occuperemo di togliere questa restrizione, perché ciò basta per l'applicazione che abbiamo in vista.

Se m è l'ordine e π il genere delle sezioni piane della superficie $F(x,y,z) = 0$, è possibile determinare 2π polinomi $U_1(x,y,z)$, $U_2(x,y,z), \cdots, U_{2\pi}(x,y,z)$, di grado $2m - 4$ in x, z, *aggiunti* ad F, e tali che per un valore generico $\bar{y}$ di y

$$\int \frac{U_1}{F_z'}\,dx, \int \frac{U_2}{F_z'}\,dx, \cdots, \int \frac{U_{2\pi}}{F_z'}\,dx,$$

sieno 2π integrali abeliani di 2ª specie, algebricamente distinti, per la curva $F(x\bar{y}z) = 0$; ed aventi i poli soltanto negli m punti all'∞ della curva stessa (29).

Se la superficie F possiede integrali *trascendenti* di 2ª specie, se cioè l'ordine di connessione lineare della F è $p_1 > 1$ (30), si potranno determinare 2π funzioni razionali di y, non tutte identicamente nulle, $a_1\, a_2 \cdots a_{2\pi}$, per modo che l'integrale:

$$\int \frac{a_1\, U_1 + a_2\, U_2 + \cdots + a_{2\pi}\, U_{2\pi}}{F_z'}\,dx = \int U\,dx,$$

abbia tutti i suoi periodi indipendenti da y (31). Allora con un noto procedimento di Picard (32), si costruisce una funzione razionale $V(x,y,z)$, tale che:

$$J = \int U\,dx + V\,dy,$$

è un integrale trascendente di 2ª specie.

(28) Si noti che se tale sistema non ha punti base, la trasformazione si può ottenere senza introdurre curve eccezionali.

(29) PICARD et SIMART, *loc. cit.*, t. I, pp. 162, 164.

(30) PICARD et SIMART, *loc. cit.*, t. I, p. 150.

(31) *Ibidem*, Capitolo IV, § 23.

(32) *Ibidem*, Capitolo IV, § 23.

Poiché sopra un piano generico $y = \text{cost}$, quest'integrale dà luogo ad un integrale abeliano di 2ª specie, che diviene infinito soltanto nei punti base del fascio fissato, si conclude che la curva polare di J sega una curva generica di quel fascio, soltanto nei punti base, e quindi che essa si compone di curve del fascio stesso.

Si ricordi ora che la determinazione delle a dipende dalla scelta arbitraria di $p_1 - 1$ costanti (i periodi distinti degli integrali di 2ª specie appartenenti ad F), cosicché, se si prendono successivamente come valori di queste costanti, gli elementi delle orizzontali di un determinante non nullo, di ordine $p_1 - 1$, si vengono a costruire in corrispondenza $p_1 - 1$ integrali *algebricamente distinti* $J_1, J_2, \cdots, J_{p_1-1}$, analoghi ad J, cioè aventi per curve polari soltanto curve del fascio $y = \text{cost}$.

Ciò posto, se I è un integrale qualunque di 2ª specie appartenente ad F, esisteranno dei numeri $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{p_1-1}$ ed una funzione razionale $\Phi(x, y, z)$, tali che

$$I = \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \cdots + \lambda_{p_1-1} J_{p_1-1} + \Phi(x, y, z),$$

onde l'integrale $I - \Phi$ diverrà infinito soltanto lungo curve del fascio $y = \text{cost}$, c. d. d.

12. Passiamo infine a ridurre gl'integrali di 2ª specie, appartenenti alla superficie algebrica F, ad integrali che posseggano una sola curva polare del 1° ordine.

A tal uopo fissiamo sulla superficie F un sistema lineare privo di punti base, che sia immagine della sezioni iperpiane d'una superficie F', priva di punti multipli, riferita birazionalmente ad F; e stacchiamo dentro a questo sistema, un fascio generico $|C|$, privo di curve spezzate e dotato di punti base semplici, il cui gruppo denotiamo con B.

Un integrale qualunque di 2ª specie appartenente ad F, si può ridurre, per sottrazione di una funzione razionale, ad un integrale $J(x, y, z)$ che divenga infinito soltanto lungo curve del fascio fissato.

Diremo $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ le curve polari di J ed $s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$ gli ordini d'infinito relativi a queste curve. Pel modo generico con cui è stato scelto il fascio $|C|$, le C_i saranno prive di punti multipli od al più dotate di punti doppî nodali.

Se m' è l'ordine di F', le forme d'ordine $k_1 \geqq m' - 2$, passanti per gli eventuali nodi di una sezione iperpiana, la segano altrove nei gruppi di una serie lineare completa [33]; onde le curve del sistema completo $|k_1 C|$, passanti per i nodi di C_1, segheranno ulteriormente su questa curva una serie lineare completa.

Ciò posto, costruiscasi una curva U_1 del sistema $|k_1 C|$, irriducibile, priva di punti multipli e passante pei nodi di C_1, ed una curva V_1 del sistema

(33) Cfr. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare...*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 7.

$|(k_1 + s_1 + \cdots + s_\varrho) C|$, la quale passi per quei nodi e seghi altrove C_1 nel gruppo $Y_1 + (C_1 U_1) - X_1$, ove Y_1 è il gruppo singolare individuato da J su C_1, ed X_1 è l'insieme delle coppie che cadono nei punti doppî di C_1. Ciò è sempre possibile, perché (teor. IV):

$$Y_1 + (C_1 U_1) - X_1 \equiv ((s_1 + \cdots + s_\varrho) C, C_1) + (k_1 C, C_1) - X_1 \equiv$$
$$\equiv (k_1 + s_1 + \cdots + s_\varrho) B - X_1,$$

e d'altronde le curve del sistema $|(k + \sum s_j) C|$, passanti pei nodi di C_1, segano altrove su questa curva una serie *completa*.

Diciamo ora $R(x, y, z)$ la funzione razionale (determinata a meno di un fattore costante), che diviene infinita degli ordini $1, s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$ lungo le curve $U_1, C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$, e che si annulla lungo la V_1.

La funzione residua φ'_1, di rango s_1, individuata da R su C_1, ha gli stessi zeri e gli stessi poli della funzione analoga φ_1, relativa ad J; in primo luogo perché l'influenza che eserciterebbe sul gruppo dei poli di φ'_1 la curva polare U_1, è neutralizzata dal passaggio di V_1 per ogni punto $(C_1 U_1)$; ed in secondo luogo perché la curva V_1 segna ulteriormente su C_1 il gruppo Y_1 (teor. III, IV, e Oss. 1ª del nº 4). Avremo dunque:

$$\varphi_1 = \lambda \varphi'_1$$

con λ costante; onde lungo C_1 l'integrale:

$$J_1 = J - \lambda R,$$

diviene infinito d'ordine $s_1 - 1$. Inoltre J_1 diviene infinito degli ordini $1, s_2, \cdots, s_\varrho$ lungo le curve $U_1, C_2, \cdots, C_\varrho$.

Mediante le operazioni precedenti si abbassa dunque d'un'unità l'ordine d'infinito di C_1 introducendo una *nuova* curva polare del 1º ordine, irriducibile e priva di punti multipli, appartenente al sistema $|k_1 C|$.

Proseguendo ad applicare il concetto esposto, si arriva ad un integrale I il quale possiede soltanto curve polari del 1º ordine, irriducibili, prive di singolarità ed appartenenti a sistemi multipli di $|C|$. Sieno $U_1 U_2 \cdots U_r$ queste curve polari, e supponiamo che appartengano rispettivamente ai sistemi $|k_1 C|, |k_2 C|, \cdots, |k_r C|$. Poiché, se h è abbastanza grande, il sistema completo $|hC|$ ed i multipli successivi di $|C|$, segano serie complete sopra ciascuna delle U_i, dicendo H una curva di $|hC|$, irriducibile e priva di punti multipli, sarà possibile costruire una curva L_1 del sistema $|(h + \sum k_i) C|$, la quale passi pei punti (HU_1) e seghi altrove U_1 nel relativo gruppo singolare.

Togliendo da I una funzione razionale, scelta in modo conveniente tra quelle che divengono infinite del 1º ordine lungo la curva $H + U_1 + \cdots + U_r$, e che si annullano lungo L_1, avremo un integrale I_1 che diverrà infinito del 1º ordine le curve $H, U_2, \cdots, U_r$. Dicasi ora L_2 una curva del sistema $|(h + k_2 + \cdots + k_r) C|$, la quale passi pel gruppo singolare individuato da I_1 su U_2: una tal curva esiste certamente, perché questo gruppo singolare

è equivalente ad un gruppo $((h + k_2 + \cdots + k_r) C , U_2)$ (teor. IV). Togliendo da I_1 una conveniente funzione razionale, che possegga le stesse curve polari di I_1 e che si annulli lungo L_2, avremo un integrale, I_2, che possiede le sole curve polari del 1° ordine $H, U_3 , \cdots , U_r$.

Così proseguendo si perviene ad un integrale che possiede la sola curva polare H.

Si osservi che il procedimento di riduzione può talora abbreviarsi, pel fatto che quando, mediante la sottrazione di una funzione razionale, si abbassa l'ordine d'infinito di una curva polare, vengono ad abbassarsi in conseguenza gli ordini d'infinito di altre curve polari.

Riassumendo, possiamo enunciare il

TEOREMA VI. *Ogni integrale semplice di 2ª specie appartenente ad una superficie F, per sottrazione di funzioni razionali, può ridursi ad un integrale, che divenga infinito del 1° ordine lungo una curva irriducibile e priva di punti multipli, o che si conservi finito su tutta la superficie.*

Con ciò *il teorema fondamentale del* § 2 *risulta dimostrato senza nessuna restrizione.*

Osservazione. Se vogliamo, potremo supporre che la curva H, di cui sopra, appartenga ad un sistema regolare; perché facendo un multiplo abbastanza alto del sistema delle sezioni iperpiane di una superficie priva di singolarità, si ottiene appunto un sistema regolare (34).

13. Possiamo ora determinare maggiormente il teorema fondamentale, dimostrando il

TEOREMA VII. *Data una superficie algebrica F, di generi, geometrico ed artmetico, P_g e P_a, l'irregolarità $P_g - P_a$ della superficie è almeno uguale all'eccesso del numero degli integrali semplici di 2ª specie algebricamente distinti, sul numero degli integrali di 1ª specie linearmente indipendenti.*

In base al teor. VI, potremo assumere come *sistema fondamentale* di tutti gl'integrali di 2ª specie appartenenti ad F, $p_1 - 1$ integrali algebricamente distinti, che divengano infiniti del 1° ordine lungo una curva H, irriducibile e priva di punti multipli, appartenente ad un sistema lineare completo di dimensione $d \geq 1$.

Più in particolare, se gl'integrali di 1ª specie linearmente indipendenti, distesi sulla superficie F, sono $I_1 , I_2 , \cdots , I_q$, potremo comporre il sistema fondamentale mediante questi q integrali e mediante $p_1 - 1 - q = s$ integrali $J_1 , J_2 , \cdots , J_s$, che divengano infiniti del primo ordine soltanto lungo H; per modo che il determinante di ordine $p_1 - 1$ formato coi periodi di tutti gl'integrali $I_1 , I_2 , \cdots , I_q , J_1 , J_2 , \cdots , J_s$, sia diverso da zero. – Ed invero, essendo soddisfatta tale condizione, i $q + s$ integrali risultano algebricamente distinti, e quindi formano un sistema fondamentale.

(34) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali...*, n° 43.

Fatta questa scelta, è certo che nessun integrale del tipo

$$\mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_s J_s,$$

ove le μ son costanti non tutte nulle, potrà ridursi alla 1ª specie per sottrazione di funzioni razionali, perché se fosse

$$\mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_s J_s - \text{funzione razionale} = h_1 I_1 + h_2 I_2 + \cdots + h_q I_q,$$

gl'integrali $I_1, \cdots, I_q, J_1, \cdots, J_x$ non sarebbero distinti.

Ne deriva (n° 6) che il gruppo caratteristico staccato su H da un integrale $\sum \mu_i J_i$, non può appartenere alla serie segata su H dal sistema completo $|H|$.

Diciamo ora $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ le funzioni razionali residue, individuate su H dagl'integrali $J_1, J_2, \cdots, J_s$, e $G_1, G_2, \cdots, G_s$ i gruppi caratteristici staccati su H da questi stessi integrali. Siccome (teor. I) le φ hanno gli stessi poli, ed inoltre il gruppo Q, che resta togliendo G_i dagli zeri di φ_i, non muta, al variare della φ_i nel sistema $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$; potremo determinare una superficie $f(x,y,z) = 0$, segante H nel gruppo dei poli delle φ ed altrove in un gruppo T, ed s superficie $l_1 = 0, l_2 = 0, \cdots, l_s = 0$, che passino tutte pei gruppi T, Q, e che taglino altrove H rispettivamente nei gruppi $G_1, G_2, \cdots, G_s$; in guisa che nei punti di H risulti

$$\varphi_1 = \frac{l_1(x,y,z)}{f(x,y,z)}, \varphi_2 = \frac{l_2(x,y,z)}{f(x,y,z)}, \cdots, \varphi_s = \frac{l_s(x,y,z)}{f(x,y,z)}.$$

Ciò posto, la serie lineare g, di dimensione minima, che contiene $G_1, G_2, \cdots, G_s$, vien segata su H, fuori dei gruppi T, Q, dal sistema lineare:

$$\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \cdots + \mu_s l_s = 0;$$

sicché, se i gruppi G fossero linearmente dipendenti, esisterebbero per le μ valori non tutti nulli, tali che la relazione precedente risulterebbe soddisfatta per ogni punto di H. Onde per valori non tutti nulli delle μ, si avrebbe identicamente, rispetto al punto scorrente su H:

$$\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots + \mu_s \varphi_s = 0,$$

e quindi l'integrale $\mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_s J_s$ sarebbe di 1ª specie; il che, come abbiamo osservato, non può accadere.

Ne segue che i gruppi G sono indipendenti e che la dimensione della serie lineare g, che li *congiunge*, è $s - 1$.

Se ora osserviamo che ogni integrale $J = \mu_1 J_1 + \cdots + \mu_s J_s$ dà luogo su H ad una funzione residua $\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \cdots + \mu_s \varphi_s$, e quindi ad un gruppo caratteristico segato su H, fuori di T, Q, dalla superficie

$$l = \mu_1 l_1 + \cdots + \mu_s l_s;$$

e che viceversa a partire da ogni gruppo della serie g, si costruisce un integrale $\mu_1 J_1 + \cdots + \mu_s J_s$, che stacca quel gruppo; si conclude che g non ha *nessun* gruppo comune colla serie, di dimensione $d - 1$, segnata su H dal

sistema completo $|H|$. Dicendo δ la dimensione della serie caratteristica completa, esistente su H, avremo dunque:

$$s - 1 + d - 1 \leq \delta - 1,$$

e siccome:

$$\delta \leq d - 1 + P_g - P_a \text{ (35)},$$

risulterà:

$$s \leq P_g - P_a.$$

[Dopo la pubblicazione della Nota dei Lincei, ove presentai un riassunto di questa Memoria (settembre 1904), la teoria delle superficie algebriche e degl'integrali di Picard, si è arricchita di altri risultati essenziali, dei quali non posso oggi tacere. — Anzitutto, nel dicembre 1904, il sig. Enriques riuscì a costruire sopra ogni superficie irregolare, sistemi continui completi, non lineari, di curve algebriche; e questa importante caratterizzazione geometrica delle superficie irregolari, lo condusse (mediante l'applicazione del teorema di Humbert, citato nell'Introduzione), al teorema che *ogni superficie irregolare è dotata di integrali trascendenti di 1ª e (quindi) di 2ª specie* (R. Acc. di Bologna, 1904). — Restava così invertito il teorema da me dimostrato in settembre. — Nel gennaio 1905 il sig. Picard ed io, dimostrammo contemporaneamente, e per vie diverse, la relazione $r = q + P_g - P_a$, ove q, r sono i numeri degl'integrali indipendenti di 1ª e di 2ª specie, appartenenti alla superficie F di generi P_g, P_a (Comptes rendus, 16 gennaio, e R. Acc. di Torino, 22 gennaio [Nota XXI, p. 281; N.d.R.]); e pochi giorni dopo il sig. Castelnuovo, col sussidio del teorema geometrico di Enriques, pervenne alla disuguaglianza $q > P_g - P_a$, che unita alla mia disuguaglianza $r - q \leq P_g - P_a$ (n° 13 di questa Memoria), conduce facilmente alle relazioni $q = P_g - P_a$, $r = 2(P_g - P_a)$ (Comptes rendus, 23 gennaio. — Ved. pure la Memoria di Castelnuovo, tra i Rendiconti dei Lincei, maggio–giungo 1905). — Dal complesso di queste ricerche risulta dunque che *il numero degl'integrali semplici di 1ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica, uguaglia l'irregolarità della superficie, ed il numero degl'integrali di 2ª specie è uguale al doppio dell'irregolarità.* — Di questo stesso teorema si trovano accennate altre dimostrazioni, in due Note dei Comptes rendus (3 aprile), dovute l'una al sig. Picard e l'altra a me (Nota XXIV, p. 294; N.d.R.). La mia dimostrazione è esposta diffusamente in una Memoria intitolata: *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, in corso di stampa negli Annali di Matematica (cfr. Memoria XXV, p. 296; N.d.R.)].

(35) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali...*, n° 30. — Ved. pure la mia Nota citata, *Sulla deficienza della serie caratteristica....*

XXI.

SULLA DIFFERENZA TRA I NUMERI DEGLI INTEGRALI DI PICARD DELLA 1ª E DELLA 2ª SPECIE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 254–262 (*).

Il teorema da me recentemente dimostrato, circa l'irregolarità delle superficie algebriche che hanno la connessione lineare $p_1 > 1$, cioè che posseggono integrali di Picard trascendenti e della 2ª specie (1), è stato ora invertito dal sig. Enriques, il quale, mediante la rappresentazione sul piano multiplo, è riuscito a costruire sopra ogni superficie irregolare sistemi continui di curve, non contenuti in sistemi lineari (2): donde, mediante un noto procedimento di Humbert (3), segue l'esistenza sulla superficie di integrali di 1ª specie, e quindi il fatto che la connessione lineare è > 1.

Io avevo già composto una dimostrazione diretta di questo ultimo fatto, la quale mi conduceva inoltre alla conclusione che il numero r degl'integrali di 2ª specie algebricamente distinti ($r = p_1 - 1$), supera di $p = P_g - P_a$ unità il numero q degl'integrali di 1ª specie linearmente indipendenti; P_g, P_a denotando i generi, geometrico e aritmetico, della superficie. Ma alcune difficoltà incontrate nei dettagli del ragionamento, mi hanno consigliato a differirne la pubblicazione, tanto più che l'uguaglianza $r = p + q$, si può stabilire, in modo rapido ed elegante, come si vedrà in questa Nota, una volta ammessa la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo (4), che è stata dimostrata dal sig. Enriques nel lavoro testè citato.

Tuttavia debbo avvertire che, a quanto sembra, la inversione diretta del teorema enunciato nella mia Nota della R. Accademia dei Lincei, conduce

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 22 gennaio 1905.

(1) Nella mia Nota, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (1904), 2° semestre, trovasi riassunta la dimostrazione, che è esposta, con tutti i dettagli, in una Memoria in corso di stampa nei « Mathematische Annalen » [queste « Opere », XIX e XX, pp. 247 e 252; N.d.R.].

(2) Il lavoro del prof. Enriques, su tale argomento, sta per uscire nei « Rend. della R. Accademia di Bologna ».

(3) Cfr. HUMBERT, *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, Journal de Math., (1894).

(4) Per la definizione della serie caratteristica di un sistema continuo ved. la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *39* (1904) [Nota XVIII, p. 287; N.d.R.].

pure a costruire sulla superficie sistemi completi di curve, non lineari; ma su ciò spero di poter ritornare [5].

1. Diciamo S un sistema algebrico irriducibile ∞^1 (senza punti base) di curve algebriche irriducibili, tracciate sulla superficie F di equazione

$$F(x,y,z) = 0,$$

e

$$\varphi(\xi,\eta) = 0$$

una curva piana i cui punti rappresentino le curve di S. Con n, ν indicheremo il *grado* e l'*indice* del sistema, cioè risp. il numero dei punti comuni a due curve di S, e il numero delle curve del sistema che passano per un punto di F. Tra la curva φ e la superficie F nasce una corrispondenza algebrica, ove ad un punto ξ di φ [6] si associno tutti i punti della curva di S che corrisponde a ξ. Se, come supponiamo, $\nu > 1$ ed il sistema S non è composto con un'involuzione, cioè le ν curve di S che passano per un punto generico di F, non passano tutte in conseguenza per altri punti della superficie, su φ si ha una ∞^2, Σ, di gruppi di ν punti, razionalmente identica ad F: ogni gruppo è immagine di un sol punto di F, e per due punti di φ passano n gruppi (cioè n è l'*indice* e ν il *grado* del sistema Σ).

Senza introdurre alcuna restrizione, possiamo supporre, una volta per sempre, che il sistema S non abbia alcun legame particolare col fascio delle curve segate su F dai piani $y =$ cost; e che inoltre il punto a di φ, che rappresenta una curva fissata C di S, sia al finito e semplice per la φ, e che non presenti alcuna particolarità rispetto agli assi di riferimento.

Costruiamo su φ un integrale abeliano $\omega(\xi,\eta)$, dovunque finito, tranne che nel punto a, ove presenti un polo del 1° ordine. Allora, dicendo $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ i ν punti di φ corrispondenti al punto x di F, la somma

$$\omega(\xi_1, \eta_1) + \omega(\xi_2, \eta_2) + \cdots + \omega(\xi_\nu, \eta_\nu)$$

si trasformerà in un *integrale di Picard*

$$J(x,y,z) = \int A\,dx + B\,dy,$$

(5) [Dopo aver licenziato il presente lavoro, ho saputo che il sig. Castelnuovo aveva inviato all'Accad. delle Scienze di Parigi una Nota (presentata il 23 gennaio), in cui egli dimostra sommariamente che il numero q degl'integrali di 1ª specie è uguale a $P_g - P_a$; donde, mediante il teorema enunciato al n° 2 della mia Nota lincea, si ricava, per altra via, che $r = p + q$. — La stessa relazione ($r = p + q$), che il sig. Enriques ebbe la cortesia di enunciare per mio incarico, in una sua Nota, inserita nei « Comptes rendus » dell'Accad. suddetta (seduta del 16 gennaio), trovasi dimostrata (coll'aiuto di una certa equazione differenziale), nei « Comptes rendus » dello stesso giorno, dal sig. Picard, insieme al teorema fondamentale della mia Nota lincea (29 gennaio 1905)].

(6) Quando non vi sia ambiguità, seguendo l'uso comune, un punto di φ o di F s'indicherà colla lettera che ne designa la 1ª coordinata.

relativo alla superficie F (A, B son funzioni razionali del punto (x, y, z) variabile su F). L'integrale J si conserverà finito in ogni punto di F non appartenente alla curva C; ma quando x tende ad un punto generico di C, uno dei termini della somma $\sum_{i=1}^{\nu} \omega(\xi_i, \eta_i)$ tende all'infinito, senza che lo stesso accada di nessuno degli altri, onde anche J tenderà all'infinito.

È pur facile vedere che la curva C è *polare* per l'integrale J, cioè che trattasi di un integrale di 2ª specie. Invero, mentre il punto x di F descrive un ciclo lineare σ, infinitamente piccolo, avvolgente il punto generico x_0 di C, l'integrale J aumenta della somma dei valori di $\omega(\xi, \eta)$ lungo i ν cicli infinitamente piccoli, che corrispondono a σ. Ma siccome in ogni punto di φ è nullo il residuo della funzione razionale integranda $\frac{d\omega}{d\xi}$, si conclude che il valore di J lungo σ è nullo, e quindi che il punto x_0 è un polo.

Lo stesso fatto si prova colle considerazioni che andiamo ad esporre, dalle quali risulta di più che per l'integrale J la C è una *curva polare del 1° ordine*, cioè che l'integrale $J(x, y_0, z)$, relativo alla sezione E di F col piano generico $y = y_0$, presenta un polo del 1° ordine in ciascuno dei punti ove E incontra C.

La corrispondenza tra φ ed F subordina una corrispondenza algebrica tra i punti delle curve φ ed E, nella quale ad ogni punto ξ di φ, corrispondono i punti in cui la curva E è segata dalla curva di S, omologa di ξ. Fissiamo l'attenzione sopra uno dei punti (x_0, y_0, z_0) in cui E sega C, ed osserviamo che il punto x_0 non è né doppio né di diramazione per la suddetta corrispondenza; giacché risulterebbe doppio solo se coincidesse col punto di contatto di un piano $y = \text{cost}$, tangente a C, e risulterebbe di diramazione solo se coincidesse con un punto del gruppo G, comune alla C e alla curva di S infinitamente vicina; mentre queste posizioni debbono escludersi, per la genericità del piano segante.

Limitando pertanto la corrispondenza agli intorni di x_0 e di uno dei punti $\xi_1^0 \equiv a, \xi_2^0, \cdots, \xi_\nu^0$ di φ, che sono omologhi di x_0, avremo una corrispondenza analitica biunivoca; donde segue che x è funzione uniforme di ξ_i nell'intorno del punto ξ_i^0; e viceversa che ξ_i è funzione uniforme di x nell'intorno di x_0. E giacché i punti $x_0, \xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_\nu^0$ possono supporsi tutti al finito, si conclude che le suddette funzioni uniformi son pure regolari, negli intorni in cui esse son definite. – Avremo dunque nell'intorno di $\xi_1^0 \equiv a$:

$$x = x_0 + c_1(\xi_1 - \xi_1^0) + c_2(\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \cdots,$$

ove c_1, essendo uguale al valore $\left(\frac{dx}{d\xi_1}\right)_0$ assunto dalla $\frac{dx}{d\xi_1}$ nel punto ξ_1^0, è diverso da zero, per la genericità di x_0 lungo la curva C.

Inoltre anche $\omega(\xi_2, \eta_2), \omega(\xi_3, \eta_3), \cdots, \omega(\xi_\nu, \eta_\nu)$ risulteranno funzioni uniformi e regolari di x, nell'intorno di (x_0, y_0, z_0), e quindi, in quest'intorno, sarà:

$$J(xy_0z) = \omega(\xi_1, \eta_1) + \omega(\xi_2^0, \eta_2^0) + \cdots + \omega(\xi_\nu^0, \eta_\nu^0) + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

donde si trae:

$$(x - x_0)\, J(x, y_0, z) = \omega(\xi_1, \eta_1)\,[c_1(\xi_1 - \xi_1^0) + c_2(\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \cdots] +$$
$$(x - x_0)\,\omega(\xi_2^0, \eta_2^0) + \cdots + (x - x_0)\,\omega(\xi_\nu^0, \eta_\nu^0) + k_1(x - x_0)^2 + k_2(x - x_0)^3 + \cdots.$$

Passando al limite per $x = x_0$ e quindi per $\xi_1 = \xi_1^0$, verrà:

$$\lim_{x = x_0} (x - x_0)\, J(x, y_0, z) = c_1 \lim_{\xi_1 = \xi_1^0} (\xi_1 - \xi_1^0)\,\omega(\xi_1, \eta_1),$$

dalla quale si rileva che ogni punto di C è un polo del 1° ordine per l'integrale J. Inoltre quando il punto x_0 si avvicina ad un punto del gruppo G, la $\left(\frac{dx}{d\xi_1}\right)_0$ varia con continuità tendendo a zero, perché due dei punti ξ corrispondenti ad x_0, tendono a coincidere in a. Ne segue che in ciascun punto di G si annulla la funzione razionale residua (di rango 1) individuata da J su C [7]; e siccome G appartiene alla serie caratteristica di C [8], si conclude ch'esso non è altro che il gruppo caratteristico individuato da J sulla propria curva polare.

Se si considera il sistema algebrico completo M, che contiene totalmente S, e si applica il teorema di Enriques, già citato, si vede che ogni gruppo caratteristico di C è segato da una curva C_0 di M, infinitamente vicina a C. Sicché costruendo entro M, in uno degli infiniti modi possibili, un sistema algebrico irriducibile ∞^1, che contenga C e C_0, mediante il procedimento sopra esposto, si giunge a dimostrare che:

Se una curva irriducibile C, appartenente ad una superficie algebrica F, è contenuta totalmente in un sistema continuo almeno ∞^1, esiste sempre su F un integrale di 2ª specie, che diviene infinito (del 1° ordine) soltanto lungo la C, e che individua ivi un gruppo caratteristico, comunque prefissato.

2. Nel lavoro, già citato, sugl'integrali di 2ª specie appartenenti ad una superficie algebrica, ho dimostrato che, mediante sottrazione di funzioni razionali, ogni integrale di 2ª specie appartenente alla superficie F, può ridursi ad un integrale che divenga infinito (del 1° ordine) soltanto lungo una curva irriducibile C, priva di punti multipli, appartenente ad un sistema lineare regolare (sprovvisto di punti base).

Se d è la dimensione del sistema lineare completo $|C|$, sarà $d - 1 + P_g - P_a$ la dimensione della serie caratteristica completa esistente su C (e quindi

(7) In un punto x_0 di C il valore di questa funzione razionale residua differisce per un fattore costante da $\left(\frac{dx}{d\xi_1}\right)_0$. Di ciò si potrebbe profittare per dimostrare che i poli della funzione residua cadono nei punti di contatto dei piani y = cost. tangenti C, e nei punti all'infinito della curva stessa; mentre gli zeri cadono in quei punti di C ove il piano tangente ad F è parallelo all'asse z, e nei punti della curva polare ove è regolare l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$ (con $\bar{y}$ parametro variabile). Questi ultimi punti costituiscono il *gruppo caratteristico individuato da J su C*. (Ved. la mia Nota della R. Acc. dei Lincei).

(8) Cfr. col n° 4 della mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui...*

$d + P_g - P_a$ la dimensione del sistema algebrico completo che contiene totalmente $|C|$).

Sulla serie caratteristica completa prendiamo una serie lineare g, di dimensione $P_g - P_a - 1$, che non abbia gruppi comuni colla serie h segata su C dal sistema $|C|$, e diciamo $G_1, G_2, \cdots, G_p$ ($p = P_g - P_a$), p gruppi di g linearmente indipendenti. Siano inoltre $J_1, J_2, \cdots, J_p$ p integrali di 2ª specie, che divengano infiniti del 1° ordine soltanto lungo C, individuando ivi risp. i gruppi scelti $G_1, G_2, \cdots, G_p$ (n° prec.), ed $I_1, I_2, \cdots, I_q$ i q integrali linearmente indipendenti, di 1ª specie, appartenenti ad F.

Allora è facile vedere che gl'integrali $I_1, \cdots, I_q, J_1, \cdots, J_p$, considerati complessivamente, sono distinti, cioè che una loro combinazione lineare a coefficienti costanti (non tutti nulli), non riducesi mai ad una funzione razionale.

Dicansi invero $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ le funzioni razionali residue individuate su C dagl'integrali $J_1, J_2, \cdots, J_p$ e si ricordi che le φ hanno gli stessi poli (ved. la nota (7) e piè della pag. precedente), e per zeri rispettivi i punti dei gruppi $Q + G_1, Q + G_2, \cdots, Q + G_p$, ove Q è il gruppo dei punti di contatto dei piani che toccano F in punti di C e son paralleli all'asse z.

Ciò posto, se avessimo:

$$\lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q + \mu_1 J_1 + \cdots + \mu_p J_p = R(x, y, z),$$

ove le λ, μ son costanti, non tutte nulle, ed R è una funzione razionale (necessariamente infinita – del 1° ordine – soltanto lungo C), la funzione residua $\psi(x, y, z)$ individuata da R su C, sarebbe data da

$$\psi(x, y, z) = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots + \mu_p \varphi_p,$$

onde il gruppo base H del fascio $R = \text{cost}$, apparterrebbe alla serie g, il che è assurdo, perché H sta nella serie h.

Se ora fissiamo d gruppi linearmente indipendenti $H_1, H_2, \cdots, H_d$ della serie h, e diciamo $R_1, R_2, \cdots, R_d$ d funzioni razionali che divengano infinite (del 1° ordine) soltanto lungo C, e che individuino ivi risp. i gruppi base $H_1, H_2, \cdots, H_d$, e $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_d$ le relative funzioni residue, poiché un gruppo caratteristico qualunque risulta linearmente dipendented ai gruppi $H_1, \cdots, H_d$ $G_1, \cdots, G_p$, dicendo J un integrale di 2ª specie, che divenga infinito (del 1° ordine) soltanto lungo la C, e φ la relativa funzione residua, avremo:

$$\varphi = \nu_1 \psi_1 + \cdots + \nu_d \psi_d + \mu_1 \varphi_1 + \cdots + \mu_p \varphi_p,$$

onde l'integrale

$$J - \nu_1 R_1 - \cdots - \nu_d R_d - \mu_1 J_1 - \cdots - \mu_p J_p,$$

individuando su C una funzione residua identicamente nulla, sarà di 1ª specie; cioè avremo:

$$J = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q + \mu_1 J_1 + \cdots + \mu_p J_p + \text{funz. razionale.}$$

Ricordando il teorema che ho richiamato al principio di questo n°, si conclude che la superficie F possiede $p + q$ integrali distinti di 2ª specie. Dunque:

Data una superficie di generi P_g, P_a, l'irregolarità $P_g - P_a$ della superficie, è uguale all'eccesso del numero degli integrali distinti di 2ª specie, sul numero degl'integrali indipendenti di 1ª specie, che ad essa appartengono (9).

In altri termini:

Se la superficie F possiede q integrali indipendenti di 1ª specie, questi integrali hanno $q + P_g - P_a$ periodi.

Si osservi che per una superficie irregolare ($P_g > P_a$) è sempre $q > 0$, perché altrimenti ogni sistema algebrico completo, in essa contenuto, sarebbe lineare (10), contrariamente al teorema di Enriques.

3. Sia

$$\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} \cdots \omega_{1r} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \cdots \omega_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_{q1} & \omega_{q2} \cdots \omega_{qr}, \end{matrix}$$

la tabella dei periodi degl'integrali $I_1, I_2, \cdots, I_q$, di 1ª specie e linearmente indipendenti, che appartengono ad F; α_{ik} la parte reale e $\beta_{ik}\sqrt{-1}$ la parte immaginaria del periodo ω_{ik}. Se $A_i\,(i = 1, \cdots, q)$ è un integrale di 2ª specie, avente per periodi $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$, e β_i $(i = 1, \cdots, q)$ un altro integrale di 2ª specie, avente per periodi $\beta_{i1}, \cdots, \beta_{ir}$, gl'integrali $A_1, \cdots, A_q$, $B_1, \cdots, B_q$ saranno distinti. Invero, nell'ipotesi contraria, esisterebbero dei numeri $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$, $\mu_1, \cdots, \mu_q$, non tutti nulli, soddisfacenti alle relazioni:

$$\lambda_1 \alpha_{1k} + \lambda_2 \alpha_{2k} + \cdots + \lambda_q \alpha_{qk} + \mu_1 \beta_{1k} + \cdots + \mu_q \beta_{qk} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, r);$$

e a causa della realità dei coefficienti di queste equazioni, si potrebbero sempre ridurre i numeri λ, μ ad esser reali. Dopo ciò l'integrale $\sum_{i=1}^{q} (\mu_i + \lambda_i \sqrt{-1})\, I_i$, verrebbe ad avere per periodi i numeri:

$$\sum_{i=1}^{q} (\mu_i + \lambda_i \sqrt{-1})\,(\alpha_{ik} + \beta_{ik} \sqrt{-1}) \qquad (k = 1, \cdots, r),$$

che, in virtù delle relazioni ammesse, riduconsi alle quantità reali $\sum_{i=1}^{q} (\mu_i \alpha_{ik} - \lambda_i \beta_{ik})$. L'integrale di 1ª specie $\sum_{i=1}^{q} (\mu_i + \lambda_i \sqrt{-1})\, I_i$ si ridurrebbe perciò ad una costante, cioè gl'integrali $I_1, \cdots, I_q$ sarebbero dipendenti: contro il supposto.

(9) Nel mio lavoro citato si dimostra soltanto che quest'eccesso non supera $P_g - P_a$.
(10) HUMBERT, *loc. cit.*

Si conclude pertanto che la superficie F ammette almeno $2q$ integrali distinti di 2ª specie, e quindi, in forza del teorema dimostrato al n° prec., avremo:

$$2q \leq q + P_g - P_a,$$

cioè: $q \leq P_g - P_a$. Dunque:

Una superficie algebrica F di generi P_g, P_a, ammette al più $P_g - P_a$ integrali indipendenti di 1ª specie (11).

In particolare, se $P_g - P_a = 1$, dovrà essere $0 < q \leq 1$, cioè $q = 1$; donde segue che:

Una superficie algebrica d'irregolarità uno, possiede un solo integrale di 1ª specie, che ha due periodi.

Dicendo I quest'integrale, se ne rileva che le curve $I =$ cost costituiscono un fascio ellittico di curve *algebriche* (12); e quindi:

Una superficie algebrica d'irregolarità uno, contiene sempre un fascio ellittico di curve algebriche.

(11) Si confronti questo teorema colla proposizione dimostrata al n° 7 della mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui...* [Ved. pure la nota (5) a piè della p. 282 del presente lavoro].

(12) *Osservazioni sui sistemi continui....*

XXII.

SUR LA TOTALITÉ DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE ET SUR LES INTÉGRALES DE PICARD ATTACHÉES À LA SURFACE

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *140*$_1$ (1905), pp. 361–363 (*).

1. Lorsque deux courbes algébriques A, B tracées sur une surface algébrique F, sont contenues totalement dans un même système algébrique irréductible, nous dirons que les deux courbes sont *algébriquement équivalentes*, et écrirons $A \equiv B$.

Soient, $C_1, C_2, \cdots, C_h, h$ courbes tracées sur la surface F, et supposons qu'il soit possible de déterminer h nombres entiers positifs $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t, \mu_{t+1}, \cdots, \mu_h$, non tous nuls, tels que l'on ait

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_h C_h, \tag{1}$$

ou, comme nous écrirons symboliquement,

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_t C_t + \lambda_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \lambda_h C_h = 0, \tag{2}$$

en posant

$$\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1}, \quad \lambda_{t+2} = -\mu_{t+2}, \quad \cdots, \quad \lambda_h = -\mu_h.$$

Alors nous dirons que les courbes $C_1, C_2, \cdots, C_h$ sont *algébriquement dépendantes*; tandis qu'on les dira *algébriquement indépendantes* dans l'hypothèse contraire.

Soient $m_1, m_2, \cdots, m_h$ les *ordres*, $n_{11}, n_{22}, \cdots, n_{hh}$ les *degrés virtuels*, $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_h$ les *genres virtuels* des courbes $C_1, \cdots, C_h$, et désignons par n_{ik} le nombre des points communs aux courbes C_i et C_k.

La matrice de h colonnes verticales et $h+2$ lignes horizontales

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1h} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{h1} & n_{h2} & \cdots & n_{hh} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_h \\ \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_h \end{vmatrix}, \tag{3}$$

où l'on a posé $\theta_i = 2\pi_i - 2 - n_{ii}$, sera dite la *matrice discriminante* du groupement $(C_1, C_2, \cdots, C_h)$.

(*) Seduta del 6 febbraio 1905.

Ces définitions étant posées, je vais énoncer le théorème suivant:

Pour que le courbes $C_1, C_2, \cdots, C_h$ *soient algébriquement dépendantes, il faut et il suffit que la matrice discriminante du groupement* $(C_1, C_2, \cdots, C_h)$ *soit nulle* (c'est–à–dire que ses déterminants d'ordre h soient nuls).

J'appuie la démonstration de ce théorème sur la remarque que, si deux courbes A, B de F ont le même degré, le même genre et le même ordre, les systèmes algébriques complets

$$(4) \qquad (D), \quad (D+A-B), \quad [D+2(A-B)], \quad \cdots,$$

qui contiennent les systèmes linéaires $|D|, |D+A-B|, |D+2(A-B)|\cdots$ (pourvu que ces systèmes existent, comme on peut le supposer lorsque la courbe D est choisie dans un système régulier convenable), ont les caractères du premier d'entre eux. Puisque sur une surface algébrique les courbes d'un ordre donné se distribuent en un nombre fini de systèmes algébriques, on en conclut que la série (4) renferme un nombre limité de termes distincts, c'est–à–dire que $\alpha A \equiv \alpha B$, où $\alpha\,(\geqq 1)$ est un entier positif.

2. On peut présenter sous une forme transcendante la condition pour que les courbes $C_1, C_2, \cdots, C_h$ soient algébriquement dépendantes, en ayant égard aux intégrales de différentielles totales (*intégrales de Picard*) attachées à la surface.

Si, en effet, les courbes $C_1, \cdots, C_h$ sont liées par la relation (1) ou (2), il existera un système ∞^1, algébrique et irréductible Σ, dont

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t\,(=A) \quad \text{et} \quad \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_h C_h\,(=B)$$

sont deux courbes totales. Désignons par φ une courbe plane dont les points représentent les courbes de Σ, par a, b les points de φ homologues des courbes A, B, par $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ les ν points de φ qui représentent les courbes de Σ issues d'un point (x,y,z) de F, et enfin par $\overline{\omega}$ une intégrale abélienne de troisième espèce, avec les deux points singuliers logarithmiques a, b. La somme $\overline{\omega}(\xi_1) + \overline{\omega}(\xi_2) + \cdots + \overline{\omega}(\xi_\nu)$ est égale à la valeur d'une certaine intégrale de Picard J_0 au point (x, y, z), et comme elle demeure finie lorsque le groupe $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$ ne contient aucun des points a, b, l'intégrale J deviendra infinie logarithmiquement aux seuls points des courbes $C_1, C_2, \cdots, C_h$; c'est–à–dire que J sera de troisième espèce, avec les seules courbes logarithmiques $C_1, C_2, \cdots, C_h$.

Réciproquement, si l'on peut former sur F une intégrale J de troisième espèce, ayant les seules courbes logarithmiques $C_1, \cdots, C_h$, avec les périodes polaires respectives $c_1, \cdots, c_h$, la somme des résidus de l'intégrale abélienne de troisième espèce, qu'on obtient en regardant J comme une fonction d'un point variable sur une courbe irréductible D de la surface, doit être nulle, et donc, en désignant par $(C_i D)$ le nombre des points communs aux courbes C_i et D, on aura

$$(5) \qquad c_1 (C_1 D) + c_2 (C_2 D) + \cdots + c_h (C_h D) = 0.$$

En prenant successivement, pour courbe D, chaque courbe d'un groupe convenable, on voit que la matrice (3) est nulle, c'est–à–dire que les courbes logarithmiques sont dépendantes.

Donc: *La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes* $C_1, C_2, \cdots, C_h$ *soient algébriquement dépendantes, est qu'il soit possible de former sur* F *une intégrale de Picard, de la troisième espèce, ayant seulement pour courbes logarithmiques* $C_1, C_2, \cdots, C_h$.

En se rappelant le théorème fondamental que M. Picard a établi pour les intégrales de différentielles totales de troisième espèce (*Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, p. 241 et 329), d'après ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant:

Sur une surface F on peut tracer ϱ *courbes irréductibles* $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$, *qui soient algébriquement indépendantes, mais telles qu'en prenant sur F une* $(\varrho + 1)^{ième}$ *courbe algébrique quelconque C, les courbes* $C_1, C_2, \cdots, C_h, C$, *soient algébriquement dépendantes.*

On dit que les systèmes algébriques $(C_1), (C_2), \cdots, (C_\varrho)$ forment une *base* de la totalité des courbes tracées sur *F*. Lorsque la surface est *régulière* $(p_g = p_n)$ (*), la base est formée par des systèmes linéaires, ou, si l'on veut, par ϱ courbes *linéairement indépendantes.*

3. Grâce aux théorèmes que je viens d'exposer dans cette Note, et au théorème d'Abel pour les intégrales abéliennes de troisième espèce, on arrive à répondre par la négative à l'importante question, posée par M. Picard, de savoir s'il existe une surface ayant l'ordre de connexion linéaire $p_1 = 1$, et dont toutes les intégrales de différentielles totales ne se réduisent pas à des combinaisons algébrico–logarithmiques. Je puis, en effet, démontrer le théorème suivant:

Pour que les intégrales de Picard attachées à une surface algébrique se réduisent toutes à des combinaisons algébrico–logarithmiques, il faut et il suffit que la surface soit régulière, c'est–à–dire que son ordre de connexion linéaire soit $p_1 = 1$.

(*) [Qui, e nella Nota XXIV, p. 294, p_g, p_n denotano risp. i generi geometrico e aritmetico, già indicati con P_g, P_a. In seguito sono usati i simboli p_g, p_a. (N.d.R.)].

XXIII.

INTORNO ALLA COSTRUZIONE DEI SISTEMI COMPLETI NON LINEARI CHE APPARTENGONO AD UNA SUPERFICIE IRREGOLARE

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *20* (1905), pp. 93–96.

Il prof. Enriques in una sua Nota recente [1] ha dimostrato, in modo veramente semplice, che l'esistenza di sistemi (algebrici) completi, non lineari, di curve algebriche, caratterizza le superficie irregolari, cioè quelle che hanno il genere geometrico P_g maggiore del genere aritmetico P_a.

La dimostrazione del prof. Enriques è fondata sulla rappresentazione della superficie sopra un piano multiplo; ma ciò che giuoca in modo essenziale nel ragionamento, è il principio che *una curva algebrica irriducibile, che varii con continuità sopra una superficie algebrica, non può spezzarsi senza acquistare nuovi punti doppi.*

Ora, usando di questo medesimo principio, ma operando direttamente sulla superficie, io son pervenuto a dimostrare che *ogni sistema algebrico completo ha la serie caratteristica completa* [2]; e mi sembra che valga la pena di esporre questa nuova dimostrazione, perché essa semplifica ulteriormente la costruzione dei sistemi completi non lineari, sopra una superficie irregolare.

Aggiungerò che il concetto direttivo della mia dimostrazione è identico a quello che mi condusse a definire la serie caratteristica di una curva, indipendentemente dall'esistenza di un sistema lineare a cui essa appartenga [3]. Qui, mediante il principio di Enriques, vien resa più significativa la costruzione della serie caratteristica, assegnando anche le *curve infinitamente vicine alla data*, le quali segano i gruppi di questa serie: cosicché può dirsi che *sopra una curva della superficie, esiste la serie caratteristica, allora e soltanto allora che la curva appartiene ad un sistema continuo* (*almeno* ∞^1).

(1) *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari,* Rend. della R. Accademia di Bologna, *9* (1905), pp. 5–13. Vedi pure la Nota inserita nei «Comptes rendus» dell'Accademia delle Scienze di Parigi (seduta del 16 gennaio 1905).

(2) Per la definizione della serie caratteristica di un sistema continuo, vedi la mia Nota: *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica,* Atti della R. Acc. di Torino, *39* (1904), pp. 371–392 [Nota XVIII, p. 234; N.d.R.].

(3) *Osservazioni sui sistemi continui,* etc.

1. Sulla superficie algebrica F consideriamo un sistema algebrico irriducibile [4] e completo $\{C\}$, privo di punti base e la cui curva generica sia irriducibile e priva di punti multipli. Si tratta di provare che la serie caratteristica segata sopra una curva generica del sistema dalle curve C che le sono infinitamente vicine, è completa.

A tal uopo fissiamo su F un sistema lineare $|E|$, irriducibile e privo di punti base, che contenga parzialmente tutto quanto il sistema $\{C\}$ e che inoltre seghi sulla C generica, una serie lineare *completa*: ciò è sempre possibile, perché la C è priva di punti multipli [5]. In corrispondenza ad ogni sistema lineare $|C|$, contenuto in $\{C\}$, formiamo il sistema lineare $|D| = |E - C|$, e diciamo $\{D\}$ il sistema algebrico irriducibile – la cui curva generica può pure supporsi irriducibile e priva di punti multipli – luogo dei sistemi $|D|$.

Indichiamo inoltre con δ il n° dei punti comuni a una C e a una D, e con Σ il sistema algebrico costituito dalle curve E che posseggono δ punti doppi. Essendo irriducibile la varietà V che ha per elementi le curve E composte da una C e da una D, se Σ è riducibile, si potrà sempre scegliere una parte irriducibile S del sistema Σ, alla quale appartengano tutte queste curve composte.

La curva generica E_0 di S è certamente spezzata, perché in caso contrario facendo tendere la E_0 ad una E composta da una C e da una D, si avrebbe lo spezzamento, senz'acquisto di nuovi punti doppi. Ed è chiaro che la E_0 non può spezzarsi che in una curva C_0 dello stesso ordine di C ed in una D_0 dello stesso ordine di D [6]. Variando E_0 entro ad S, per la supposta irriducibilità di questo sistema, le curve C_0, D_0 descriveranno *due sistemi irriducibili*, il primo dei quali coinciderà col sistema *completo* $\{C\}$, e l'altro con $\{D\}$, perché quest'ultimo sistema contiene *tutti* i resti delle C rispetto ad $|E|$. Dunque il sistema S non è più ampio del sistema V, come a priori potrebbe credersi; ma, al contrario, i due sistemi coincidono; e poiché la curva generica di S non può stare in un'altra parte di Σ, si conclude che le curve E dotate di δ punti doppi e infinitamente vicine ad una curva E_0 generica (composta da una C e da una D), appartengono tutte quante al sistema V.

Ciò posto, fissate due curve generiche $\overline{C}$, $\overline{D}$, mutuamente residue rispetto ad E, si osservi:

1) Che le curve E passanti pei punti del gruppo $(\overline{C}\,\overline{D})$, segano ulteriormente su $\overline{C}$ la serie caratteristica completa, e quindi che godono della

(4) Cioè rappresentabile coi punti di una varietà irriducibile.

(5) Come sistema $|E|$ può prendersi, ed esempio, quello segnato su F dalle forme che hanno lo stesso ordine delle C.

(6) Si può intuitivamente giustificare il principio applicato, osservando che, se di due curve infinitamente vicine E_0 ed E, l'una, E, è spezzata in $C + D$, l'altra sarà spezzata in una curva infinitamente vicina a C ed in una infinitamente vicina a D. Invero, se la curva (superficie di Riemann) E_0 fosse irriducibile, da un suo punto si potrebbe andare ad ogni altro con un cammino continuo non traversante i δ punti doppi di E_0, che sono infinitamente prossimi ai δ punti (CD). Ogni tal cammino darebbe luogo ad un cammino infinitamente prossimo, tracciato sulla $C + D$; e dunque da ogni punto di C si andrebbe ad un punto di D, senza traversare i punti $(C\,D)$: il che è assurdo.

stessa proprietà quelle, tra le curve E suddette, che sono infinitamente vicine a $\overline{C}+\overline{D}$.

2) Che queste ultime curve E hanno δ punti doppi infinitamente prossimi ai punti $(\overline{C}\,\overline{D})$, e quindi appartengono al sistema V.

Tale proprietà si può infatti presentare sotto la seguente forma proiettiva: data una superficie non sviluppabile (per esempio dello S_3), ogni piano passante per un punto P della superficie e infinitamente prossimo al piano ad essa tangente in P, tocca la superficie in un punto infinitamente vicino a P. La cosa diviene intuitiva sotto la forma duale.

3) Che ogni curva del sistema V, infinitamente vicina a $\overline{C}+\overline{D}$, appartiene al sistema lineare T delle E che passano pei punti $(\overline{C}\,\overline{D})$ (7). Col linguaggio proiettivo ciò equivale ad affermare che ogni piano che tocchi una data superficie non sviluppabile (dello S_3) in un punto infinitamente vicino al punto P della superficie, passa per P. Anche tale proprietà (inversa della precedente) è intuitiva sotto la forma duale.

Da tutto ciò discende in modo immediato che è *completa la serie caratteristica del sistema* $\{C\}$.

Osservazione. – In particolare se $\{C\}$ è il sistema completo che si ottiene a partire da un sistema lineare regolare $|C|$ di dimensione r, sarà $r+P_g-P_a$ la dimensione di $\{C\}$ e dunque, *allorquando* $P_g > P_a$, *avremo sulla* F *un sistema completo non lineare.*

2. Il teorema dimostrato si estende subito ai sistemi completi con punti base assegnati (di molteplicità virtuale uguale all'effettiva), e più in generale a quei sistemi la cui curva generica possegga punti doppi variabili.

A proposito di questi sistemi, è appena necessario avvertire in qual senso debba intendersi la completezza. Un tal sistema dovrà dirsi completo, quando non è contenuto in uno più ampio di curve dello stesso ordine e collo stesso numero di punti doppi variabili.

Ma questi sistemi offrono poco interesse, perché non differenziano le superficie irregolari dalle regolari (così per esempio nel piano il sistema delle cubiche con un punto doppio è completo nel senso ora detto, e non è lineare).

(7) Nello spazio lineare i cui *punti* son le curve E, la varietà V è toccata dallo spazio T e dagli analoghi (che hanno la stessa dimensione di V).

XXIV.

LE THÉORÈME D'ABEL SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *140*$_1$ (1905), pp. 926–928 (*).

1. Il y a deux questions qu'on peut poser sur une surface algébrique, en se plaçant au point de vue analogue à celui du théorème d'Abel pour les courbes. Ou bien on demande une condition pour qu'un système algébrique de courbes (algébriques) soit renfermé totalement dans un système linéaire; ou bien on demande une condition pour qu'une *involution* de groupes de points soit régulière (c'est–à–dire que son ordre de connexion linéaire soit $p_1 = 1$).

Dans cette Note, je donne ces conditions, au moyen des intégrales de Picard attachées à la surface.

Je commence à énoncer ce que je nomme *le premier théorème d'Abel sur les surfaces*:

Soient $I_1, I_2, \cdots, I_q$ *les intégrales de différentielles totales attachées à une surface* F, *et soient* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *les points communs à deux courbes (algébriques) tracées sur la surface et variables dans une même série algébrique: alors, pour que cette série soit renfermée dans un système linéaire, il faut et il suffit que les sommes*

$$I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n) \qquad (h = 1, \cdots, q)$$

demeurent constantes.

La nécessité de la condition dont on parle s'établit par elle–même, en s'appuyant sur le théorème d'Abel pour les courbes. Mais la démonstration de la réciproque, quoique simple, n'est pas si immédiate. J'ai posé à la base de cette recherche le lemme qui suit:

Si, dans une courbe algébrique, on a une série algébrique (irréductible) S *de groupes de* ν *points, telle que l'ensemble des* n *groupes qui passent par le point* x *variable sur la courbe (*y *compris le point* x *compté* n *fois), se meut dans une série linéaire (d'ordre* $n\nu$*), alors tous les groupes de* S *sont contenus dans une même série linéaire.*

De ce lemme je tire la suffisance de la condition énoncée, en généralisant un raisonnement bien connu de M. Humbert (*Journal de Math.*, 1894).

2. Comme une conséquence immédiate du premier théorème d'Abel, je vais établir qu'*une surface algébrique, ayant les genres* p_g, p_n (**), *possède* $p_g - p_n$ *intégrales de Picard de première espèce et* $2(p_g - p_n)$ *intégrales de deuxième espèce.*

(*) Seduta del 3 aprile 1905.

(**) [Cfr. nota (*) di p. 290; N.d.R.].

Pour ce qui concerne la relation entre l'irrégularité et l'existence d'intégrales de première et de deuxième espèce, j'applique seulement, dans la démonstration que je vais exposer, les propositions données dans ma Note des *Rendiconti dei Lincei*, (5) *13* (1904), pp. 253–258 [Nota XIX, p. 247, N.d.R.], et le beau théorème de M. Enriques, concernant les systèmes complets non linéaires qui appartiennent à une surface irrégulière (Voir *Comptes rendus*, *140* (1905), pp. 133–135).

Soit $|C|$ un système linéaire régulier de courbes tracées sur la surface F. D'après M. Enriques, ce système appartient à une série algébrique Σ, ∞^p ($p = p_g - p_a$), de systèmes linéaires. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont les points communs à deux courbes d'un de ces systèmes, on aura:

$$I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n) = c_h, \qquad (h = 1, \cdots, q),$$

où $I_1, \cdots, I_q$ sont les intégrales indépendantes de première espèce attachées à F, et les c sont des constantes. Grâce à la suffisance de la condition donnée du premier théorème d'Abel, le *groupe* des quantités $c_1, c_2, \cdots, c_q$ ne pourra pas être le même par deux systèmes différents de Σ. Donc les c sont susceptibles de ∞^p groupes distincts de valeurs. Cela entraîne $q \geqq p$. D'un autre côté, en désignant par r le nombre des intégrales de deuxième espèce, on a (*voir* ma Note des *Lincei*, n° 2): $r - q \leqq p$. Ces inégalités, jointes à l'autre $r \geqq 2q$, qu'on obtient aisément (*voir*, par exemple, le n° 3 de ma Note dans les *Atti dell'Accademia di Torino*, *40* (1905), pp. 254–262 [Nota XXI, p. 281; N.d.R.]), donnent $q = p$, $r = 2p$.

3. Le théorème très important que je viens de démontrer est dû à M. Castelnuovo, qui l'a exposé récemment avec une autre démonstration (*Comptes rendus*, 23 janvier 1905). Ce théorème répond à la question *quantitative* concernant les intégrales de première et deuxième espèce, attachées à une surface. La question *qualitative* avait été déjà résolue en réunissant le théorème que j'ai démontré en septembre avec le théorème cité de M. Enriques. Je dois enfin rappeler que M. Picard a établi de son coté la relation $r = p + q$ (*Comptes rendus*, *146*, 16 janvier 1905), par une méthode où joue, d'une manière admirable et systématique, le groupe d'une certaine équation différentielle E.

4. En terminant, je me borne à énoncer ce que je nomme *le second théorème d'Abel sur les surfaces*:

Soient encore $I_1, \cdots, I_q$ les intégrales de première espèce attachées à une surface F, et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un groupe de points, variable dans une involution K de F. La condition nécessaire et suffisante pour que K soit régulière est alors que les sommes

$$I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n) \qquad (h = 1, \cdots, q)$$

demeurent constantes.

On en tire, par exemple, que *sur une surface, qui ne contient pas de faisceaux irrationnels, toute involution d'une série continue est régulière.*

XXV.

IL TEOREMA D'ABEL SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE [1]

Annali di matematica (3), *12* (1905), pp. 55–79.

È noto che il concetto d'*integrale abeliano*, che ha un ufficio così importante nella teoria delle funzioni algebriche di una variabile, è stato trasportato in due modi nel campo delle funzioni algebriche di due variabili: da un lato, con Clebsch e Nöther, si sono considerati gl'integrali doppi di prima specie, e con Picard (molto più recentemente) gl'integrali doppi di seconda specie; da un altro lato, si sono considerati, collo stesso sig. Picard, gl'integrali di differenziali totali o integrali semplici (delle tre specie), che ormai, giustamente, a ricordo delle belle ricerche dell'eminente geometra francese, si chiamano *integrali* di Picard.

Ma mentre pochi sono per ora i legami tra gl'integrali doppi e la geometria sulla superficie algebrica, immagine della funzione [2], numerosi si sono fatti, specialmente in questi ultimi mesi, i legami tra le proprietà trascendenti degl'integrali di Picard, e le proprietà geometriche dei sistemi lineari di curve, tracciati sopra la superficie.

Questi risultati, di cui discorrerò diffusamente più tardi, hanno posto in luce che, prendendo come analoghi degl'integrali abeliani, gl'integrali di Picard, il genere dell'ente algebrico ∞^1 viene ad avere per analogo l'irregolarità $p_g - p_a$ (cioè la differenza tra il *genere geometrico* ed il *genere aritmetico*) dell'ente ∞^2 (*). Cosicchè, da questo punto di vista, le *superficie regolari* ($p_g = p_a$) vengono ad essere analoghe alle *curve razionali*; e come queste ultime son *caratterizzate* dal fatto di non contenere sistemi continui completi, non lineari, di gruppi di punti, così le prime son *caratterizzate* dalla mancanza di sistemi continui completi, non lineari, di curve algebriche.

Si presenta allora naturale l'estensione del teorema d'Abel, che esprime la più importante proprietà degl'integrali abeliani.

(1) Un riassunto dei principali risultati di questa Memoria è già apparso nei *Comptes rendus, 140*, sotto lo stesso titolo: *Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques* (3 avril 1905) [Nota XXIV, p. 294: N.d.R.].

(2) È noto che il numero degli integrali doppi di 1ª specie, tra loro indipendenti, uguaglia il genere geometrico della superficie. Soltanto da poco il sig. Picard ha trovato un legame tra il numero degl'integrali doppi distinti di 2ª specie e i caratteri geometrici della superficie: questo numero si esprime mediante l'*invariante di* Zeuthen–Segre, l'irregolarità $p_g - p_a$ della superficie, e il numero dei sistemi continui che costituiscono la *base*. Questo risultato dovrà condurre ad altre importanti proprietà delle superficie algebriche.

(*) [Cfr. nota (*) di p. 290; N.d.R.].

Sopra una curva di genere $p > 0$, il teorema d'Abel dà la condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema continuo di gruppi di punti appartenga ad una serie lineare (cioè sia costituito da gruppi di livello costante di una data funzione razionale dell'ente). Dunque, dal punto di vista da cui ci poniamo, la questione analoga sulle superficie può presentarsi così: « Assegnare una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema continuo di curve algebriche, sopra una superficie d'irregolarità $p_g - p_a > 0$, sia contenuto totalmente in un sistema lineare [3] ».

Orbene, in questo lavoro io dimostro che *la condizione richiesta è che rimangano costanti, per una variazione continua di due curve del sistema, le somme degl'integrali di Picard della 1ª specie, appartenenti alla superficie, nei punti comuni alle due curve variabili.*

È questa proposizione ch'io chiamo *il primo teorema d'Abel sulle superficie* [4].

Successivamente trasformo il teorema, rendendolo più espressivo e più utile nelle applicazioni.

Nel nº 8 di questo lavoro deduco, dal 1º teorema d'Abel, che *una superficie algebrica di generi, geometrico e aritmetico,* p_g, p_a, *possiede* $p_g - p_a$ *integrali semplici di 1ª specie, e* $2(p_g - p_a)$ *integrali di 2ª specie.*

Questo teorema, che trovasi enunciato con un'esposizione sommaria della dimostrazione (diversa da quella che si legge al nº 8 della presente Memoria), in una Nota del sig. Castelnuovo (*Comptes rendus*, 23 janvier 1905), è il risultato complessivo di varie ricerche, che si sono succedute rapidamente in questi ultimi tempi.

In una Nota inserita nel settembre del 1904 tra i *Rendiconti dei Lincei*, io ho dimostrato che « ogni superficie la quale possegga integrali (trascendenti) della 2ª specie (in particolare di 1ª), cioè che abbia l'ordine di connessione lineare $p_1 > 1$, è irregolare $(p_g > p_a)$ » [5].

Questo teorema ha stabilito un primo legame qualitativo tra l'esistenza d'integrali di Picard della 2ª specie e l'irregolarità della superficie.

(3) Veramente il teorema d'Abel dà di più la condizione perché *due* gruppi di un ugual numero di punti (cioè appartenenti ad un medesimo sistema continuo), sieno tra loro *equivalenti*. Sicchè, sulle superficie, converrebbe proporsi di ricercare la condizione affinchè siano equivalenti *due* curve di un medesimo sistema continuo; ma di questa maggiore determinazione della questione, mi occuperò in un altro lavoro.

(4) Non mancano estensioni del teorema d'Abel in altre direzioni; così in HUMBERT, *Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications à la Géométrie*, Journal de Math. (1889), trovasi un'estensione del teorema agl'integrali doppi, ed anche agl'integrali di differenziali totali (ma in una direzione diversa dalla nostra).

(5) Un lavoro più ampio attorno a questo teorema, ha già preso da vari mesi il suo turno di stampa pei *Mathematische Annalen* [Cfr. queste « Opere », XIX, XX, pp. 247, 252; N.d.R.]. — Il caso di una superficie dotata di p integrali semplici a $2p$ periodi, era stato trattato dal sig. ENRIQUES (Annales de Toulouse, (2) *3* (1901), pp. 77–84). — Vedi pure la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui...*, Atti della R. Acc. di Torino, *39* (1904), pp. 371–392 [Nota XVIII, p. 234; N.d.R.].

Ma nella stessa Nota io ho dato la disuguaglianza

$$r - q \leq p_g - p_a, \tag{1}$$

ove r, q denotano i numeri degl'integrali indipendenti della 2ª e della 1ª specie appartenenti alla superficie di generi p_g, p_a.

Questa disuguaglianza, combinata coll'altra

$$r \geq 2q, \tag{2}$$

che si ottiene con facilità [6], e che del resto è stata da tempo rilevata esplicitamente, per esempio dal sig. Picard [7], dà già:

$$q \leq p_g - p_a, \tag{3}$$

$$r \leq 2(p_g - p_a). \tag{4}$$

Il sig. Enriques, dimostrando poco dopo (Rend. della R. Acc. di Bologna, 9 (1904), pp. 5–13) l'importante teorema che « sopra una superficie ogni sistema algebrico completo di curve (algebriche), ha la serie caratteristica [8] completa », ne deduceva la caratterizzazione geometrica delle superficie irregolari; stabiliva cioè che ogni tal superficie è caratterizzata dalla presenza di sistemi continui non lineari.

Da ciò, in base al teorema che « sopra una superficie priva d'integrali finiti di Picard, ogni sistema algebrico completo è lineare », teorema dimostrato dal sig. Humbert in una bella Memoria del 1894 (*Journal de Math.*) (nella quale trovansi considerazioni che ricorrono frequentemente in lavori più recenti), il sig. Enriques poteva dedurre l'inversione del teorema da me dato in settembre. Restava così stabilito che ogni superficie irregolare possiede integrali di Picard della 1ª e della 2ª specie, e quindi la disuguaglianza (1), e le (3), (4), che ne derivano, venivano ad acquistare validità per *tutte* le superficie irregolari.

Nel gennaio decorso il sig. Picard ed io siamo giunti, per vie diverse, all'uguaglianza

$$r - q = p_g - p_a \text{ [9]}; \tag{5}$$

ma per ottenere il risultato definitivo mancava una disuguaglianza in senso contrario, la quale permettesse di trasformare in uguaglianze le (3), (4). Il sig. Castelnuovo potè fare quest'ultimo passo importante, e tutt'altro che agevole, mercè l'introduzione e l'uso ingegnoso del gruppo permutabile di trasformazioni birazionali, che mutano tra loro i sistemi lineari di un sistema continuo completo, di curve algebriche [10].

(6) Vedi ad esempio il n° 3 della mia Nota, *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali di Picard...*, Atti della R. Acc. di Torino, *40* (1905), pp. 254–262 [Nota XXI, p. 281; N.d.R.].

(7) Journal de Math., (1885), p. 335.

(8) Per la definizione di serie caratteristica vedi il n° 5 della presente Memoria.

(9) Vedi le Note dei sigg. Picard ed Enriques inserite nei *Comptes rendus* del 16 gennaio 1905; nonchè la mia Nota citata di Torino, *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali...*

(10) [Il sig. Castelnuovo ha sviluppato diffusamente la sua dimostrazione nella Nota, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Rendiconti dei Lincei, (5) *14*] (9 agosto 1905).

Nel nº 8 di questa Memoria il lettore vedrà come la disuguaglianza del sig. Castelnuovo, possa stabilirsi pure coll'aiuto del primo teorema d'Abel.

Ho citato poc'anzi il sig. Picard, a proposito della relazione (5): debbo aggiungere che in una Nota inserita nello stesso numero dei *Comptes rendus*, in cui trovasi un riassunto del presente lavoro (3 aprile 1905) [Noa XXIV, p. 294; N.d.R.], egli, continuando nello stesso ordine di idee svolto nella Nota citata del 16 gennaio, accenna ad un'altra via per arrivare alle uguaglianze

$$q = p_g - p_a, \qquad r = 2\,(p_g - p_a).$$

Il metodo del sig. Picard ha un indirizzo completamente diverso da quello del sig. Castelnuovo e dal mio: assunta come immagine proiettiva dell'ente ∞^2, una superficie F d'ordine m, le cui sezioni piane appartengano ad un sistema lineare regolare, l'irregolarità della F entra negli sviluppi del sig. Picard, mediante la deficienza della serie staccata sopra una sezione piana generica, dalle superficie aggiunte d'ordine $m - 3$; dopo ciò tutto procede coll'uso sistematico dell'equazione differenziale lineare E, di cui il sig. Picard profittò costantemente e in un modo così mirabile, nella sua teoria delle funzioni algebriche di due variabili, fin da quando stabilì il teorema fondamentale che « il numero degli integrali distinti di 2ª specie, uguaglia il numero dei loro periodi ».

Sinora ho parlato del *primo* teorema d'Abel sulle superficie. Ciò perché, considerando il teorema d'Abel sulle curve di genere > 0 come esprimente una condizione affinché un'*involuzione* di gruppi di punti, sia lineare, si presenta, sopra le superficie irregolari, la questione di « ricercare quand'è che una data involuzione di gruppi di punti, è regolare ».

Il *secondo teorema* d'Abel, di cui tratto nella 2ª parte di questo lavoro, afferma appunto che *la condizione necessaria e sufficiente perché un'involuzione di gruppi di punti, data sopra una superficie, sia regolare, è che le somme degli integrali finiti di Picard, appartenenti alla superficie, nei punti di un gruppo dell'involuzione, rimangano costanti al variare continuo di questo gruppo.*

Si deduce, dal 2º teorema d'Abel, che *sopra una superficie, priva di fasci irrazionali, ogni involuzione di una serie continua è regolare.*

Ma tuttavia la portata del 2º teorema d'Abel è inferiore alla portata del 1º: basta a provarlo il fatto che, sopra una superficie irregolare, è eccezionale l'esistenza di involuzioni irregolari; mentre vi esistono sempre sistemi completi non lineari, di curve algebriche.

§ 1. Il primo teorema d'Abel e alcune sue applicazioni.

1. *Un lemma sopra le serie ∞^1 di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.* Per ragioni di chiarezza giova staccare dalla dimostrazione del 1º teorema d'Abel alcune questioni accessorie, che, del resto, sono già interessanti di per sé. Di tali questioni intendiamo appunto occuparci in questo numero e nel successivo.

TEOREMA I. *Sopra una curva algebrica (irriducibile) Γ, si abbia una serie algebrica ∞^1 (irriducibile) Σ di gruppi di ν punti, tale che l'insieme degli n gruppi di Σ che passano per un punto x variabile su Γ (inclusovi il punto x contato n volte), si muova entro una serie lineare (d'ordine $n\nu$): allora tutti i gruppi di Σ appartengono ad una medesima serie lineare (d'ordine ν).*

Fissiamo infatti l'attenzione sopra un gruppo $G \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ del sistema Σ, e, detto u un integrale abeliano di 1ª specie, appartenente a Γ, formiamo la somma $u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_\nu)$.

Se entro alla superficie di Riemann Γ, il punto x_1 di G descrive il ciclo lineare σ, partendo dalla posizione iniziale fissata e ritornandovi, tra gli n gruppi di Σ che passano per x_1 si produrrà una certa permutazione, sì che, in generale, a circolazione avvenuta, il gruppo G si sarà mutato in un altro di tali gruppi. Ma è certo che se x_1 descrive $n!$ volte il ciclo σ, dopo un certo numero m di circolazioni σ (m essendo un divisore di $n!$) s'incontra la sostituzione identica, sicché anche la circolazione $n!\,\sigma$ non produrrà alcuna permutazione tra i gruppi suddetti.

Ne deriva che, dopo tale circolazione, la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ sarà aumentata di una combinazione lineare a coefficienti *interi* dei periodi, perché si è prodotta – al più – una permutazione tra i punti $x_1 x_2 \cdots x_\nu$. Se ora il ciclo σ si deforma con continuità, assumendo una qualunque delle forme ad esso *equivalenti*, l'incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ per la circolazione $n!\,\sigma$, dovrà variare con continuità; e poiché i coefficienti dei periodi, che sono le sole quantità variabili durante questa deformazione, debbono mantenersi interi, si conclude che l'incremento stesso dovrà rimanere costante.

In tal modo ad ogni ciclo σ, che abbia l'origine e il termine in un punto x_i del gruppo G, viene *associato* un incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$, il quale può bensì dipendere dalla posizione del punto x_i entro a G, ma non muta se si sostituisce a σ un ciclo equivalente.

Si può ora far variare con continuità il gruppo G, a partire dalla posizione iniziale fissata e ritornandovi, di guisa che il punto x_1, per esempio, vada nel posto di uno qualunque dei punti rimanenti $x_2 \cdots x_\nu$. Considerando sopra la superficie di Riemann Γ una famiglia di cicli equivalenti σ, definiti in modo ben determinato, per esempio rispetto ai tagli normali, se ne rileva che l'incremento della somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$, associato ad un ciclo σ che passi per x_1, è uguale all'incremento associato ad un ciclo σ che passi per x_i ($i = 2, \cdots, \nu$), perché, nella variazione continua di G, quell'incremento non può variare, sempre a causa del suo particolar legame coi periodi.

Dunque, allorquando un punto del gruppo $(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ traversa $n!$ volte, col medesimo cammino, un determinato taglio normale, ritornando alla posizione di partenza, la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ subisce un incremento *indipendente* dalla posizione iniziale del gruppo e dalla scelta entro al gruppo stesso, del punto che si fa circolare.

Vediamo ora a quale conclusione più precisa conduca l'ipotesi che l'insieme dei gruppi di Σ uscenti dal punto variabile su Γ, si muova entro una serie lineare d'ordine $n\nu$.

Rappresentando i gruppi di Σ coi punti di un'altra curva algebrica C, verremo ad avere tra Γ e C una corrispondenza (ν, n). Quando il punto y che rappresenta il gruppo $(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$, descrive $\nu!$ volte un ciclo τ, i punti x non si permutano tra loro, così che il punto x_1, ad esempio, descrive un ciclo σ, ritornando alla posizione di partenza. Se, dunque, a è l'incremento di $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ quando x_1 descrive il ciclo $n!\,\sigma$, per la stessa circolazione $n!\,\sigma$ la somma U dei valori di u nei punti di tutti i gruppi di Σ, che escono da x_1, aumenterà di na.

Non può quindi essere $a \neq 0$, perché altrimenti la somma U non resterebbe costante per la circolazione $n!\,\sigma$: contrariamente al teorema di Abel.

Si conclude pertanto che la somma $u(x_1) + \cdots + u(x_\nu)$ è funzione *uniforme*, dovunque finita, del punto y; e quindi che, al variare continuo di y, essa rimane costante. In forza della sufficienza della condizione data dal teorema d'Abel, ciò significa che il gruppo $(x_1, \cdots, x_\nu)$ varia in una serie lineare, c. d. d.

2. *Lemma sulle corrispondenze a valenza zero tra una curva ed una superficie.* Tra i punti di una curva algebrica Γ ed i punti di una superficie algebrica F, s'immagini una corrispondenza algebrica, che associ ad ogni punto ξ di Γ, tutti i punti di una curva algebrica C di F, in guisa che, al variare del punto ξ, la C descriva un sistema algebrico ∞^1 (irriducibile) S, di grado n e indice ν.

Ogni curva C proverrà da $k\,(\geq 1)$ punti di Γ; così che, al variare di C entro ad S, questi k punti descriveranno su Γ un'involuzione di grado k, e le ν curve di S uscenti da un punto di F, saranno rappresentate su Γ da un gruppo di $n' = k\nu$ punti. Il sistema Σ di questi ∞^2 gruppi di n' punti, sarà birazionalmente identico ad F o ad un'involuzione ivi esistente, secondo che le ν curve di S passanti pel punto generico x di F, non passano o passano di conseguenza per altri punti della superficie, variabili con x. Se il sistema S è *composto* con un'involuzione di grado $l\,(\geq 1)$, per due punti generici di Γ passeranno $\nu' = \dfrac{n}{l}$ gruppi di Σ; cioè il sistema Σ avrà l'indice ν'.

Come naturale estensione delle corrispondenze a valenza zero tra due curve [11], possiamo definire le *corrispondenze a valenza zero tra una curva ed una superficie.*

Data una corrispondenza, che faccia passare dai punti di Γ ai punti di F, diremo che essa è a valenza zero, quando le curve C omologhe dei punti di Γ, appartengono ad un medesimo sistema lineare; e diremo che è a valenza zero la corrispondenza (inversa della precedente), che fa passare dai punti di F a quelli di Γ, allorquando appartengono ad una medesima serie lineare, i gruppi di Σ, omologhi dei punti di F.

(11) Vedi ad esempio la mia Memoria, *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Acc. di Torino, (2), *53* (1903); n° 14 [Memoria XV, p. 173; N.d.R.].

Premesse queste definizioni, passiamo a dimostrare il

TEOREMA II. *Tra una curva Γ ed una superficie F una corrispondenza che sia a valenza zero in un senso, lo è pure nel senso opposto.*

Supposto infatti che le C, di cui sopra, appartengano ad un medesimo sistema lineare $|C|$, prendiamo come immagine di F una superficie F' (semplice o multipla), le cui sezioni iperpiane sieno immagini del sistema $|C|$; e diciamo S' il sistema degli ∞^1 iperpiani corrispondenti proiettivamente alle C del sistema S.

Per un punto di F' passano ν iperpiani di S': e poiché la F' non fa parte dell'inviluppo del sistema S' (chè altrimenti ogni iperpiano di S' toccherebbe la F' in infiniti punti), si conclude che per ogni punto dello spazio passano ν iperpiani di S' (12), cioè che gli ∞^2 gruppi di ν iperpiani uscenti dai punti di F', appartengono alla serie lineare, d'ordine ν, staccata entro all'ente S' dai punti dello spazio. E siccome il sistema S' è birazionalmente identico alla curva Γ (o ad un'involuzione ivi esistente, se $k > 1$), i gruppi del sistema Σ dovranno appartenere ad una medesima serie lineare.

Suppongasi, viceversa, che i gruppi di Σ appartengano ad una medesima serie lineare $g_{n'}$, e si prenda come immagine della curva Γ, una curva Γ' (semplice o multipla), le cui sezioni iperpiane sieno immagini dei gruppi di $g_{n'}$. Ai gruppi di Σ verranno a corrispondere proiettivamente ∞^2 iperpiani costituenti un sistema Σ', tale che per due punti generici di Γ' passeranno ν' iperpiani del sistema.

Si vede, in primo luogo, che il sistema degli ∞^1 iperpiani di Σ' uscenti da un punto generico di Γ', è di classe ν' (per la solita considerazione di Segre); e, in secondo luogo, che è di classe ν' il sistema degli infiniti iperpiani di Σ' che escono da un punto generico dello spazio. Onde, entro all'ente Σ', il sistema delle varietà ∞^1 *staccate* dai simboli punti di Γ', appartiene totalmente al sistema lineare di tutte le varietà ∞^1, *di ugual classe*, staccate dai singoli punti dello spazio. Tenendo conto del fatto che Σ' è birazionalmente identico alla superficie F (o ad un'involuzione ivi esistente, se $l > 1$), si conclude che le curve C appartengono ad un medesimo sistema lineare.

Osservazione. Il concetto di valenza nulla e il relativo teorema II, *si estendono subito alle corrispondenze tra una curva ed una varietà algebrica di dimensione qualunque.*

Da tale estensione discende per esempio il

COROLLARIO. *Sopra una varietà algebrica a k dimensioni V, una varietà razionale ∞^1 di M_{k-1} è sempre contenuta totalmente in un sistema lineare* (13).

(12) Questa considerazione che torna utile spesso (sotto forme più o meno differenti), è dovuta al sig. SEGRE. Vedi la sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Matematica, (1894), n° 23.

(13) Cfr. F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti Circ. Mat. Palermo, 10 (1896), pp. 30–35.

Basta perciò rappresentare le M_{k-1} coi punti di una curva razionale Γ; osservare che sopra Γ tutti i gruppi di un ugual numero di punti, appartengono ad una medesima serie lineare; ed applicare il teorema II esteso.

3. *Il primo teorema d'Abel sulle superficie.* Passiamo ora a dimostrare quello che io ho chiamato il primo teorema d'Abel sulle superficie. Eccone l'enunciato:

TEOREMA III. *Sieno* $I_1 I_2 \cdots I_q$ *gl'integrali semplici di* 1^a *specie (tra loro indipendenti), che appartengono ad una superficie algebrica* F*; e sieno* $x_1 x_2 \cdots x_n$ *i punti comuni a due curve algebriche, tracciate sulla superficie, e variabili con continuità entro una medesima serie algebrica* S*: allora, la condizione necessaria e sufficiente affinché questa serie sia contenuta totalmente in un sistema lineare, è che le somme*

$$I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n), \qquad (h = 1, \cdots, q),$$

restino costanti.

La necessità della condizione è un'ovvia conseguenza dell'ordinario teorema d'Abel. Invero, se il dato sistema S appartiene totalmente ad un sistema lineare, gl'infiniti gruppi segati sopra una curva C di S, dalle altre C del sistema, appartengono ad una medesima serie lineare; e quindi la somma dei valori di un integrale abeliano di 1^a specie disteso sulla C, nei punti di uno di questi gruppi, resta costante al variare continuo di tal gruppo. Ciò accade in particolare della somma dei valori di un integrale I_h, perché quest'integrale dà luogo sulla C fissata, ad un integrale abeliano (riducibile).

Passiamo a stabilire la sufficienza della condizione.

Senza alcuna restrizione possiamo supporre che il sistema S sia ∞^1 (e irriducibile). Ne indicheremo con ν l'indice; e, per evitare complicazioni di forma, supporremo dapprima che il sistema S sia *semplice*, cioè che le ν curve C di S uscenti da un punto generico x di F, non passino in conseguenza per altri punti di F, variabili con x.

Rappresentati birazionalmente gli elementi (curve) di S coi punti di una curva algebrica piana

$$\Gamma(\xi, \eta) = 0,$$

su Γ verremo ad avere al solito ∞^2 gruppi di ν punti (immagini dei gruppi di curve C uscenti dai punti di F) costituenti un sistema Σ, d'indice n. Tale sistema sarà birazionalmente identico ad F; onde, detto u un integrale abeliano di 1^a specie, appartenente a Γ, la somma $u(\xi_1) + \cdots + u(\xi_\nu)$, relativa ai ν punti $\xi_1 \cdots \xi_\nu$ che corrispondono al punto x di F, si trasformerà in un integrale finito di Picard, J, appartenente ad F (14).

(14) Questa feconda considerazione è dovuta al sig. HUMBERT: *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques,* Journal de Math., (4) 10 (1894).

Sicché, se x assume successivamente le posizioni $x_1, x_2, \cdots, x_n$, in modo che il gruppo $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$ assuma successivamente le posizioni:

$$(\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_\nu'), \quad (\xi_1'', \xi_2'', \cdots, \xi_\nu''), \cdots, \quad (\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_\nu^n),$$

ove sarà ad esempio $\xi_1' \equiv \xi_1'' \equiv \cdots \equiv \xi_1^n$, $\xi_2' \equiv \xi_2'' \equiv \cdots \equiv \xi_2^n$ (ξ_1', ξ_2' denotando i punti immagini di due C che s'intersechino secondo il gruppo $x_1, \cdots, x_n$), la somma

$$\sum_{r=1}^{n} [u(\xi_1^r) + u(\xi_2^r) + \cdots + u(\xi_\nu^r)],$$

risulterà uguale ad

$$J(x_1) + J(x_2) + \cdots + J(x_n),$$

e quindi (per l'ipotesi da cui partiamo) rimarrà costante, al variare continuo dei punti ξ_1', ξ_2'.

In virtù dell'ordinario teorema d'Abel, se ne deduce che l'insieme dei gruppi di Σ uscenti da due punti variabili su Γ, varia entro una serie lineare (d'ordine $n\nu$).

Applicando il teorema I, si trae da ciò che gli ∞^1 gruppi di Σ uscenti da un punto fissato di Γ, appartengono ad una medesima serie lineare; e poiché le serie lineari complete che si ottengono a partire da due punti diversi di Γ, contengono entrambe gli n gruppi di Σ che escono da questi punti, esse dovranno coincidere: cioè *tutti i gruppi di Σ apparterranno ad una medesima serie lineare.*

La corrispondenza tra F e Γ è perciò a valenza zero, e quindi (teorema II) le curve C apparterranno ad un medesimo sistema lineare.

Si è supposto fin qui che il sistema S sia semplice. Se, al contrario, S è composto con un'involuzione di grado l, rappresentando i gruppi di questa coi punti di una nuova superficie F', avremo tra F, F' una corrispondenza $(l, 1)$, che farà passare dal sistema S ad un sistema semplice S' di curve C'.

Dicasi J' un integrale finito di Picard appartenente ad F': mediante la sostituzione razionale che lega le coordinate del punto x' di F', alle coordinate del punto x di F, l'integrale $J'(x')$ si muta in un integrale di 1ª specie $J(x)$, che appartiene ad F ed assume lo stesso valore, $J'(x')$, in tutti gli l punti x corrispondenti ad x'. Sicché l'ipotesi che sieno costanti le somme $I_h(x_1) + \cdots + I_h(x_n)$, si traduce in ciò: che, dicendo

$$x_1' x_2' \cdots x_m' \qquad \left(m = \frac{n}{l}\right)$$

i punti comuni a due curve C', ed J' un integrale qualunque di 1ª specie appartenente ad F', la somma lU, ove si è posto

$$U = J'(x_1') + \cdots + J'(x_m'),$$

rimane costante, al variare continuo delle due C'.

Se ora si fanno variare con continuità le due C', ritornando in fine alle posizioni iniziali, e s'indica con a l'incremento di U dopo questa circolazione, sarà la l'incremento corrispondente di lU; e poiché $la = 0$, dovrà essere $a = 0$: cioè la somma U sarà funzione *uniforme*, ovunque finita, del gruppo $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)$.

Si conclude pertanto che $U =$ cost., e quindi, pel ragionamento precedente, che le curve C' appartengono ad un medesimo sistema lineare $|C'|$.

Ne deriva che le C appartengono al sistema *lineare* trasformato di $|C'|$.

Osservazione. – In particolare, quando la F sia priva di integrali finiti di Picard, la condizione richiesta dal teorema III è senz'altro soddisfatta, e si ha il teorema di Humbert [15]:

Sopra una superficie priva di integrali finiti di Picard, ogni sistema algebrico (irriducibile) di curve algebriche, è contenuto totalmente in un sistema lineare.

4. *Un legame trascendente fra tre curve di un medesimo sistema continuo.* – Al teorema d'Abel ora dimostrato, si posson dare altre forme, che lo rendono più espressivo e più utile. Una di queste forme si ottiene mediante l'applicazione del seguente

TEOREMA IV. *Siano C, C_1, C_2 tre curve algebriche di un medesimo sistema continuo S, appartenente ad una superficie F. Allora, se le C_1, C_2 restano fisse e la C varia con continuità entro al sistema, la differenza tra le somme dei valori di un integrale di 1ª specie nei punti dei gruppi $(C\,C_1)$, $(C\,C_2)$ [16], si mantiene costante.*

Supposto, com'è lecito, che il sistema S sia ∞^1 (irriducibile), di grado n e indice ν, ricorriamo alla solita rappresentazione delle curve di S coi punti della curva piana Γ. Detti $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ i punti del gruppo $(C\,C_1)$, $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)$ i punti del gruppo $(C\,C_2)$, ed I un integrale qualunque di 1ª specie, appartenente ad F, formiamo l'espressione

$$I(x_1) + I(x_2) + \cdots + I(x_n) - I(\overline{x}_1) - I(\overline{x}_2) - \cdots - I(\overline{x}_n).$$

Al variare della sola curva C, questa differenza risulta evidentemente uguale al valore di un certo integrale abeliano (di 1ª specie) della curva Γ, nel punto ξ che corrisponde a C; onde avremo:

$$(1) \qquad I(x_1) + I(x_2) + \cdots + I(x_n) - I(\overline{x}_1) - I(\overline{x}_2) - \cdots - I(\overline{x}_n) = \\ = \lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi) + \lambda,$$

ove $u_1, u_2, \cdots, u_\pi$ sono i π integrali normali di 1ª specie appartenenti a Γ, e le λ son costanti.

(15) *Loc. citato.*

(16) Con $(C\,C_1)$ si rappresenta il gruppo dei punti comuni alle curve C, C_1.

Facendo circolare ξ in modo che traversi il taglio che corrisponde al periodo 1 di u_1, il primo membro aumenta di una combinazione lineare a *coefficienti interi* dei periodi di I; mentre il 2° membro aumenta di λ_1. Sicché λ_1 risulta uguale ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei periodi di I; e analoghe espressioni si hanno per $\lambda_2 \cdots \lambda_\pi$.

Se ora facciamo variare con continuità una delle C_1, C_2, o entrambe, le λ variano con continuità; e siccome nelle espressioni delle $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\pi$ le sole quantità che a priori risultino dipendenti dalla posizione delle C_1, C_2, sono i coefficienti interi delle combinazioni lineari, si conclude che le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\pi$ si mantengono costanti (mentre λ può effettivamente variare).

Sicché l'integrale

$$v(\xi) = \lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi),$$

risulta indipendente dalla posizione delle C_1, C_2 entro al sistema S.

Facendo tendere con continuità la curva C_2 alla C_1, e tenendo fissa la C, il gruppo $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)$ tenderà ad $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; sicché, per un'opportuna scelta del cammino che porta C_2 in C_1, il 1° membro della relazione (1) tenderà a zero, mentre nel 2° membro varierà soltanto λ, tendendo ad un certo limite λ_0.

Al limite avremo dunque:

$$\lambda_1 u_1(\xi) + \cdots + \lambda_\pi u_\pi(\xi) + \lambda_0 = 0.$$

E poiché tale relazione vale per qualunque posizione della curva C entro ad S, cioè per qualunque posizione del punto ξ sulla Γ, e d'altra parte gli integrali $u_1 u_2 \cdots u_\pi$ sono linearmente indipendenti, si conclude che le λ son tutte nulle. La (1) riducesi perciò alla

$$I(x_1) + \cdots + I(x_n) - I(\overline{x}_1) - \cdots - I(\overline{x}_n) = \lambda,$$

la quale dimostra il teorema.

5. *Una seconda forma del teorema d'Abel.* – Avendosi sopra una superficie F un sistema continuo di curve C, per *serie caratteristica* di una curva generica del sistema s'intende la serie lineare di gruppi di punti segati sulla curva fissata dalle C che sono infinitamente prossime ad essa (17).

Chiameremo, per brevità, *somme caratteristiche* relative ad una C del sistema S, le somme dei valori assunti dagli integrali di 1ª specie $I_1, I_2, \cdots, I_q$, appartenenti ad F, nei punti di un gruppo caratteristico di C. Tali somme risultano definite a meno di multipli dei periodi.

Orbene, mediante la proposizione del numero precedente, il teorema di Abel (n° 3) si trasforma nel modo seguente:

TEOREMA V. *La condizione necessaria e sufficiente affinché le curve di un sistema continuo, tracciato sopra una superficie algebrica, siano tra loro equi-*

(17) Vedi la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *39* (1904), pp. 371–392 [Nota XVIII, p. 234: N.d.R.].

valenti (*cioè appartengano ad un medesimo sistema lineare*), *è che siano uguali, a meno di multipli dei periodi, le corrispondenti somme caratteristiche di due curve qualunque del sistema.*

La necessità della condizione essendo evidente, occupiamoci di stabilirne la sufficienza.

Se C_1, C_2 son due curve del sistema, e G_1, G_2 due loro gruppi caratteristici, segando le C_1, C_2, una volta con una curva infinitamente prossima a C_1, e un'altra volta con una curva infinitamente prossima a C_2, avremo (teor. IV):

$$\sum G_1 - \sum (C_1\, C_2) \equiv k\,, \qquad \sum (C_1\, C_2) - \sum G_2 \equiv k \quad \text{(modd. periodi)},$$

ove $\sum G_1, \sum (C_1\, C_2), \cdots$ indicano le somme dei valori assunti da un integrale I di 1ª specie, nei punti dei gruppi $G_1, (C_1\, C_2), \cdots$. Sommando membro a membro, e ricordando l'ipotesi $\sum G_1 \equiv \sum G_2$, si ottiene $2\,k \equiv 0$.

Ora, quando C_2 tende con continuità a C_1, la k, essendo esprimibile mediante una combinazione lineare a coefficienti interi dei semiperiodi di I, non può variare; e poiché quando C_2 coincide con C_1 si ha $k \equiv 0$, dovrà risultare:

$$\sum G_1 \equiv \sum (C_1\, C_2) \equiv \sum G_2\,.$$

Dunque al variare *continuo* delle curve C_1, C_2, rimane costante la $\sum (C_1\, C_2)$. Ciò prova che il sistema S appartiene totalmente ad un sistema lineare (teor. III).

6. *Un criterio di equivalenza per due curve tracciate sopra una superficie.* – Prima di passare ad esporre una terza forma sotto cui può presentarsi il primo teorema d'Abel, dimostreremo una proposizione che può riuscire utile anche in altre circostanze.

Ecco di cosa si tratta:

TEOREMA VI. *Se due curve C_1, C_2, tracciate sopra una superficie F, segano gruppi equivalenti sopra le curve A di un fascio irriducibile* (*razionale o irrazionale*), *esse sono equivalenti o differiscono per curve del fascio.*

Invero i gruppi equivalenti $(A\, C_1)$, $(A\, C_2)$ individuano sopra la curva A una serie lineare g^1_m che li *congiunge*. Al variare della A otteniamo una semplice infinità di queste g^1_m. I loro gruppi si possono perciò rappresentare coi punti di una nuova superficie Φ, la quale verrà a contenere un fascio Σ' di curve razionali A', immagini delle singole g^1_m. I gruppi segnati sulle C_1, C_2 dalle curve A del fascio dato Σ verranno rappresentati dai punti di due curve C_1', C_2', *unisecanti* le A'.

Si può ora costruire in infiniti modi (per esempio aggiungendo ad una delle unisecanti note, un gruppo conveniente di curve A') una terza unisecante D', che non contenga come parte né C_1' né C_2'.

Mediante la corrispondenza $(1, m)$ che si ha tra Φ ed F, alla D' corrisponde su F una curva D, secante ciascuna A (fuori degli eventuali punti base) in un gruppo della relativa g^1_m; sicché, mediante le terne di gruppi

segati dalle tre curve C_1, C_2, D sopra due qualunque A, resta individuata una proiettività tra le relative g^1_m.

Fissato un gruppo di una g^1_m, gl'infiniti gruppi delle altre, omologhi al gruppo fissato nelle suddette proiettività, riempiono una curva L, che, al variare del gruppo entro la propria g^1_m, descrive un fascio lineare $|L|$, le cui curve segnano sulla A (fuori dei punti base) i gruppi delle g^1_m. Al fascio $|L|$ appartengono come curve parziali o totali le C_1, C_2, D; ed è chiaro che la differenza tra $|L|$ ed una di queste curve non può che equivalere ad un insieme di curve A.

Si conclude che le C_1, C_2 sono equivalenti o differiscono per curve del fascio.

Osservazione. – Se il fascio dato è lineare e le curve C_1, C_2 son dello stesso ordine, la seconda alternativa dell'enunciato è evidentemente impossibile.

7. *La terza forma del teorema d'Abel.* – Premesso il teor. VI, consideriamo ancora su F un sistema algebrico ∞^1 S (non composto con un'involuzione) di curve C, e (come al n° 3) rappresentiamo le C coi punti di una curva piana Γ, conservando le stesse notazioni del n° 3.

I gruppi di ν curve C uscenti dal punto x variabile sopra una curva irriducibile A della F son rappresentati su Γ da una ∞^1 irriducibile, T, di gruppi $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$.

Diciamo $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ il gruppo dei punti segati sulla A dalla curva C variabile entro ad S.

Poiché la somma dei valori di un integrale abeliano di 1ª specie u della Γ, nei punti del gruppo $(\xi_1, \cdots, \xi_\nu)$ corrispondente al punto x di A, è uguale (come abbiamo osservato al n° 3) al valore assunto in x da un certo integrale J, di 1ª specie, appartenente ad F; se si ammette che la somma dei valori assunti da un integrale finito della F nei punti $x_1, x_2, \cdots, x_m$, si mantenga costante al variare continuo del gruppo (CA) (cioè al variare continuo della C), riprendendo il ragionamento del n° 3, si perviene alla conclusione che la somma dei valori assunti da u nei punti dei gruppi di T, che passano per un punto di Γ, resta costante al variare continuo di questo punto.

Ciò significa (in virtù dell'ordinario teorema d'Abel), che l'insieme dei gruppi di T uscenti da un punto ξ variabile su Γ (compresovi il punto ξ contato m volte), varia entro una serie lineare (d'ordine $m\nu$).

Applicando il teor. I si conclude che i gruppi di T appartengono ad una medesima serie lineare, cioè che la corrispondenza (m, ν) tra i punti di A ed i punti di Γ, è a valenza zero in un senso, e quindi (teor. II) anche nell'altro. Dunque i gruppi segnati su A dalle curve C, appartengono ad una medesima serie lineare.

La stessa conclusione vale quando il sistema S sia composto con un'involuzione di grado l. Rappresentando i gruppi dell'involuzione coi punti di una nuova superficie F', se la A non appartiene, neanche parzialmente, all'involuzione, se cioè gli $l - 1$ coniugati di un punto generico di A, sono tutti esterni alla curva stessa, la curva A' di F' corrispondente ad A, sarà segata

precisamente in m punti dalle curve C' immagini delle C; e la somma dei valori di un integrale di 1ª specie J', relativo ad F', nei punti di un gruppo $(C'A')$, risultando uguale alla somma dei valori dell'integrale trasformato J, nei punti del gruppo omologo (CA), resterà costante al variare continuo di C'. Poiché il sistema delle C' è semplice, si conclude che i gruppi $(C'A')$, e quindi i gruppi (CA), appartengono ad una medesima serie lineare.

Se poi A appartiene all'involuzione (parzialmente o totalmente), si applicheranno a questo caso le considerazioni colle quali si chiude il n° 3, e si concluderà ancora come sopra.

Supponendo ora che la curva A sia variabile entro un fascio lineare $|A|$, si vede in primo luogo, che i gruppi segati da due diverse A sopra una C sono equivalenti, e quindi che un integrale qualunque di 1ª specie, appartenente ad F, dà in quei gruppi le stesse somme (a meno di multipli dei periodi).

Se dunque le somme cui dànno luogo gl'integrali di 1ª specie della F in un gruppo (CA) rimangono costanti al variare continuo della C, quando la A ha una posizione fissata entro al fascio, lo stesso accadrà per *ogni altra* posizione della A; e quindi le C segheranno gruppi equivalenti sulle curve di $|A|$: donde segue (numero precedente, Oss.) che il sistema S è contenuto totalmente in un sistema lineare.

Viceversa, partendo da quest'ultima ipotesi, si vede subito che le somme degl'integrali di 1ª specie nei punti di un gruppo (CA) rimangono costanti al variare continuo delle curve C, A. Arriviamo così al

TEOREMA VII. *La condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema continuo di curve algebriche C, appartenente ad una superficie F, sia contenuto totalmente entro un sistema lineare, è che la somma dei valori di ogni integrale semplice di 1ª specie della F, nei punti comuni ad una C e ad una curva irriducibile A, fissata entro ad un fascio lineare, resti costante al variare continuo della C.*

8. *Determinazione del numero degli integrali di Picard della 1ª (e della 2ª) specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Come applicazione notevolissima del primo teorema d'Abel, possiamo determinare i numeri degli integrali di Picard delle prime due specie, che appartengono ad una superficie F, di generi p_g, p_a.

A tal uopo prendiamo su F un sistema algebrico completo $\{C\}$, di dimensione $p_g - p_a$, la cui curva generica sia isolata. In base al teorema di Enriques, che afferma la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo [18], possiamo ottenere un sistema soddisfacente alle condizioni richieste, imponendo d punti base generici ad un sistema algebrico regolare $\infty^{d+p_g-p_a}$, cioè ad un sistema la cui curva generica individui un sistema lineare regolare ∞^d.

(18) ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rend. della R. Acc. di Bologna, *9* (1905), pp. 5–13. — Per un'altra dimostrazione del teorema di Enriques, ved. la mia Nota, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari...*, Rendiconti di Palermo, *20* (1905) [Nota XXIII, p. 291; N.d.R.].

Fissiamo su F un fascio lineare irriducibile $|A|$ e consideriamo le somme $c_1, c_2, \cdots, c_q$ (definite a meno di multipli dei periodi), cui dànno luogo gl'integrali di 1ª specie $I_1, I_2, \cdots, I_q$ appartenenti ad F, nel gruppo (CA), comune ad una A fissata e ad una C variabile entro al dato sistema.

Vogliamo provare anzitutto che non possono esservi infinite C che dieno le stesse somme di una C_0 *generica*. Consideriamo perciò entro a $\{C\}$, un sistema algebrico (irriducibile) ∞^1, S, che contenga C_0; e rappresentiamo al solito le curve di S coi punti di una curva piana Γ; così che il gruppo delle ν curve di S che escono dal punto x variabile su A, venga rappresentato da un gruppo di ν punti $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$ di Γ, variabile entro un sistema ∞^1 T.

Tenendo sempre conto del fatto che la somma dei valori assunti da un integrale qualunque di 1ª specie della Γ, nei punti del gruppo $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$, è uguale al valore assunto nel punto x, da un integrale di 1ª specie della superficie F, si vede che, se le curve C_0, C_1 del sistema S dànno luogo agli stessi valori per le somme $c_1, c_2, \cdots, c_q$, l'insieme G_0 dei gruppi di T, che escono dal punto ξ^0 di Γ omologo di C_0, dovrà essere equivalente all'insieme G_1 dei gruppi di T che escono dal punto ξ', omologo di C_1.

Ora: o tutti i gruppi G (ciascuno dei quali è costituito dall'insieme dei gruppi di T uscenti da un punto di Γ) sono equivalenti tra loro, oppure vi è soltanto un *numero finito* di gruppi G equivalenti a G_0. Nel 1° caso tutti i gruppi di T sono equivalenti (teor. I), e quindi lo sono pure tutti i gruppi segati su A dalle curve di S (teor. II), cioè S è contenuto totalmente entro un sistema lineare (teor. VII). Ma ciò deve escludersi, per l'ipotesi che la curva generica C_0 sia isolata.

Resta dunque possibile soltanto il 2° caso: e quindi entro ad S non potrà aversi che un numero finito di curve C, che diano per le somme $c_1, c_2, \cdots, c_q$ valori rispettivamente uguali a quelli dati da C_0.

Ne deriva che la varietà V di tutte le curve di $\{C\}$ che dànno le stesse somme di C_0 ha comune un *numero finito* di curve con ogni sistema algebrico ∞^1 contenente C_0: dunque V è *algebrica*.

Ogni *parte* infinita della V, pel teor. VII, dovrebbe esser costituita da curve tra loro equivalenti. Ma ciò è inconciliabile coll'ipotesi che la curva generica di $\{C\}$ sia isolata. Sicché la V non potrà contenere infiniti elementi.

Si conclude pertanto che, *al variare della C entro al sistema* $\{C\}$, *le somme* $c_1, c_2, \cdots, c_q$ *assumono* $\infty^{p_g - p_a}$ *gruppi distinti di valori*. Ciò porta di necessità la disuguaglianza

$$q \geq p_g - p_a. \tag{1}$$

Indicando con r il numero degli integrali distinti di 2ª specie appartenenti ad F, avremo:

$$r - q \leq p_g - p_a \text{ (19)}, \tag{2}$$

(19) Cfr. la mia Nota citata, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard...*, n° 3, Rendiconti dei Lincei, (5) *13* (1904), pp. 253–258 [Nota XX, p. 252; N.d.R.].

e inoltre:

$$r \geq 2q, \tag{3}$$

come si vede osservando che i $2q$ integrali di 2ª specie aventi per periodi le parti reali e le parti immaginarie dei periodi di $I_1, I_2, \cdots, I_q$, sono tra loro distinti [20]. Le disuguaglianze (1), (2), (3) non possono coesistere, se non essendo

$$q = p_g - p_a, \qquad r = 2(p_g - p_a).$$

Si perviene così al

TEOREMA VIII. *Una superficie algebrica di generi p_g, p_a possiede $p_g - p_a$ integrali di Picard della 1ª specie, e $2(p_g - p_a)$ integrali di Picard della 2ª specie* [21].

9. *Alcuni corollari geometrici dei teoremi precedenti.*

a) Una conseguenza immediata del teor. VII, che per quanto contenga assai meno di questo teorema, giova tuttavia rilevare per la sua forma geometrica, è la seguente:

Se sopra una superficie F le curve di un sistema continuo S segano gruppi equivalenti sopra UNA *curva irriducibile, la quale individui un sistema lineare almeno ∞^1, il sistema S sarà contenuto totalmente in un sistema lineare.*

Questa proposizione ha una certa analogia col teor. VI; ma mentre nel caso attuale, trattandosi di curve C di un sistema continuo, basta soltanto verificare l'equivalenza dei gruppi segati dalle C sopra *una* curva irriducibile di un sistema lineare infinito; nel caso trattato al nº 6 occorreva verificare l'equivalenza dei gruppi segati dalle due date curve C_1, C_2, sulle curve di tutto un fascio.

b) Il teor. II può pure enunciarsi sotto la forma seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C tracciate sopra una superficie F, sia contenuto totalmente in un sistema lineare, è che entro all'ente S, appartengano ad una medesima serie lineare i gruppi di curve C uscenti dai punti di F.

c) Dato sulla superficie F un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C, dicansi $C_1, C_2, \cdots, C_\nu$ le ν curve di S uscenti dal punto x di F, e supponga si che, variando x, la curva composta $C_1 + C_2 + \cdots + C_\nu$ varii entro un sistema lineare.

Presa su F una curva irriducibile A, si consideri il sistema ∞^1, U, di gruppi di punti, segato su A dalle C. Quando x si muove sulla A, l'insieme dei ν gruppi di U che passano pel punto x, si muove nella serie lineare segata su A dal sistema $|C_1 + C_2 + \cdots + C_\nu|$; onde (teor. I) i gruppi di U apparterranno ad una medesima serie lineare.

(20) Vedi ad esempio la mia Nota citata, *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard...*, nº 3.

(21) Per le citazioni relative a questo teorema, veggasi l'introduzione al presente lavoro.

Supponendo che A sia una curva di un sistema lineare infinito, mediante l'applicazione del Corollario *a*), si giunge al teorema:

Se sopra una superficie F si ha un sistema algebrico ∞^1, S, di curve C, tale che la curva composta dalle ν C, che escono da un punto variabile su F, si muova entro un sistema lineare, allora il sistema S stesso è contenuto totalmente in un sistema lineare (22).

§ 2. Il secondo teorema d'Abel e la sua applicazione alle serie continue di involuzioni.

10. *Involuzioni sopra una superficie algebrica. – Il secondo teorema d'Abel sulla superficie.* – Sopra una superficie algebrica F, una serie algebrica ∞^{2r} di gruppi di n punti, tale che r punti generici di F appartengano ad un sol gruppo, si dirà un'*involuzione di grado n e specie $2r$*. Una tale involuzione si riguarderà come *regolare*, quando la varietà V_{2r}, i cui punti rappresentano i gruppi dell'involuzione, è regolare, cioè priva di integrali finiti di differenziali totali.

Un particolare interesse offre lo studio delle involuzioni doppiamente infinite, le quali si chiamano semplicemente *involuzioni*, sottintendendo « di specie 2 ». Una tale involuzione si rappresenta coi punti di una superficie, ed è noto (23) che la regolarità della superficie immagine si può pure esprimere geometricamente coll'uguaglianza dei generi, aritmetico e geometrico, od anche col fatto che la superficie è priva di sistemi completi di curve, non lineari.

In opposizione alle involuzioni regolari delle varie specie, si parlerà di *involuzioni irregolari*.

Ciò premesso, *il secondo teorema d'Abel* si enuncia come appresso:

TEOREMA IX. *Se $I_1 I_2 \cdots I_q$ son gl'integrali semplici di 1ª specie, tra loro indipendenti, che appartengono ad una superficie F, la condizione necessaria e sufficiente affinché un'involuzione di grado n (e specie qualsiasi) data sulla F, sia regolare, è che la somma dei valori assunti da ciascuno dei suddetti integrali, nei punti di un gruppo dell'involuzione, resti costante al variare continuo di questo gruppo.*

La necessità della condizione si stabilisce in modo immediato. Infatti rappresentando i gruppi dell'involuzione coi punti della varietà V, le somme suddette risultano integrali di differenziali totali della V, e poiché, per ipotesi, questa varietà è priva di tali integrali finiti (trascendenti), ne deriva che le somme stesse riduconsi a costanti (24).

(22) [Di questo teorema ha profittato il sig. Castelnuovo a pag. 656 della sua Nota lincea citata] (9 agosto 1905).

(23) Cfr. coll'introduzione al presente lavoro.

(24) Pel caso di un'involuzione *razionale*, costituita dai gruppi comuni alle coppie di curve di un sistema lineare, la necessità della condizione enunciata trovasi in POINCARÉ (*Sur les intégrales de différentielles totales*, Comptes rendus, déc. 1884). Vedi pure l'altra Nota, *Sur une généralisation du théorème d'Abel*, Comptes rendus, janvier 1885.

Supposto, viceversa, che si abbia:

$$(1) \qquad \sum_{l=1}^{n} I_k(x_l) = c_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, q),$$

ove le c_k non mutano variando con continuità il gruppo $(x_1 x_2 \cdots x_n)$ entro alla data involuzione γ, si rappresentino ancora i gruppi della γ coi punti di una varietà V_{2r}.

Le $\infty^{2(r-1)}$ involuzioni di 2ª specie, ciascuna delle quali si ottiene considerando i gruppi della γ dei quali fanno parte $r-1$ punti fissati su F, hanno per immagini su V la superficie Φ di un sistema algebrico Σ, di dimensione $2(r-1)$.

Un integrale di differenziale totale J, che resti finito in ogni punto di V, considerato come funzione di un punto ξ scorrente sopra una Φ, dà luogo ivi ad un integrale semplice di 1ª specie; e poiché il punto ξ è funzione razionale del punto x variabile su F, mediante la corrispondenza $(1, n-r+1)$, che passa tra Φ ed F, l'integrale J si muta in un integrale I di 1ª specie, che appartiene ad F e che assume il valore $J(\xi)$ in ciascuno degli $n-r+1$ punti di F corrispondenti a ξ.

Ma dall'ipotesi (1) segue che la somma dei valori di I in questi $n-r+1$ punti, si conserva costante al variare continuo del punto di Φ; dunque l'integrale $(n-r+1)J(\xi)$ si conserva costante al variare continuo di ξ. Ne segue che dovrà esser nullo il valore di J lungo un ciclo lineare *qualsiasi* di Φ, e quindi l'integrale J di V dovrà esser costante sopra ogni superficie di Σ.

Da ciò si trae facilmente che J è costante su tutta la V. Invero, se Φ_1, Φ_2 son due superficie di Σ passanti pei punti ξ_1, ξ_2 di V, e se inoltre ξ è un punto comune alle due superficie, sarà:

$$J(\xi_1) = J(\xi) = J(\xi_2).$$

Se le due superficie non s'incontrano, come accadrà per posizioni generiche dei punti ξ_1, ξ_2, diciamo $(x_1' x_2' \cdots x_{r-1}')$, $(x_1'' x_2'' \cdots x_{r-1}'')$ i punti fissi rispettivi degli ∞^2 gruppi di γ rappresentati dalle Φ_1, Φ_2, e prendiamo a considerare le superficie $\Phi', \Phi'', \cdots, \Phi^{r-2}$ immagini dei gruppi di γ che passano rispettivamente pei punti fissi:

$$(x_1'', x_2', \cdots, x_{r-1}'), \qquad (x_1'', x_2'', \cdots, x_{r-1}'), \cdots, \qquad (x_1'', x_2'', \cdots, x_{r-2}'', x_{r-1}').$$

Le superficie Φ_1, Φ', Φ'', $\cdots$, Φ^{r-2}, Φ_2 son evidentemente tali che ciascuna incontra la successiva, onde troveremo ancora $J(\xi_1) = J(\xi_2)$.

Si conclude pertanto che ogni integrale finito di differenziale totale, appartenente a V, riducesi ad una costante; cioè che la V è regolare, c. d. d.

Osservazione. – In particolare si ha che *è regolare ogni involuzione esistente sopra una superficie regolare*, il che del resto si stabilisce anche con un noto ragionamento geometrico [25].

11. *Sulle serie continue di involuzioni appartenenti ad una superficie algebrica.* – Giovandosi del teorema stabilito nel numero precedente, si può dimostrare la proposizione che segue:

TEOREMA X. *Se sopra una superficie algebrica esiste un'infinità continua di involuzioni irregolari (doppiamente infinite), esse risultano composte con un medesimo fascio irrazionale di curve.*

Prima di esporre la dimostrazione, precisiamo che cosa deve intendersi per *involuzione composta con un fascio.*

Avendosi sopra una superficie un'involuzione ∞^2, γ, di grado n, ed un fascio Γ di curve algebriche C, privo di parti fisse, si dirà che la γ è composta col fascio, quando ogni curva C appartiene totalmente all'involuzione; cioè quando ogni C che passi per un punto x della superficie, passa in conseguenza per tutto il gruppo di γ, individuato da x.

Se le curve C sono irriducibili, è ben chiaro che la γ si genera come luogo di un'involuzione ∞^1 staccata razionalmente sulla C variabile; se la C generica è riducibile, dicendo $D_1, D_2, \cdots, D_t$ le sue parti irriducibili – necessariamente variabili in un fascio di curve D – sopra le $D_1, D_2, \cdots, D_t$ la γ subordinerà altrettante involuzioni ∞^1 di grado n/t, riferite biunivocamente tra loro: onde anche in tal caso risulta chiara la genesi della γ.

Tornando ora alla nostra superficie F, contenente un'infinità continua di involuzioni irregolari γ, osserviamo anzitutto che, senza alcuna restrizione essenziale, si può supporre che quest'infinità sia semplice e algebrica, in guisa da poterne riferire gli elementi (involuzioni) ai punti di una curva algebrica irriducibile φ.

Detti $I_1, I_2, \cdots, I_q$ i q integrali indipendenti di 1ª specie, appartenenti ad F, si consideri la somma $I_k(x_1) + \cdots + I_k(x_n)$, $(k = 1, \cdots, q)$, estesa ai punti del gruppo $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ variabile entro ad una delle involuzioni γ. Questa somma risulta uguale al valore assunto nel punto x_1 da un certo integrale J, di 1ª specie, appartenente ad F; e poiché, quando x_1 si porta in x_2, la somma non s'altera che di multipli dei periodi, si conclude che $J(x)$ assume lo stesso valore in ciascun punto del gruppo $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Ciò posto, si esprima J come combinazione lineare degl'integrali I, mediante la formola:

$$J = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q + \lambda,$$

ove le $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ son $q + 1$ costanti relative all'involuzione; e si osservi che, al variare continuo dell'involuzione, le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ (ma non già λ) risultano

(25) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Mathematische Annalen, *44* (1894); n° 10.

funzioni razionali del punto ξ scorrente sulla φ, perché il gruppo $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dipende razionalmente da x_1 e da ξ, e quindi i coefficienti dei differenziali delle variabili indipendenti nell'integrale J, risultano funzioni razionali di x_1 e di ξ.

Ma per l'indipendenza lineare di $I_1, \cdots, I_q$, le $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ non posson mai divenire infinite [26]: dunque esse rimarranno costanti al variare dell'involuzione γ. L'integrale

$$K = \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q$$

risulta così indipendente dall'involuzione considerata, e, in virtù della relazione che lo lega a J, assume lo stesso valore nei punti di un gruppo appartenente ad una γ *qualsiasi*.

Fissiamo ora l'attenzione sugl'infiniti gruppi delle γ che passano per un punto generico x di F, e diaciamo C_x la curva (algebrica) luogo di tali gruppi. Se, al variare di x, le curve C_x che si ottengono, si segano a due a due in un punto almeno, poiché l'integrale K è evidentemente costante sopra ogni C_x, avremo, su tutta la F, $K = \text{cost}$. Onde l'integrale J, relativo ad una γ fissata, si ridurrà pure ad una costante, cioè la γ sarà regolare (teor. IX): contro il supposto.

Bisognerà dunque che due C_x qualunque non si taglino. Ora, se la C_x generica è irriducibile, il sistema di tutte le C_x sarà un fascio Γ (senza punti base) e ognuna delle γ risulterà composta con questo fascio. Di più l'involuzione di grado n subordinata da una γ sopra una C_x, appartenendo ad una infinità continua, per un noto teorema [27], sarà lineare; onde la superficie rappresentativa della γ conterrà un fascio di curve razionali, e sarà perciò riferibile ad una rigata [28], avente i moduli indipendenti dall'involuzione considerata. Inoltre il fascio Γ sarà irrazionale, perché altrimenti ogni γ risulterebbe razionale e quindi regolare.

In conclusione le γ vengono generate intersecando le curve di un fascio irrazionale, colle curve di un fascio lineare, variabile in un sistema continuo.

Senza difficoltà, si presenta pure la discussione del caso in cui la curva C_x generica si spezza in t curve $D_1, D_2, \cdots, D_t$, variabili certamente in un fascio Δ, senza punti base, perché due C_x non si tagliano.

La curva D di Δ, uscente da un punto x di F, conterrà n/t punti di ciascuno di quei gruppi delle γ, di cui fa parte il punto x; cosicché le C_x

(26) Se infatti nell'intorno del punto ξ_0 di φ, lo sviluppo in serie di Laurent della funzione λ_i contenesse il termine $\frac{a_i}{(\xi - \xi_0)^s}$ $(s \geq 1)$, affinchè restasse finita la somma $\lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_q I_q$, dovrebbe risultare $a_1 I_1 + \cdots + a_q I_q = 0$; contro l'ipotesi che gl'integrali $I_1, \cdots, I_q$ sieno indipendenti.

(27) Cfr. CASTELNUOVO, *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *28* (1893); HUMBERT, Comptes rendus, (1893) e *Sur quelques propriétés des courbes...*, Journal de Math, (1894).

(28) ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, Math. Annalen, *52* (1899), pp. 449-456.

risulteranno composte mediante i gruppi di un'involuzione di grado t del fascio Δ.

Ora, se $n > t$, le infinite involuzioni subordinate dalle γ sopra una D, dovranno essere lineari, e quindi le γ si potranno generare intersecando le curve composte dai gruppi di un'involuzione (irrazionale) fissata entro al fascio Δ, colle curve di un fascio lineare variabile.

Se invece $n = t$, tra due curve D costituenti una parte di una C_x, si vengono ad avere infinite corrispondenze birazionali, onde ciascuna D sarà razionale o ellittica. Sicché in tal caso le γ risulteranno composte con un fascio irrazionale, la cui curva generica si spezza in n curve razionali o ellitiche.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Osservazione. – Il teor. X si può pure enunciare sotto la forma seguente:

Sopra una superficie algebrica, priva di fasci irrazionali, ogni involuzione d'una serie continua è regolare.

Si noti l'analogia tra questa proposizione e quella dei sigg. Humbert e Castelnuovo, che afferma l'impossibilità dell'esistenza di una serie continua di involuzioni (∞^1) irrazionali, sopra una curva algebrica qualunque.

XXVI.

SUL TEOREMA DI RIEMANN–ROCH E SULLE SERIE CONTINUE DI CURVE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 602–612 (*).

In una recente Nota (1), il sig. Enriques ha stabilito il teorema che « sopra una superficie algebrica ogni serie continua completa di curve, ha la serie caratteristica (2) completa », rilevando come questo risultato fornisca una proprietà che caratterizza le superficie irregolari. Infatti, se il genere numerico p_a è minore del genere geometrico p_g, ogni sistema lineare regolare (la cui serie caratteristica ha la definienza $p_g - p_a$), dovrà esser contenuto in un sistema continuo completo non lineare, il quale anzi si comporrà di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari (3).

Questo risultato può essere precisato:

Sopra una superficie di generi p_a , p_g $(p_g \geq p_a)$ *ogni curva, irriducibile o riducibile, di genere e grado virtuali* π , n, *e di indice di specialità* i (≥ 0), *per cui sia*:

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0,$$

appartiene sempre:

1) *ad un sistema lineare di dimensione*

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i;$$

2) *e ad un sistema continuo di dimensione*

$$r' \geq p_g + n - \pi + 1 - i,$$

che, per $p_g > p_a$, *è composto di* $\infty^{p_g - p_a}$ *sistemi lineari non equivalenti.*

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 7 maggio 1905.

(1) *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rend. della R. Accad. di Bologna, *9* (1905), pp. 5–13. — Vedasi pure la mia Nota: *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, *20* (1905) [Nota XXIII, p. 291; N.d.R.], ove ho esposto un'altra dimostrazione del teorema surriferito, poggiandomi sempre sul principio di Enriques, che una curva variabile con continuità non può spezzarsi senz'acquistare nuovi punti doppi.

(2) Per *serie caratteristica* di un sistema continuo di curve, s'intende la serie lineare di gruppi di punti, segata sopra una curva generica, dalle curve infinitamente vicine del sistema. Cfr. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *39* (1904) [Nota XVIII, p. 234; N.d.R.].

(3) Sotto questa forma il teorema trovasi adoperato nelle ricerche recenti di CASTELNUOVO (Comptes rendus, 23 gennaio 1905) e SEVERI (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 602–642; e Comptes rendus, 3 aprile 1905 [queste « Opere » XXVI, p. 317 e XXII, p. 288; N.d.R.]).

Il primo enunciato costituisce la più generale estensione ai sistemi lineari comunque riducibili, sopra una superficie, del noto teorema di Riemann–Roch; il secondo ha come analoga, nella geometria sulle curve di genere p, la proprietà che ogni gruppo di m ($\geq p$) punti appartiene ad un sistema continuo ∞^m, composto di ∞^p serie lineari g_m, non equivalenti tra loro.

L'estensione del teorema di Riemann–Roch ai sistemi lineari irriducibili sopra una superficie, fu enunciata dal sig. Noether («Comptes rendus», 1886) nell'ipotesi $p_g = p_a (= p)$.

La giustificazione del risultato fu data da Enriques (*Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, «Memorie dell'Acc. di Torino», 1893), con restrizioni che risultarono poi sovrabbondanti: da una parte stabilendo come la completezza della serie caratteristica dei sistemi lineari completi (cui il teorema può appoggiarsi secondo il sig. Noether), costituisca un carattere *della superficie* (l. c. IV, 1 , 2), che risultò poi coincidere con $p_g = p_a$; d'altra parte mostrando come la relazione

$$r \geq p + n - \pi + 1 ,$$

sussista sempre pei sistemi lineari, i cui caratteri soddisfano a certe diseguaglianze (l. c. IV, 4,5).

Il sig. Castelnuovo, in due Memorie pubblicate, la prima negli «Atti della Società italiana delle Scienze» (1896) e la seconda negli «Annali di Mat.» (1897), essendo riuscito a risolvere in modo esauriente la questione della deficienza della serie caratteristica dei sistemi lineari, per $p_g \geq p_a$, potè dare la relazione

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i ,$$

pei sistemi lineari *irriducibili* sopra una superficie qualsiasi.

Più recentemente, io ho esposto una nuova dimostrazione assai semplice, del teorema sulla serie caratteristica, che sta a fondamento delle ricerche precedenti [4].

A base della mia dimostrazione è posto un lemma, che, opportunamente generalizzato, adempie un ufficio essenziale anche nella trattazione più generale che qui espongo.

Nell'ultima parte di questa Nota, dimostro il secondo dei fatti enunciati deducendolo dal primo, coll'aiuto del teorema che concerne la completezza della serie caratteristica di un sistema algebrico completo.

È mio debito dichiarare che il teorema sulla serie continua (costituita da $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari) alla quale appartiene una curva i cui caratteri soddisfino alla disuguaglianza

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0 ,$$

mi fu comunicato dal prof. Enriques, il quale lo aveva dimostrato poggiandosi su quanto già si conosceva intorno al teorema di Riemann–Roch. Io non ho

(4) *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rend. dei Lincei, (15) *12* (1903), pp. 250–257 [Nota XVI, p. 224; N.d.R.].

fatto altro che semplificare la dimostrazione, adattando a questa ricerca più generale il procedimento che già avevo seguito nella mia Nota « *Sulla deficienza...* ». – La gentilezza del prof. Enriques nell'incitarmi a pubblicare la mia dimostrazione, non poteva dispensarmi dal fare questa dichiarazione doverosa.

1. Ci riferiremo ad una superficie F, di un certo ordine m (in S_3), che supporremo dotata soltanto di curva doppia ordinaria e di punti tripli improprî (tripli anche per la suddetta curva).

E sopra F considereremo sistemi lineari, irriducibili o riducibili, privi di punti base assegnati.

Queste limitazioni non introducono alcuna restrizione essenziale (di carattere invariante) nelle dimostrazioni che seguono, e servono soltanto ad una maggiore semplicità di esposizione.

Per ogni curva, o sistema lineare di curve $|C|$, riteniamo definiti il genere ed il grado virtuali π, n, cui si riferiscono le note formole di addizione e sottrazione dei sistemi. Designamo poi con $i\,(\geq 0)$ *l'indice di specialità* di $|C|$, cioè il numero delle superficie aggiunte φ^{m-4}, linearmente indipendenti, che passano per una C.

2. Dato sopra F il sistema lineare $|C|$, per una C conduciamo una superficie S, d'ordine l, che seghi ulteriormente su F una curva K (irriducibile), dotata di nodi, nei punti ove S interseca (fuori di C) la linea doppia di F.

Allora, per valutare la dimensione di $|C|$, si presenta la seguente via: si calcoli anzitutto la dimensione R del sistema completo $|C+K|$, che contiene le sezioni di F colle superficie d'ordine l; si cerchi quindi la dimensione d della serie segata su K dalle curve di quel sistema: la dimensione di $|C|$ risulterà

$$r = R - d - 1. \tag{1}$$

La dimensione R di $|C+K|$, quando l è abbastanza alto, si calcola facilmente facendo capo alle note formole di postulazione. Invero, mediante queste formole si riesce ad esprimere la dimensione R_1 del sistema $|L_1|$ segato su F (fuori della linea doppia) dalle superficie aggiunte φ^{l_1} (di un ordine l_1 abbastanza alto), in funzione del grado N_1 e del genere Π_1 dello stesso sistema; e si trova:

$$R_1 = p_a + N_1 - \Pi_1 + 1,$$

ove p_a è il *genere aritmetico* di F (cioè il numero virtuale delle φ^{m-4} linearmente indipendenti).

Ciò posto, dicansi N, Π il grado ed il genere di $|C+K|$, ed j il numero delle intersezioni di una L_1 con una $C+K$. Allora il genere ed il grado del sistema $|L_1+C+K|$, segato su F dalle φ^{l+l_1}, verranno espressi rispettivamente dalle formole

$$\Pi + \Pi_1 + j - 1, \qquad N + N_1 + 2j,$$

onde sarà:

$$R_2 = p_a + (N + N_1 + 2j) - (\Pi + \Pi_1 + j - 1) + 1$$

la dimensione di $|L_1 + C + K|$.

Ora, per la natura delle singolarità supposte in F, la curva generica L_1 può ritenersi priva di punti multipli, sicché, quando l sia abbastanza grande, il sistema $|C + K|$ segherà sopra L_1 una serie non speciale e *completa* (Noether, Castelnuovo). Crescendo, se occorre, il valore di l, si può ottenere che quest'ultima serie contenga la serie caratteristica di $|L_1|$ e lasci come residuo una serie non speciale. Allora, in forza di una proprietà semplicissima delle serie lineari sopra una curva (5), si conclude che sarà completa anche la serie segata da $|L_1 + C + K|$ sopra L_1. Onde, per valori elevati di l, avremo:

$$R = R_2 - (N_1 + j - \Pi_1) - 1,$$

ossia:

$$R = p_a + N - \Pi + 1. \tag{2}$$

Tentiamo ora di valutare la dimensione d della serie segata sulla curva K da $|C + K|$. Diciamo perciò ω, ν il genere ed il grado (virtuali) di K ed s il numero delle intersezioni di K con una C (6). La serie di cui dobbiamo occuparci è una $g_{\nu+s}$, di ordine $\nu + s$, la quale potrà risultare speciale o non speciale, completa o deficiente; supponendo la $g_{\nu+s}$ completa e non speciale, per le formole (1), (2) e per le:

$$\begin{cases} \Pi = \pi + \omega + s - 1 \\ N = n + \nu + 2s, \end{cases} \tag{3}$$

si avrebbe:

$$r = p_a + n - \pi + 1 \text{ (7)}.$$

Ma se la $g_{\nu+s}$ è speciale e completa si avrà $d > \nu + s - \omega$, $r < p_a + n - \pi + 1$; se essa è non speciale e deficiente, sarà invece $d < \nu + s - \omega$, $r > p_a + n - \pi + 1$; sicché a prima vista non si potrà giungere ad alcuna conclusione positiva circa il valore di r, perché la specialità e la deficienza della $g_{\nu+s}$ influiscono in senso contrario sul valore di r; né si sa a priori quale delle due influenze prevalga.

(5) La dimostrazione della proprietà che qui si usa, trovasi in una nota a piè della p. 83 della Memoria del sig. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali...*, Annali di Matematica, (2) *25* (1897). Anche il ragionamento esposto pel calcolo di R, è un'imitazione di quello che si legge al n° 43 della stessa Memoria.

(6) È opportuno osservare che, in generale, la curva K passa per ciascuno dei punti d'appoggio di C sulla linea doppia; ma che tuttavia *sulla superficie* questi punti non devono riguardarsi come intersezioni di C con K, perché intorno a ciascuno di essi le C, K appartengono a falde differenti.

(7) Il valore così ottenuto è stato definito come *dimensione virtuale* del sistema in F. ENRIQUES, *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche*, Memorie Accad. Torino, (2) *44* (1893), pp. 171–232.

Fissiamo la nostra attenzione sopra una di queste due circostanze: come può avvenire che la $g_{\nu+s}$ risulti speciale?

Poniamo che il sistema $|C|$ abbia un indice di specialità $i > 0$; allora per una C passano $\infty^{i-1}\ \varphi^{m-4}$, aggiunte ad F, le quali segano su una K generica (che non è contenuta in nessuna φ^{m-4}) gruppi residui della serie caratteristica di $|K|$ (rispetto alla serie canonica); quindi la $g_{\nu+s}$ ha un indice di specialità $\geq i$.

Orbene, noi arriveremo a dimostrare che, per l assai grande, la serie $g_{\nu+s}$ ha precisamente l'indice di specialità i, ed in particolare che essa è non speciale per $i = 0$.

Ciò risulterà senz'altro quando avremo stabilito che *sulla curva K, sezione ulteriore di F colla superficie S d'ordine l assai alto, condotta genericamente per una C, le superficie φ^{m-4}, passanti per C, segnano, fuori dei punti fissi, una serie completa.*

3. Per raggiungere quest'ultimo scopo, occorre premettere il lemma seguente:

Sulla curva K, ulteriore intersezione di F con una superficie S, d'ordine l, condotta genericamente per una curva C (comunque riducibile) di F, le superficie di un dato ordine passanti per C e pei punti doppi di K, segano, fuori dei punti fissi, una serie lineare completa (8).

Nel ragionamento successivo, per brevità, chiameremo *aggiunte* alla curva K, le superficie passanti per C e pei punti doppi di K.

Il concetto della dimostrazione è questo: si prova dapprima che le superficie aggiunte d'un ordine abbastanza elevato h, segano su K una serie completa; eppoi si prova che, se questa proprietà è vera per l'ordine h, lo è pure per l'ordine $h - 1$.

Il primo fatto si stabilisce con un'ovvia estensione di un ragionamento del sig. Castelnuovo (9): condotta per C una superficie d'un ordine arbitrario q, che non contenga K, s'indichi con M il gruppo da essa staccato su K, fuori del gruppo (CK), comune a C, K (10).

Le superficie d'un ordine elevato t, passanti pei punti doppi di K, segano ulteriormente su K una serie completa non speciale $g_\mu^{\mu-\omega}$ (11), la quale può anche ritenersi segata su K, fuori dei punti fissi, dalle *aggiunte* d'ordine $t + q$, passanti pel gruppo M.

(8) Quando manca la C si ricade nel lemma già dimostrato nel mia citata Nota: *Sulla deficienza della serie caratteristica...* (n° 2).

(9) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare...*, Rendic. di Palermo, 7 (1893).

(10) Si badi che, in questo ragionamento, per gruppo (CK) deve intendersi l'insieme di *tutti* i punti comuni a C e a K, ivi compresi anche quelli che cadono sulla linea doppia (cfr. colla nota (6) a piè di pagina).

(11) G. CASTELNUOVO, *Sui multipli...*

Ora, quando t sia abbastanza grande, gli ε punti del gruppo M presentano ε condizioni alle *aggiunte* d'ordine $h = t + q$; sicché la serie segata su K – fuori dei punti fissi – da queste ultime aggiunte, è una $g^{\mu+\varepsilon-\omega}_{\mu+\varepsilon}$, cioè una serie *completa*, non speciale.

Per passare dall'ordine $h\,(= t + q)$ all'ordine $h - 1$, riprenderò, con qualche modificazione e semplificazione di forma, il ragionamento esposto al n° 2 della mia Nota: «*Sulla deficienza della serie caratteristica*...».

Siano ∞^x le superficie Ψ^h, d'ordine h, aggiunte a K, e tra queste ve ne siano ∞^y per K, sicché la dimensione della serie completa g^{ϱ}_{η} $(\eta = \mu + \varepsilon,$ $\varrho = \mu + \varepsilon - \omega)$, segata dalle Ψ^h su K, sia $\varrho = x - y - 1$. Se con z denotiamo il numero delle condizioni imposte alle Ψ^h (o, ciò che è lo stesso, ai gruppi di g^{ϱ}_{η}), dai punti del gruppo G segato su K da un piano dato α, la dimensione della serie *completa* $g^{\varrho}_{\nu} - G$, risulterà uguale a $\varrho - z$.

Ora, indicando con x_1 l'infinità delle superficie Ψ^{h-1} aggiunte a K, e con y_1 l'infinità delle Ψ^{h-1} che passano per K, avremo il valore $\varrho_1 = x_1 - y_1 - 1$ per la dimensione della serie segata su K, fuori dei punti fissi, dalle Ψ^{h-1}.

Si tratterà di provare che $\varrho_1 = \varrho - z$.

Perciò si osservi che le superficie Ψ^t d'un ordine *arbitrario* t, passanti per la curva composta $C + K$, segano su α *tutte* le curve d'ordine t, passanti per la sezione di $C + K$ con α (12). Ciò posto, diciamo $[h]$ l'infinità delle curve d'ordine h segate su α dalle Ψ^h: allora vi saranno $\infty^{[h]-z}$ di tali curve, passanti inoltre pel gruppo G; e queste, per l'osservazione precedente, costituiranno il sistema di tutte le curve d'ordine h passanti per la sezione della curva $C + K$ col piano α; onde risulterà:

$$x_1 = x - [h] - 1\,, \qquad y_1 = y - [h] + z - 1,$$

dalle quali rilevasi:

$$\varrho_1 = x - y - 1 - z = \varrho - z, \qquad \text{c. d. d.}$$

4. Il lemma dimostrato conduce immediatamente alla conclusione accennata alla fine del n° 2.

Se, invero, si sceglie abbastanza alto l'ordine l della superficie S condotta per C, la curva K avrà un numero così elevato di punti doppi (sulla linea doppia di F) che le superficie d'ordine $m - 4$ passanti per C e pei punti doppi di K, conterranno in conseguenza l'intera linea doppia di F, cioè saranno aggiunte ad F. In forza del lemma, si conclude pertanto che queste aggiunte segano su K una serie completa.

In particolare, quando non esistano φ^{m-4} passanti per C, la serie $g_{\nu+s}$, segata su K dal sistema $|C + K|$, risulterà non speciale.

(12) Il ragionamento semplicissimo con cui si giustifica quest'asserzione, trovasi al n° 2 della citata Nota: *Sulla deficienza della serie caratteristica*...

5. Siamo ormai in grado di assegnare un limite inferiore per la dimensione r del sistema lineare $|C|$.

Infatti, l'indice di specialità i di questo sistema, uguaglia l'indice di specialità della serie $g^d_{\nu+s}$, segata su K dal sistema $|C+K|$, onde:

$$d \leq \nu + s - \omega + i.$$

Ricordando le relazioni (1), (2), (3) del n° 2, si trova:

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

Otteniamo così il teorema:

Sopra una superficie di genere aritmetico p_a, ogni curva, irriducibile o no, di caratteri virtuali n, π e d'indice di specialità i, per cui sia:

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0,$$

appartiene sempre ad un sistema lineare di dimensione:

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

6. Supponiamo ora che il sistema lineare $|K|$ appartenga ad una serie continua di curve, non lineare, la quale risulti composta di ∞^p sistemi lineari completi, non equivalenti.

Indicando con $|\bar{K}|$ un sistema generico della serie, diverso da $|K|$, cerchiamo di costruire il sistema:

$$|C + K - \bar{K}|.$$

Occorre perciò considerare la serie $\bar{g}_{\nu+s}$ segata da $|C+K|$ su una curva $\bar{K}$. Questa serie può essere speciale, e può essere deficiente; ciò che a noi importa è questo: l'indice di specialità di $\bar{g}_{\nu+s}$ non può superare quello della $g_{\nu+s}$ segata da $|C+K|$ su K.

Infatti, un gruppo $\bar{G}_{\nu+s}$ di $\bar{g}_{\nu+s}$, variando con continuità insieme a $\bar{K}$, può ridursi ad un gruppo $G_{\nu+s}$ di $g_{\nu+s}$ su K, e ciò senza che il genere della curva $\bar{K}$ diminuisca. Poiché in un tale passaggio al limite, l'indice di specialità del gruppo non può decrescere, si conclude che il sistema:

$$|C + K - \bar{K}|,$$

corrispondente ad una $\bar{K}$ generica, esisterà certamente se:

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0;$$

ed anzi avrà una dimensione:

$$\geq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

In tal caso $|C|$, come $|K|$, apparterrà quindi ad una serie ∞^p di sistemi lineari non equivalenti.

Di qui segue il teorema:

Se sopra una superficie un sistema lineare di caratteri π, n, i, tali che

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0,$$

appartiene ad una serie continua ∞^p di sistemi lineari non equivalenti ($p \geq 0$), *ogni altro sistema analogo apparterrà ugualmente ad una serie ∞^p di sistemi lineari non equivalenti.*

7. Resta da valutare p in funzione dei generi geometrico ed aritmetico (p_g , p_a) della superficie. E per questo occorre fare uso del teorema: « la serie caratteristica di un sistema continuo completo, è essa pure completa ».

Consideriamo il sistema lineare $|L|$ che contiene le sezioni di F colle superficie di ordine l assai elevato, e designamone con Π, N, il genere ed il grado. La dimensione di $|L|$ vale (n° 2):

$$R = p_a + N - \Pi + 1.$$

Sopra una curva generica L, le superficie aggiunte φ^{m-4}, segano la serie *completa* $g_t^{p_g-1}$ residua della serie caratteristica g_N^{R-1} di $|L|$ (rispetto alla serie canonica). Quest'affermazione non è infatti che un caso particolare di quella con cui si chiude il n° 2.

Segue da ciò (pel teorema di Riemann-Roch) che la g_N^{R-1} è contenuta in una serie completa $g_N^{p_g+N-\Pi}$. Ora questa serie completa è la serie caratteristica di un sistema continuo $\{L\}$ contenente $|L|$; la dimensione di $\{L\}$ vale dunque:

$$p_g + N - \Pi + 1.$$

Si vede poi che $\{L\}$ sarà composto di infiniti sistemi lineari, non equivalenti; e la dimensione di un sistema generico $|\overline{L}|$ della serie varrà:

$$\overline{R} \geq p_a + N - \Pi + 1.$$

Ma $|\overline{L}|$, variando con continuità, può tendere ad $|L|$, ed in questo passaggio al limite, $\overline{R}$ non decresce; dunque:

$$\overline{R} = R,$$

ed $\{L\}$ consta di $\infty^{p_a-p_g}$ sistemi lineari.

Si conclude così che:

Sopra una superficie di generi p_g , p_a, ogni sistema lineare di curve, i cui caratteri π , n , i, soddisfino alla disuguaglianza:

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0,$$

appartiene ad una serie $\infty^{p_g-p_a}$ di sistemi lineari non equivalenti.

Si può avere un'effettiva contraddizione all'enunciato per $p_a + n - \pi + 1 - i < 0$.

Così se imponiamo al sistema $\{L\}$, di cui sopra, $R + p_g - p_a - \delta$ punti base indipendenti ($\delta < p_g - p_a$), avremo un sistema algebrico *completo* di dimensione δ, la cui curva generica ha appunto i caratteri:

$$N' = \Pi + \delta - p_g - 1, \qquad \Pi' = \Pi, \qquad i' = i,$$

soddisfacenti alla relazione:

$$p_a + N' - \Pi' + 1 - i' = \delta - (p_g - p_a) - i < 0.$$

XXVII.

SULLE CURVE ALGEBRICHE VIRTUALI APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *38* (1905), pp. 859–865.

Date sopra una superficie algebrica F due curve algebriche (comunque riducibili) A, B, si può, dal confronto aritmetico dei loro caratteri virtuali, decidere se è o non è possibile la sottrazione $A - B$? A tale questione, che si presenta spesso nella teoria delle superficie algebriche, è dedicata questa breve Nota.

Per giungere ad un criterio aritmetico rispondente alla questione posta, mi è sembrato opportuno di ampliare il campo delle curve algebriche (effettive) appartenenti alla F, introducendo le *curve virtuali*, in guisa che, nel campo ampliato di tutte le curve (effettive e virtuali), abbia sempre senso l'operazione $A - B$.

Detta C una curva virtuale *equivalente* alla differenza $A - B$, definisco il *grado virtuale* n, il *genere virtuale* π e l'*indice di specialità* i della curva C (indice che, contrariamente al caso delle curve effettive, può anche risultare *maggiore* del genere p_g di F); eppoi provo che il procedimento indicato nella mia Nota *Sul teorema di Riemann–Roch e sulle serie continue di curve*... [1], per dimostrare, sulla superficie F, il teorema di Riemann–Roch relativo ad una curva effettiva (irriducibile o no), vale anche, con opportuni accorgimenti, per la curva virtuale C.

Indicando con r (≥ -1) la dimensione del sistema lineare $|C|$, e con p_a il genere aritmetico di F, si perviene alla disuguaglianza:

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i,$$

che esprime il teorema di Riemann–Roch sotto la forma più generale possibile.

E se ne trae che *la condizione sufficiente (ma non necessaria) per l'esistenza del sistema* $|A - B|$, *è espressa dalla disuguaglianza*:

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geq 0.$$

1. La curva virtuale C, composta colla coppia *ordinata* delle curve effettive A, B, tracciate sulla superficie F, vien definita per astrazione dalle proprietà seguenti:

a) Se D è una curva di F, tale che esista il sistema lineare $|D + A - B|$, ogni curva E di questo sistema, si dirà *equivalente* alla *somma* della curva

(1) Atti della R. Acc. di Torino, *40* (1905), pp. 602–612 [Nota XXVI, p. 317; N.d.R.].

effettiva D e della curva virtuale C, e si scriverà:

$$E \equiv D + A - B \equiv D + C \equiv C + D.$$

b) Se D, E sono due curve effettive tali che sia:

$$E \equiv C + D,$$

si dirà che C è la *differenza* delle curve effettive E, D, ovvero che D è la differenza delle E, C; e si scriverà:

$$C \equiv E - D, \qquad D \equiv E - C.$$

Il sistema lineare $|D|$ si chiamerà pure *il sistema residuo di C rispetto ad $|E|$*.

c) Due curve virtuali C, C_1 composte rispettivamente colle coppie ordinate A, B e A_1, B_1, diconsi *equivalenti* quando

$$A + B_1 \equiv A_1 + B.$$

Usando i simboli delle due curve virtuali, questa relazione si scriverà sotto la forma:

$$C \equiv C_1.$$

d) Quando esista il sistema lineare $|A - B|$, per curva virtuale C, composta colla coppia ordinata A, B, intenderemo una curva qualunque di quel sistema; cioè in tal caso assumeremo per definizione:

$$C \equiv A - B.$$

Quest'ultima definizione è legittima, perché le *a*), *b*), *c*) hanno un senso ben determinato, se si riferiscono ad una curva C del sistema $|A - B|$.

Osservazione. – Avendo così definita la curva virtuale C, composta colla coppia ordinata A, B, viene ad acquistare un significato preciso la scrittura $C \equiv A - B$, anche quando la differenza $A - B$ non sia possibile nel campo delle curve effettive.

Invero, essendo

$$A \equiv B + A - B,$$

in base alla *a*), potremo scrivere:

$$A \equiv B + C,$$

e in base alla *b*):

$$C \equiv A - B.$$

2. Per *grado virtuale* n della curva C s'intenderà il grado virtuale della differenza $A - B$, calcolato come se esistesse il sistema $|A - B|$.

Analogamente si definisce il *genere virtuale* π di C. Sicché, indicando con a, b i gradi virtuali, con α, β i generi virtuali delle A, B, con j il numero

delle intersezioni delle medesime curve, avremo:

$$n = a + b - 2j, \qquad \pi = \alpha - \beta + b - j + 1.$$

Si chiamerà poi *numero delle intersezioni della C con un'altra curva E della superficie*, la differenza $[AE] - [BE]$ tra i numeri delle intersezioni delle A, B con E.

Indichiamo con $|L|$ il sistema canonico della superficie F, non spogliato dalle eventuali curve eccezionali, cioè il sistema delle sezioni di F (che sia di ordine m) colle superficie aggiunte d'ordine $m-4$, φ^{m-4} (2).

Se non esiste (nel campo delle curve effettive) il sistema lineare

$$|L - C| = |L + B - A|,$$

residuo di C rispetto ad $|L|$, la curva C si dirà *non speciale*; mentre si dirà *speciale coll'indice di specialità i*, quando esista il sistema $|L - C|$ e contenga i curve linearmente indipendenti.

Allorquando la C è una curva effettiva (non eccezionale), l'*indice di specialità* ha lo stesso valore, sia che s'intendano o non si intendano incluse nel sistema $|L|$, le curve eccezionali di F.

Ma non sempre è così allorché C non è una curva effettiva.

Così ad esempio se si assume

$$C \equiv A - 2A,$$

il sistema $|L - C|$ risulta l'aggiunto di $|A|$, quando con $|L|$ s'intenda il sistema segato dalle φ^{m-4}, mentre risulta l'aggiunto di $|A|$ diminuito delle curve eccezionali, quando $|L|$ indichi il sistema canonico puro. Questi due sistemi hanno dimensioni diverse, perché l'aggiunto di $|A|$ non contiene le curve eccezionali come parti fisse.

A proposito del sistema $|L - C|$, osserverò pure che, quando C sia una curva *speciale* non effettiva, il sistema residuo di C rispetto ad $|L|$ è sempre non speciale (come accade nell'esempio precedente).

3. Supposto la F immersa nello S_3 (e dotata di sola linea doppia con punti tripli), si può costruire proiettivamente il sistema:

$$|M| = |L - C|$$

nel modo che segue:

Conducasi per B una superficie d'ordine h, che seghi F lungo la curva $B + B_1$; allora, se esiste il sistema $|M|$, esisteranno superficie aggiunte d'ordine $m - 4 + h$ passanti per la curva $A + B_1$ e seganti F, fuori della linea doppia e delle A, B_1, lungo le curve del sistema completo $|M|$.

Le curve del sistema $|M|$ si posson chiamare « le ulteriori intersezioni di F colle aggiunte d'ordine $m - 4$, passanti per la curva virtuale C ».

(2) Quando sia $p_g = 0$, in luogo di $|L|$ si dovrà considerare il sistema virtuale $|K' - K|$, ove $|K'|$ è l'aggiunto di un sistema lineare $|K|$.

Similmente si definisce cosa debba intendersi colla frase « ulteriore intersezione di F con una superficie S d'ordine l, abbastanza alto, passante per la C ». Condotta per B la solita superficie d'ordine h, si costruisca una superficie d'ordine $l+h$ (abbastanza alto), passante per la curva $A+B_1$; la curva K, ove quest'ultima superficie sega F, fuori delle A, B_1, è l'ulteriore intersezione di F con una superficie d'ordine l condotta per C. Si ha:

$$|A+B_1+K| = |E+B+B_1|,$$

ossia:

$$|K| = |E+B-A| = |E-C|,$$

ove $|E|$ è il sistema segato su F dalle superficie d'ordine l.

Si noti che, se la costruzione è fatta in modo generico, la curva K ha soltanto dei nodi (in punti della linea doppia).

4. Diciamo ν, ω il grado e il genere della curva K (di cui alla fine del numero precedente), s il numero delle intersezioni delle curve C, K, ed indichiamo con $g_{\nu+s}$ la serie lineare segata su K dal sistema $|C+K|$.

Supposto che la C sia speciale, si prova facilmente che *le ulteriori intersezioni M della superficie F, colle φ^{m-4} passanti per la curva virtuale C, segano su K gruppi residui della serie $g_{\nu+s}$ rispetto alla serie canonica di K.*

Infatti essendo

$$|C+K+M| = |K+L|,$$

il sistema $|C+K+M|$ risulta aggiunto al sistema K: e da ciò segue l'asserto.

5. Dimostriamo ora che *quando sia abbastanza alto l'ordine l di una superficie condotta per la curva virtuale C, a segare ulteriormente la F lungo la curva K, le φ^{m-4} passanti per C (cioè le φ^{m-4+h} passanti per $A+B_1$) segano su K, fuori dei punti fissi, una serie lineare completa.*

Le superficie d'un ordine qualunque, e quindi, in particolare, quelle di ordine $m-4+h$, che passano pei punti doppi di K e per la curva $A+B_1$ (ove B_1 è l'ulteriore intersezione di F con una superficie d'ordine h condotta per B), segano su K, fuori dei punti fissi, una serie completa [3]. Ora, se l è abbastanza alto, la curva K ha un numero così elevato di punti doppi, sulla linea doppia di F, che ogni superficie d'ordine $m-4+h$, passante pei nodi di K, è di conseguenza aggiunta ad F. Ma le aggiunte d'ordine $m-4+h$ passanti per $A+B_1$, segano su F, fuori della linea doppia e delle A, B_1, le curve del sistema $|L-C|$; dunque si conclude col teorema enunciato.

Ne deriva che « per l abbastanza alto, la serie $g_{\nu+s}$ e la curva C hanno lo stesso indice di specialità ».

(3) Ved. il lemma al n. 3 della mia Nota: *Sul teorema di Riemann-Roch...*, citata in (1).

6. Stabilite per la curva virtuale C, le due proposizioni di cui ci siamo occupati nei nn. 4, 5, si può ripetere parola per parola il ragionamento sviluppato nei nn. 2, 5 della mia Nota *Sul teorema di Riemann–Roch...* e si giunge così al teorema:

Se la curva virtuale $C \equiv A - B$ *ha il grado* n, *il genere* π *e l'indice di specialità* i, *la dimensione* r *del sistema lineare* $|C|$ *soddisfa alla disuguaglianza*

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

In particolare, quando la sottrazione $A - B$ *non sia possibile nel campo delle curve effettive, si ha:*

$$-1 \geq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

L'ultima parte del teorema, introducendo i caratteri delle curve A, B, si può anche enunciare come segue:

Se sulla superficie F, *d'ordine* m *e di generi* p_g, p_a, *si hanno le curve algebriche* A, B, *di gradi* a, b *e di generi* α, β, *indicando con* j *il numero delle loro intersezioni e con* i (≥ 0) *il numero delle curve indipendenti contenute nel sistema lineare* $|L + B - A|$, *ove* L *è la sezione di* F *con un'aggiunta d'ordine* $m - 4$, *da considerarsi virtualmente se* $p_g = 0$, *la disuguaglianza*

$$a - j \geq \alpha - \beta + i - p_a,$$

dà una condizione sufficiente per l'esistenza del sistema $|A - B|$.

Osservazione. – A prima vista sembrerebbe che si potesse giungere immediatamente alla condizione trovata, nel modo seguente:

Dicasi i il numero delle curve indipendenti del sistema

$$|L + B - A|,$$

e suppongasi che non esistano curve effettive equivalenti ad $A - B$: allora, il sistema $|L + B - A|$ dovrà essere non speciale, e quindi indicando con N, Π il grado e il genere di una curva $L + B - A$, risulterà, in base al teorema di Riemann–Roch:

$$i - 1 \geq N - \Pi + p_a + 1.$$

Sostituendo ad N, Π i loro valori in funzione dei gradi e dei generi delle curve L, A, B, si ottiene la disuguaglianza:

$$-1 \geq \beta - \alpha + a - j - i + p_a, \qquad \text{ovvero:} \quad -1 \geq p_a + n - \pi + 1 - i,$$

ove n, π, i sono i tre caratteri della curva virtuale C.

Ma questo ragionamento è poggiato essenzialmente sull'ipotesi dell'esistenza del sistema $|L + B - A|$, sicché diviene illusorio quando sia $i = 0$.

7. Osserverò terminando, che, sopra una curva di genere p, l'estensione del teorema di Riemann–Roch ai gruppi virtuali di punti (definiti in modo analogo alle curve virtuali di una superficie), è del tutto ovvia.

Se, invero, A , B son due gruppi effettivi, costituiti risp. da a , b punti, e se non esiste nessun gruppo effettivo $A - B$, ma esistono i gruppi effettivi indipendenti $L + B - A$, ove L è un gruppo canonico della data curva, la serie $|L + B - A|$ è certamente non speciale, e quindi si ha:

$$i - 1 = (2p - 2 + b - a) - p , \qquad \text{ovvero:} \quad -1 = n - p + i ,$$

ove n è il grado della serie virtuale $|C| = |A - B|$.

Questo ragionamento cade in difetto quando sia $i = 0$. Ma in tal caso, continuando ad indicare con $n\,(= a - b)$ il grado del gruppo C, si vede, in primo luogo, che $n - p \geq -1$. Infatti, se fosse $n - p < -1$, cioè $a < b + p - 1$, la serie $|L + B|$, che è di dimensione $b + p - 2$, conterrebbe A, contro l'ipotesi $i = 0$. In secondo luogo si vede che $n - p < 0$: perché se fosse $n - p \geq 0$, cioè $a - p \geq b$, la serie $|A|$, di dimensione non inferiore ad $a - p$, conterrebbe certamente B. Dalla combinazione delle due disuguaglianze risulta $-1 = n - p$. Dunque:

Se sopra una curva di genere p, il gruppo virtuale $A - B$ ha il grado n e l'indice di specialità i, la dimensione $r\,(\geq -1)$ della serie lineare $|A - B|$ è espressa da

$$r = n - p + i .$$

XXVIII.

SU ALCUNE PROPRIETÀ DEI MODULI DI FORME ALGEBRICHE (*)

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *41* (1906), pp. 205–223 (**).

Premessa l'estensione del teorema di Bertini alle ipersuperficie di un sistema lineare tracciato sopra una varietà algebrica irriducibile V, provando cioè l'impossibilità dell'esistenza – sull'ipersuperficie generica del sistema – di punti multipli diversi dai punti base e dai punti multipli di V (teorema che già Enriques aveva altrimenti dato per le curve di una superficie), se ne traggono nuove dimostrazioni (geometriche) di due teoremi contenuti in una classica Memoria di Lasker (1); ossia (nel linguaggio moderno degl'ideali):

1) Ogni forma in $r+1$ variabili appartiene all'H–ideale determinato da $r+1$ forme nelle stesse variabili prive di zeri comuni.

2) Se $h+1$ forme $\varphi, f_1, \cdots, f_h$ in $r+1$ variabili ($h \leq r$) hanno soltanto ∞^{r-h-1} zeri comuni e il prodotto φf, dove f sia una forma nelle stesse variabili, appartiene all'H–ideale $(f_1, \cdots, f_h)$, anche f appartiene a questo ideale (2).

Come applicazione della prima parte della Nota si estende poi alle ipersuperficie di S_r il teorema $Af + B\varphi$ di Noether, estensione che era già stata ottenuta da Koenig (1903) coll'uso delle serie di potenze di più variabili. Il teorema cui alludiamo è il seguente:

3) Se nello S_r si hanno r ipersuperficie $f_1 = 0, \cdots, f_r = 0$, che si seghino in un numero finito di punti P, presentando in ognuno di essi il caso semplice (3), ed $s_1, s_2, \cdots, s_r$ son le molteplicità rispettive in P, un'ipersuperficie $f = 0$ che passi per ogni P con molteplicità $s_1 + s_2 + \cdots + s_r - r + 1$ (almeno), ha il primo membro della sua equazione (in coordinate non omogenee) appartenente all'ideale $(f_1, f_2, \cdots, f_r)$.

(*) In luogo della Nota originale viene qui riprodotto il testo redatto dall'Autore, a commento della Nota stessa, apparso nel volume: F. SEVERI, *Memorie Scelte*, vol. I, Ediz.Cremonese, Roma 1950, pp. 455–456 (N.d.R.).

(**) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 31 dicembre 1905.

(1) *Zur Theorie der Moduln und Ideale*, Mathematische Annalen, *60* (1905), pp. 20–116.

(2) Un caso particolare della proposizione 2) (e cioè quello in cui φ è una forma lineare ed $h = r - 1$) era stato dimostrato in una lettera di Bertini a Severi, sul fondamento del teorema di Bertini inerente alle superficie. Lo scrivente ricorda volentieri questa circostanza, anche per rendere omaggio alla memoria di Eugenio Bertini, che egli considera un altro de' suoi grandi Maestri.

(3) Locuzione di Bertini, per esprimere che i conti tangenti alle r ipersuperficie non hanno generatrici comuni.

XXIX.

SULLA TOTALITÀ DELLE CURVE ALGEBRICHE TRACCIATE SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA (*).

Mathematische Annalen, *62* (1906), pp. 194–225.

Nelle ricerche sia di Geometria che d'Analisi, s'incontra oggi molto spesso, per categorie svariatissime di enti, la questione della *base*, che può formularsi in generale così:

Dato un insieme di elementi qualunque, fissare, se è possibile, alcuni tra essi, in guisa che ogni altro elemento dell'insieme risulti legato agli elementi fissati, mediante operazioni ben definite.

La questione della base è fondamentale nella teoria dei campi di razionalità, e si presenta inoltre nelle ricerche di Dedekind e Weber sulle funzioni razionali appartenenti ad una data curva algebrica; nelle ricerche di Hilbert sui moduli di forme algebriche; nelle ricerche di Hurwitz sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica; nello studio degli integrali abeliani e degli integrali di Picard; ecc. ecc.

In questo lavoro io stabilisco l'esistenza della base per l'insieme delle curve (algebriche) tracciate sopra una superficie algebrica F, provando che, se più curve della superficie diconsi *algebricamente legate* quando una combinazione lineare (a coefficienti interi e positivi) di alcune di esse, sta in un medesimo sistema algebrico irriducibile, con una combinazione analoga delle rimanenti, *si può determinare un intero positivo* ϱ, *tale che, fissate comunque sulla superficie* F ϱ *curve algebricamente distinte, ogni altra curva della* F *risulti algebricamente legata ad esse* (Teor. VI).

Il numero ϱ dicesi il *numero–base* della superficie; e l'insieme delle ϱ curve algebricamente distinte si dice una *base* per la totalità delle curve algebriche tracciate su F.

Darò un cenno della via seguita per giungere a questo risultato.

Fissato sopra F un gruppo di curve algebriche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, di ordini $m_1, \cdots, m_l$, definisco come *matrice discriminante* del gruppo la tabella:

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{vmatrix},$$

(*) Un riassunto dei principali risultati di questa Memoria trovasi nei « Comptes rendus » del 6 febbraio 1905 [Nota XXII, p. 288; N.d.R.].

ove n_{ii} è il grado virtuale della curva C_i, ed n_{ik} è il numero dei punti comuni alle curve C_i, C_k.

Dimostro poi, in modo puramente geometrico, che l'annullarsi della suddetta matrice (cioè l'annullarsi di tutti i suoi determinanti d'ordine l), dà la condizione necessaria e sufficiente affinché le l curve siano algebricamente legate (Teoremi I e II); e ne deduco che le curve logaritmiche di un integrale semplice di 3ª specie, appartenente ad F, son sempre algebricamente legate.

Di quest'ultima proposizione è vera anche la reciproca; sicché la condizione necessaria e sufficiente affinché più curve siano legate algebricamente, si può esprimere sotto forma trascendente mediante l'esistenza di un integrale semplice di 3ª specie, che possegga singolarità logaritmiche soltanto lungo quelle curve (Teor. III).

Profittando allora di un teorema fondamentale del sig. Picard, sugli integrali di 3ª specie appartenenti ad una superficie algebrica (1), mediante il criterio trascendente sopra riferito, giungo a risolvere la questione della base.

Accanto a questi risultati se ne presentano altri; ma per non dilungarmi di soverchio, riferirò soltanto i più notevoli.

Nel § 5, tenendo conto del fatto che una superficie regolare è caratterizzata dalla mancanza di sistemi algebrici completi, non lineari; nonché dalla mancanza d'integrali di Picard della 2ª specie (2), deduco dal teor. III, che *la condizione necessaria e sufficiente affinché gl'integrali di Picard appartenenti ad una superficie algebrica, riducansi a combinazioni algebrico-logaritmiche, è che la superficie sia regolare, cioè che il suo ordine di connessione lineare* p_1 *sia uguale ad* 1 (Teor. V).

Resta così risoluta negativamente l'importante questione, più volte posta dal sig. Picard (3), di sapere cioè se esistano superficie col $p_1 = 1$ i cui integrali semplici non si riducano tutti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Il teor. V rende inoltre più stretta l'analogia che, da vari punti di vista, sussiste tra le curve razionali e le superficie regolari.

Infatti anche gl'integrali abeliani appartenenti ad una curva razionale, riduconsi tutti quanti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Nel § 7 studio l'effetto di una trasformazione birazionale sulla base e sul numero-base, e stabilisco, in particolare, che *il numero-base è un invariante relativo*, cioè che rimane immutato per quelle trasformazioni birazionali della superficie, che non introducono curve eccezionali di 1ª specie (4).

(1) Cfr. ad esempio PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1904); t. II, fascicolo 2°, p. 241.

(2) Per le citazioni relative a questi teoremi, rimando al § 5.

(3) Ved. ad esempio il rapporto dal titolo, *Sur la théorie des surfaces algébriques*, riprodotto nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » (9 (1895), p. 164); nonchè il Cap. IX (n° 10, p. 244) della *Théorie des fonctions algébriques*, t. II.

(4) A proposito della distinzione delle curve eccezionali in due specie, ved. il § 3 della Memoria di CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) 6 (1901).

Per una trasformazione birazionale qualunque, il numero–base varia come il numero dalle curve eccezionali di 1ª specie.

Nello stesso paragrafo si vedrà inoltre come la considerazione della base dia luogo ad un altro invariante (assoluto).

Alla fine della Memoria (§ 8) deduco dall'esistenza della base *il teorema di Bézout sopra una superficie algebrica qualunque*, calcolando il numero dei punti comuni a due curve qualsiansi C, D della superficie, in funzione dei numeri delle intersezioni di C, D colle curve della base.

In particolare, nel caso del piano, prendendo come base una retta, si ha l'ordinario teorema di Bézout.

Quando le due curve C, D coincidono, la formola che esprime il teorema di Bézout sopra una superficie qualunque, dà il grado virtuale di C; e dalla conoscenza del grado si deduce poi anche l'espressione del genere virtuale, in funzione dei numeri delle intersezioni di C colle curve della base.

L'esistenza della base si conosceva, oltreché sul piano (e in conseguenza sulle superficie razionali), sulle superficie generali nel loro ordine, ove come base si può assumere una sezione piana [5]; sulla superficie di Kummer, ove si può pure assumere come base una sezione piana [6]; sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o di due curve algebriche [7] (ed in particolare sulle rigate e sulle superficie iperellittiche); e sulle superficie i cui integrali semplici riduconsi a combinazioni algebrico–logaritmiche [8].

Il campo delle questioni che si connettono all'esistenza della base, è ben lungi dall'essere esaurito dal presente lavoro! Accennerò per esempio alla questione della *base minima*, che si affaccia in primo posto, quando si vogliano proseguire le indagini in questo campo. Intendo che sopra una superficie F, il cui numero–base sia ϱ, un gruppo di $\varrho_1 \geq \varrho$ curve, costituisca una base minima, quando nel legame algebrico che passa tra le ϱ_1 curve ed una curva qualunque C di F, sia uguale all'unità il coefficiente della C; senza peraltro che si verifichi la stessa proprietà per meno di ϱ_1 curve.

Sul piano e sopra una superficie generale del proprio ordine, una base minima è costituita da una sezione piana; mentre sopra la superficie di Kummer K una sezione piana non costituisce una base minima, perché è soltanto il doppio di una curva di K, che *equivale* ad un multiplo di una sezione piana. Però unendo ad una sezione piana le coniche di K, si ottiene ivi una base minima [9].

(5) NÖTHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*, Abhandlungen der Berliner Akad., (1882); §§ 11, 12.

(6) HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, Journal de Math., (1893), p. 72.

(7) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Acc. di Torino, *64* (1903), nn. 16, 21 [Nota XV, p. 173; N.d.R.].

(8) PICARD et SIMART, *loc. cit.*, Cap. IX, n° 12.

(9) HUMBERT, *loc. cit.*

La base minima si conosce pure sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o di due curve [10].

Alcuni esempi (come quello sopra addotto della superficie di Kummer) mostrano come per ottenere una base minima, occorre talora aumentare il numero delle curve che costituiscono la base.

§ 1. – Definizioni e notazioni.

1. Siano C_1, C_2 due curve algebriche, tracciate sopra una superficie algebrica (irriducibile) F. Diremo che le due curve sono *algebricamente equivalenti*, quando esiste su F un sistema algebrico di curve, che le contiene entrambe totalmente. Parlando di un sistema algebrico, sottintendiamo sempre, salvo avviso contrario, ch'esso sia « irriducibile », cioè che riguardando le sue curve come elementi, si abbia come immagine una varietà algebrica irriducibile.

Per denotare l'equivalenza algebrica tra le curve C_1, C_2, scriveremo $C_1 \equiv C_2$.

Se il sistema algebrico che contiene C_1, C_2 è *lineare*, cioè se esso è costituito dalle curve di livello costante di una funzione razionale dell'ente F, le curve C_1, C_2 si diranno *linearmente equivalenti*, e si scriverà $C_1 \equiv C_2$. Riserveremo il segno $=$ per esprimere la coincidenza di due curve.

Un sistema algebrico contenente una data curva C, s'indicherà con $\{C\}$; mentre s'indicherà con $|C|$ il sistema lineare individuato dalla curva C.

Siano $C_1, C_2, \cdots, C_l$ più curve tracciate sulla superficie F, e supponiamo che sussista tra esse una relazione del tipo:

$$(1) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l ,$$

ove le λ, μ son numeri interi positivi, non tutti nulli. Si dirà allora che le l curve date son *legate algebricamente*.

Spesso il legame algebrico (1) verrà sotto la forma simbolica:

$$(2) \qquad \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t + \lambda_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0 ,$$

ove:

$$\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1} , \cdots , \lambda_l = -\mu_l .$$

I numeri interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ si chiameranno *coefficienti del legame*, e quando occorrerà tenerne presenti i valori, si dirà che *le* $C_1, \cdots, C_l$ *son legate secondo i numeri* $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$.

Se poi tra le $C_1, \cdots, C_l$ non sussiste alcuna relazione del tipo (2), per valori non tutti nulli delle λ, si dirà che le l curve sono *algebricamente distinte*.

(10) F. Severi, *loc. cit.*, nn. 17, 22.

In particolare parleremo di curve *linearmente legate*, quando sia possibile una relazione del tipo:

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0 , \tag{3}$$

per valori non tutti nulli dei numeri interi, positivi o negativi, λ. E nel caso contrario parleremo di curve *linearmente distinte* (11).

Indicheremo col simbolo $(C_1\, C_2)$ il *gruppo* dei punti comuni alle curve C_1, C_2, e con $[C_1\, C_2]$ il *numero* dei punti di questo gruppo.

Se sopra la curva C_1 esiste la *serie caratteristica*, il che, com'è noto, avviene allora e soltanto allora che la C_1 appartiene ad un sistema continuo almeno ∞^1 (12), con $(C_1\, C_1)$ si denoterà un gruppo caratteristico, e con $[C_1\, C_1]$ il numero dei punti di tale gruppo, cioè il *grado* di C_1. Ma lo stesso simbolo $[C_1\, C_1]$ verrà usato in ogni caso per indicare il *grado virtuale* della curva C_1, anche quando su questa non esista la serie caratteristica.

Consideriamo ancora sulla F le curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$, di ordini $m_1, m_2, \cdots, m_l$, e poniamo per brevità:

$$n_{ik} = n_{ki} = [C_i\, C_k] \qquad (i, k = 1, \cdots, l) .$$

Per *matrice discriminante* dell'insieme delle l curve date, s'intenderà la matrice:

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{vmatrix} , \tag{4}$$

costituita da l verticale e da $l+1$ orizzontali (13).

Il determinante $|n_{ik}|$ formato dalle prime l orizzontali, si chiamerà semplicemente *determinante dell'insieme delle curve date.*

(11) Ho qui adottato le locuzioni « legate linearmente » o « linearmente distinte », perché le locuzioni « linearmente dipendenti o indipendenti » (che ho usate nella mia Nota dei Comptes rendus), si sogliono riferire, in un senso diverso da quello del testo, a curve di uno stesso sistema lineare.

(12) Ved. le mie Note, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, 39 (1904); *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, (1905) [Note XVIII e XXIII, pp. 234 e 291; N.d.R.].

(13) La matrice discriminante definita nella mia Nota citata dei Comptes rendus, contiene una orizzontale di più, formata coi numeri virtuali delle intersezioni delle date curve, con una curva canonica della superficie. – Si vedrà dal seguito come la considerazione di quest'orizzontale sia superflua.

§ 2. – CRITERIO ARITMETICO PER RICONOSCERE QUAND'È CHE DUE CURVE DELLO STESSO ORDINE, TRACCIATE SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA, SON LEGATE ALGEBRICAMENTE.

2. Se tra due curve algebriche A , B, dello stesso ordine m, tracciate, sulla superficie F, sussiste il legame algebrico:

$$\lambda A + \mu B \equiv 0 ,$$

sarà:

$$\lambda m + \mu m = 0 ,$$

e quindi risulterà:

$$\mu = -\lambda ,$$

cioè il legame algebrico si ridurrà alla forma:

$$\lambda A \equiv \lambda B ,$$

ove λ è un intero positivo.

Da ciò segue che le A , B hanno lo stesso grado virtuale n, lo stesso genere virtuale π, e che segano nello stesso numero di punti una medesima curva della superficie. In particolare si deduce che il loro grado n è uguale al numero $[AB]$ delle loro intersezioni.

Dimostriamo ora, viceversa, il

TEOREMA I. *Avendosi sulla superficie F due curve algebriche dello stesso ordine A , B soddisfacenti alle condizioni aritmetiche*:

$$[AA] = [BB] = [AB] = n > 0 ,$$

esse hanno lo stesso genere virtuale, e inoltre esiste un numero intero positivo λ, tale che:

$$\lambda A \equiv \lambda B .$$

Indicheremo con:

α , β i generi virtuali delle A , B, e supporremo ad esempio $\beta \geqq \alpha$; $|C|$ il sistema delle sezioni piane o iperpiane di F; $|L|$ il sistema canonico di F, non spogliato dalle eventuali componenti fisse eccezionali.

Si può sempre scegliere un multiplo $|E|$ così elevato del sistema $|C|$, che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

a) Le curve E abbiano l'ordine maggiore delle L, sicché ogni sistema avente lo stesso ordine di $|E|$ sia non speciale.

b) La dimensione virtuale:

$$v - \varrho + p_a + 1 ,$$

del sistema $|E|$, di grado v e genere ϱ, tracciato sulla superficie F di genere aritmetico p_a, sia maggiore di zero.

Il grado e il genere della *curva virtuale* $E + A - B$ (14), saranno rispettivamente uguali a:

$$\nu\,,\ \varrho + \alpha - \beta\,;$$

sicché la dimensione virtuale di $|E + A - B|$ sarà espressa da:

$$\nu - \varrho + p_a + 1 + \beta - \alpha\,.$$

Poiché la curva $E + A - B$, in forza dell'ipotesi a) è non speciale, e d'altronde la dimensione virtuale di $|E + A - B|$, in forza dell'ipotesi *b*), è maggiore di zero, esisteranno certamente curve effettive

$$E + A - B \quad (15)$$

ed avranno lo stesso ordine delle E. Posto:

$$|E_1| = |E + A - B|,$$

si vede similmente che la dimensione virtuale di $|E_1 + A - B|$ è espressa da:

$$\nu - \varrho + p_a + 1 + 2(\beta - \alpha);$$

e siccome la curva $E_1 + A - B$ è non speciale, esisterà anche il sistema:

$$|E_2| = |E_1 + A - B| = |E + 2(A - B)|\,.$$

Così proseguendo si vede che esisterà pure il sistema:

$$|E_t| = |E + t(A - B)|\,,$$

ove t è un intero positivo, comunque grande.

Anzi le E_t avranno lo stesso ordine delle E, e inoltre la dimensione virtuale di $|E_t|$ sarà espressa da:

$$\nu - \varrho + p_a + 1 + t(\beta - \alpha);$$

dal che segue che, se fosse $\beta > \alpha$, col crescere di t la dimensione virtuale di $|E_t|$, e quindi la sua dimensione effettiva, si potrebbero render maggiori di un numero prefissato, comunque grande.

Ma ciò è assurdo, perché sulla F le curve dello stesso ordine delle E, si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici, e quindi, qualunque sia t, la dimensione di $|E_t|$ non può superare la dimensione del più ampio dei sistemi suddetti.

Si conclude che $\beta = \alpha$.

(14) Ved. la mia Nota, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rend. del R. Istituto lombardo, (2) *38* (1905) [Nota XXVII, p. 325; N.d.R.].

(15) Cfr. F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *40* (1905) [Nota XXVI, p. 317; N.d.R.]; e *Sulle curve algebriche virtuali...*

Riprendiamo adesso in esame la successione indefinita di sistemi lineari

$$|E|, |E_1|, |E_2|, \cdots, |E_t|, \cdots . \tag{5}$$

Poiché tutti questi sistemi lineari debbono esser contenuti totalmente in un numero finito di sistemi algebrici, due casi posson presentarsi:

1) Nella successione (5) si trova soltanto un numero finito di sistemi lineari tra loro *distinti*.

2) Esiste qualche sistema algebrico completo, non lineare, contenente totalmente infiniti sistemi lineari distinti della (5).

Nel 1° caso *l'operazione* $+A-B$ *è periodica*, a partire da un certo termine della (5) (che potrebbe essere anche il primo); e quindi risulta:

$$\lambda A \equiv \lambda B ,$$

ove λ è il periodo dell'operazione $+A-B$.

Nel 2° caso, indichiamo con Σ un sistema algebrico contenente gl'infiniti sistemi lineari distinti:

$$|E_{r_1}|, |E_{r_2}|, |E_{r_3}|, \cdots \qquad (r_1 < r_2 < r_3 < \cdots) .$$

Il grado ed il genere della curva virtuale:

$$E_{r_1} + \lambda A - D ,$$

ove λ è la differenza $r_s - r_1$ tra i termini r_1, r_s della successione:

$$r_1, r_2, r_3, \cdots \tag{6}$$

e D una generica curva di Σ, sono rispettivamente uguali a:

$$\lambda^2 n , \qquad n\binom{\lambda}{2} + \lambda(\alpha - 1) + 1 ;$$

e quindi la dimensione virtuale di

$$|E_{r_1} + \lambda A - D| , \tag{7}$$

è espressa da:

$$n\binom{\lambda+1}{2} - \lambda(\alpha - 1) + p_a . \tag{8}$$

Ora, poiché $n > 0$, scegliendo r_s abbastanza innanzi nella successione (6), la dimensione virtuale (8) risulterà maggior di zero, e inoltre la curva virtuale, $E_{r_1} + \lambda A - D$ sarà non speciale. Per quel valore di r_s (e pei successivi) esisterà dunque il sistema (7), *qualunque sia la curva* D di Σ.

Al variare continuo della D entro Σ, il sistema (7) varia con continuità descrivendo un sistema algebrico Σ'.

Riguardando come *elementi* di Σ' i sistemi (7), e come elementi di Σ i sistemi lineari $|D|$, dalla costruzione di Σ' si rileva che le due varietà alge-

briche Σ, Σ' son riferite *birazionalmente*; e poiché la Σ è irriducibile, si conclude che Σ' è irriducibile come varietà degli elementi (7), e, per conseguenza, anche come varietà delle curve $E_{r_1} + \lambda A - D$.

Quando D viene a coincidere con una E_{r_1} o con una E_{r_s}, il sistema (7) vien rispettivamente a coincidere con:

$$|E_{r_1} + \lambda A - E_{r_1}| = |\lambda A|, \qquad |(E + r_1 A - r_1 B) + \lambda A - (E + r_s A - r_s B)| = |\lambda B|;$$

dunque le curve λA, λB appartengono al medesimo sistema Σ'; cioè:

$$\lambda A \equiv \lambda B, \qquad \text{c.d.d.}$$

Osservazione 1ª. – L'ipotesi che le due curve A, B abbiano lo stesso ordine, si può anche abbandonare, senza che il teor. I cessi di valere.

Basterà ripetere la dimostrazione sostituendo al sistema $|E|$, di cui sopra, il sistema:

$$|k(A + B)|,$$

ove k è un intero positivo, abbastanza grande.

Osservazione 2ª. – Nel caso in cui le due curve A, B *dello stesso ordine*, soddisfino alle condizioni aritmetiche:

$$[AA] = [BB] = [AB] = 0,$$

aggiungendo alle A, B una sezione piana C, e ponendo $A_1 = C + A$, $B_1 = C + B$, avremo:

$$[A_1 A_1] = [B_1 B_1] = [A_1 B_1] > 0;$$

onde risulterà:

$$\lambda A_1 \equiv \lambda B_1,$$

cioè:

$$\lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B. \tag{9}$$

Ma da ciò non si può in ogni caso dedurre:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

perché non sempre togliendo una curva da un sistema algebrico irriducibile, si ottiene come resto un sistema algebrico irriducibile.

È anzi facile costruire esempi di curve A, B, per le quali non è soddisfatta nessuna relazione $\lambda A \equiv \lambda B$, per quanto lo siano le condizioni $[AA] = [BB] = [AB] = 0$ (16).

(16) Si consideri ad esempio la superficie F che rappresenta le coppie (non ordinate) dei punti di una curva irrazionale Γ; e s'indichi con Σ il sistema algebrico, d'indice 2 e grado 1, immagine dei punti di Γ. Si trasformi quindi birazionalmente la F, in modo da mutare il punto E di F in una curva eccezionale E', e si assumano come curve A, B le trasformate (astrazion fatta da E') delle curve di Σ che escono da E.

Però quel che si può senz'alcun dubbio rilevare dalla relazione (9), è che *le* A , B *segano nello stesso numero di punti non soltanto una sezione piana della superficie* F, *ma anche un'altra curva qualunque di* F.

Invero, se D è un'altra curva di F, si ha:

$$\lambda[CD] + \lambda[AD] = \lambda[CD] + \lambda[BD] ,$$

donde, essendo $\lambda > 0$, si trae:

$$[AD] = [BD] .$$

Se dunque D è una curva di grado virtuale > 0, oppure una curva di grado 0, che incontri ciascuna delle A , B almeno in un punto, ponendo:

$$A_2 = D + A , \qquad B_2 = D + B ,$$

avremo:

$$[A_2A_2] = [B_2B_2] = [A_2B_2] > 0 ,$$

e quindi risulterà pure:

$$\mu D + \mu A \equiv \mu D + \mu B ,$$

ove μ è un intero positivo conveniente.

§ 3. – Criterio aritmetico per riconoscere quand'è che più curve d'una superficie son legate algebricamente.

3. Dal teorema dimostrato nel § precedente, si deduce il seguente:

Teorema II. *La condizione necessaria e sufficiente affinché* l *curve algebriche* $C_1 , C_2 , \cdots , C_l$ *tracciate sopra una superficie* F, *siano legate algebricamente, è che sia nulla la matrice discriminante dell'aggruppamento* $(C_1 C_2 \cdots C_l)$.

Detti $m_1 , m_2 , \cdots , m_l$ gli ordini delle $C_1 , C_2 , \cdots , C_l$, e posto:

$$n_{ik} = [C_i C_k] \qquad (i , k = 1 , \cdots , l) ,$$

dimostriamo anzitutto che la condizione enunciata è necessaria; cioè che se si ha tra le C un legame algebrico:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0 , \tag{10}$$

ove le λ sono interi, positivi o negativi, non tutti nulli, si annullano in conseguenza tutti i determinanti d'ordine l, estratti dalla matrice:

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{vmatrix} . \tag{11}$$

Invero, indicando con D una curva algebrica della F, dalla (10) si trae:

$$\lambda_1 [C_1 D] + \lambda_2 [C_2 D] + \cdots + \lambda_l [C_l D] = 0 .$$

Facendo coincidere successivamente la D con una curva dei sistemi lineari $|C_1|, |C_2|, \cdots, |C_l|$, e con una sezione piana o iperpiana di F, avremo quindi le relazioni:

$$(12) \qquad \begin{cases} \lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_l n_{1l} = 0 , \\ \lambda_1 n_{21} + \lambda_2 n_{22} + \cdots + \lambda_l n_{2l} = 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 n_{l1} + \lambda_2 n_{l2} + \cdots + \lambda_l n_{ll} = 0 , \\ \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_l m_l = 0 . \end{cases}$$

Poiché queste son soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, dovranno esser nulli tutti i determinanti d'ordine l estratti dalla (11); come volevasi provare.

Osservazione. – Se la curva C_1, ad esempio, non appartiene ad un sistema lineare (né ad un sistema algebrico) infinito, si perviene lo stesso alla relazione:

$$(13) \qquad \lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_l n_{1l} = 0 ,$$

aggiungendo alla C_1 una curva E, non coincidente con alcuna delle C, e tale che il sistema $|C_1 + E|$ risulti infinito e irriducibile. Si ottengono allora le relazioni:

$$\lambda_1 [C_1 + E , C_1] + \lambda_2 [C_1 + E , C_2] + \cdots + \lambda_l [C_1 + E , C_l] = 0 ,$$
$$\lambda_1 [E C_1] \qquad + \lambda_2 [E C_2] \qquad + \cdots + \lambda_l [E C_l] \qquad = 0 ,$$

le quali, sottratte membro a membro, dànno la (13).

Dimostriamo ora che la condizione enunciata è sufficiente.

Supponiamo pertanto che la matrice (11) sia nulla. Poiché gli elementi della matrice son numeri interi, si potranno determinare gl'*interi*, non tutti nulli, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$, tali che risultino soddisfatte le relazioni (12). Queste λ *non potranno esser tutte dello stesso segno*, perché gli ordini $m_1, m_2, \cdots, m_l$, che entrano come coefficienti delle λ nell'ultima relazione (12), son tutti maggiori di zero.

Ammettiamo, ad esempio, che siano positive le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ e negative le altre. Posto allora:

$$\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \cdots, \mu_l = -\lambda_l ,$$

consideriamo le due curve:

$$A = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t , \qquad B = \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l .$$

Il grado della prima è espresso da:

$$[AA] = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k n_{ik} \qquad (i , k = 1, \cdots, t);$$

e il grado della seconda da:

$$[BB] = \sum_{i,k} \mu_i \mu_k n_{ik} \qquad (i, k = t+1, \cdots, l);$$

ed il numero dei punti comuni alle A, B da:

$$[AB] = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k n_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, t \\ k = t+1, \cdots, l \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando le prime t relazioni (12) ordinatamente per $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$, e sommandole quindi membro a membro, avremo:

$$\sum_{i=1}^{t} (\lambda_1 n_{1i} + \lambda_2 n_{2i} + \cdots + \lambda_t n_{ti}) \lambda_i - \sum_{i=1}^{t} (\mu_{t+1} n_{t+1,i} + \cdots + \mu_l n_{li}) \lambda_i = 0;$$

cioè:

$$[AA] - [AB] = 0.$$

Similmente, moltiplicando le $l-t$ relazioni successive ordinatamente per $\mu_{t+1}, \cdots, \mu_l$, e sommandole membro a membro, si ha:

$$\sum_{i=t+1}^{l} (\lambda_1 n_{1i} + \lambda_2 n_{2i} + \cdots + \lambda_t n_{ti}) \mu_i - \sum_{i=t+1}^{l} (\mu_{t+1} n_{t+1,i} + \cdots + \mu_l n_{li}) \mu_i = 0,$$

ossia:

$$[AB] - [BB] = 0.$$

Si conclude che:

$$[AA] = [BB] = [AB].$$

E siccome inoltre le A, B, in forza dell'ultima relazione (12), hanno lo stesso ordine, applicando il teor. I, si deduce, se $[AB] > 0$:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

ove λ è un conveniente intero positivo.

Quest'ultima relazione si può pure scrivere sotto la forma:

$$\lambda\lambda_1 C_1 + \lambda\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda\lambda_l C_l \equiv 0, \tag{14}$$

ed esprime appunto che le $C_1, C_2, \cdots, C_l$ sono algebricamente legate.

Se poi $[AB] = 0$, si potrà soltanto scrivere la relazione:

$$\lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B,$$

ove C è una curva qualunque di grado ≥ 0, che seghi ciascuna delle A, B (n° 2, Oss. 2ª).

Tuttavia continueremo a dire che le $C_1, C_2, \cdots, C_l$ sono *algebricamente legate*, allargando leggermente il significato di questa locuzione; e scriveremo ancora la relazione simbolica (14).

Osservazione 1ª. – Se però qualcuna delle $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e sia per esempio la C_1, ha il grado virtuale positivo, le curve $C_1 + A$, $C_1 + B$ hanno lo stesso grado virtuale maggior di zero, e di più il numero delle loro intersezioni è uguale al loro grado virtuale; onde risulta:

$$\lambda C_1 + \lambda A \equiv \lambda C_1 + \lambda B ,$$

con λ intero positivo conveniente; cioè si ha la relazione:

$$\lambda (1 + \lambda_1) C_1 + \lambda\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda\lambda_t C_t \equiv \lambda C_1 + \lambda\mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \lambda\mu_l C_l ;$$

e le $C_1 \cdots C_l$ risultano « algebricamente legate » nel senso più ristretto del § 1.

Osservazione 2ª. – Se le $C_1, C_2, \cdots, C_{l-1}$ sono algebricamente distinte, in virtù del teorema dimostrato, non dovranno essere nulli tutti i determinanti d'ordine $l - 1$, che si possono estrarre dalla matrice discriminante dell'aggruppamento $(C_1 C_2 \cdots C_{l-1})$; cioè dalla matrice che si ottiene dalla (11) sopprimendo l'ultima verticale e la penultima orizzontale. E similmente dicasi per $l - 2, l - 3, \cdots$ curve scelte entro al gruppo $C_1, C_2, \cdots, C_l$.

§ 4. – Criterio trascendente per riconoscere l'esistenza di un legame algebrico tra due o più curve algebriche d'una superficie.

4. Siano $C_1, C_2, \cdots, C_l$ l curve algebriche della superficie F, tra le quali passi il legame:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0 ,$$

ove le λ sono interi non tutti nulli (e, necessariamente, non tutti dello stesso segno).

Supposto ad esempio che siano positive le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ e negative le altre λ, poniamo:

$$\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \cdots, \mu_l = -\lambda_l ,$$

e fissiamo l'attenzione sulle curve algebricamente equivalenti:

$$A = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t , \qquad B = \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l .$$

Dicasi Σ un sistema algebrico ∞^1, contenente totalmente le A, B;

$$\varphi (\xi\eta) = 0$$

la curva algebrica piana (irriducibile) i cui punti rappresentano le curve di Σ; e $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ i punti di φ corrispondenti alle ν curve di Σ, che escono dal punto generico x di F.

Siano a, b i punti di φ che rappresentano le curve A, B, ed $\tilde{\omega}$ un integrale abeliano di 3ª specie, che si conservi ovunque finito sulla φ, tranne nei

punti a, b, ove presenti due singolarità logaritmiche coi periodi polari relativi $+1$ e -1 (17).

Poiché il gruppo $(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu)$ dipende *razionalmente* dal punto x variabile su F, la somma:

$$\tilde{\omega}(\xi_1) + \tilde{\omega}(\xi_2) + \cdots + \tilde{\omega}(\xi_\nu), \tag{15}$$

si trasformerà in un integrale di Picard:

$$J(x) = \int P\,dx + Q\,dy,$$

appartenente alla superficie F di equazione:

$$F(xyz) = 0,$$

(con P, Q funzioni razionali di x, y, z).

Sino a che x non appartiene a nessuna delle due curve A, B, ciascun termine della somma (15) si conserva finito, perché i punti $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ risultano tutti diversi dai punti singolari a, b; ma quando x cade in A (o in B) uno dei punti $\xi_1, \cdots, \xi_\nu$ cade in a (o in b), sicché la somma (15) diviene infinita.

Ne deriva che l'integrale J conservasi finito in ogni punto di F, non appartenente alle A, B; mentre diviene infinito nei punti di queste curve. Ed è facile vedere che in ciascuno di questi ultimi punti si ha una singolarità logaritmica; sicchè l'integrale J risulta di 3ª specie, colle sole curve logaritmiche A, B (ossia $C_1, C_2, \cdots, C_l$).

Se, invero, il punto x di F si muove sopra una sezione piana *generica* descrivendo un ciclo lineare infinitamente piccolo, che circondi un punto x_1 di C_1, passando pei λ_1 punti infinitamente prossimi ad x_1, segnati sul piano considerato, dalla curva di Σ, infinitamente vicina ad A; dei ν punti di φ corrispondenti ad x, uno solo si muove nelle vicinanze di a, girando λ_1 volte attorno a questo punto, nel *medesimo verso*. Onde la somma (15), e quindi l'integrale J, aumentano di λ_1 unità; il che significa che x_1 è per J un punto singolare logaritmico, col periodo polare λ_1.

Analogamente si vede che le $C_2, \cdots, C_t$, $C_{t+1}, \cdots, C_l$ son curve logaritmiche coi relativi periodi

$$\lambda_2 \cdots \lambda_t, -\mu_{t+1}, \cdots, -\mu_l, \qquad \text{cioè} \qquad \lambda_2 \cdots \lambda_t, \lambda_{t+1}, \cdots, \lambda_l.$$

Osservazione. – Se il legame che passa tra le $C_1 \cdots C_l$ è del tipo:

$$C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv C + \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l,$$

ove le λ, μ son positive, si fisserà l'attenzione sopra le curve algebricamente

(17) Cfr. per esempio APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Paris, Gauthier-Villars, 1895); n° 148.

equivalenti:

$$A = C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t ,$$
$$B = C + \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l ,$$

e si ragionerà come nel caso precedente; osservando però che la curva C non risulta logaritmica per l'integrale J, costruito come sopra.

Si conclude pertanto che, quando su F si abbiano più curve algebricamente legate, esiste sempre un integrale di 3ª specie, che diviene infinito logaritmicamente nei punti di quelle curve, conservandosi finito in tutti gli altri punti della superficie.

Supponiamo ora, viceversa, che esista su F un integrale semplice J, di 3ª specie, colle sole curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e dimostriamo che queste curve risultano algebricamente legate.

Dei periodi polari $c_1, c_2, \cdots, c_l$ relativi alle curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, alcuni potranno esser nulli (ed allora le corrispondenti curve o non saranno singolari per J, o saranno curve polari); ma è certo che due almeno delle c son diverse da zero, perché se una sola c fosse diversa da zero, per $y = \text{cost.}$ non sarebbe nulla la somma dei residui della funzione razionale dJ/dx (18).

Se D è una curva arbitraria irriducibile della superficie, l'integrale J stacca su D un integrale abeliano di 3ª specie π, che diviene infinito logaritmicamente nei punti dei gruppi $(C_1 D), (C_2 D), \cdots, (C_l D)$, e che resta finito in tutti gli altri punti della D. Poiché la somma dei periodi polari di π deve esser nulla, avremo:

$$c_1 [C_1 D] + c_2 [C_2 D] + \cdots + c_l [C_l D] = 0 .$$

Supposto ora che la D sia una curva tale che il sistema lineare $|C_i + D|$ risulti infinito e irriducibile, segando con una curva generica E di questo sistema, avremo similmente:

$$c_1 [C_1 E] + c_2 [C_2 E] + \cdots + c_l [C_l E] = 0 ;$$

dalla quale, sottraendo membro a membro la precedente, si ricava:

$$c_1 n_{1i} + c_2 n_{2i} + \cdots + c_l n_{li} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, l) . \tag{16}$$

Segando infine con un piano generico, si ottiene la relazione:

$$c_1 m_1 + c_2 m_2 + \cdots + c_l m_l = 0 , \tag{17}$$

ove $m_1, m_2, \cdots, m_l$ son gli ordini delle curve logaritmiche.

Poiché le equazioni (16), (17) coesistono per valori non tutti nulli delle c, dovrà esser nulla la matrice dei loro coefficienti, che è precisamente la matrice discriminante dell'aggruppamento $(C_1, C_2, \cdots, C_l)$; e quindi, pel teor. II, le curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$ risulteranno algebricamente legate.

(18) Cfr. ad esempio APPELL et GOURSAT, *loc. cit.*, n° 96.

Riassumendo otteniamo il

TEOREMA III. *La condizione necessaria e sufficiente affinché più curve algebriche* $C_1, C_2, \cdots, C_l$ *tracciate sopra una superficie* F, *siano algebricamente legate, è che esista su* F *un integrale semplice di* 3^a *specie, il quale divenga infinito logaritmicamente soltanto nei punti di* $C_1, \cdots, C_l$.

5. Un'osservazione notevole s'impone a proposito del teorema precedente.

Siano I, J due integrali di 3^a specie possedenti le stesse curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$. Se in corrispondenza ad una medesima di queste curve, e sia per esempio la C_1, i due integrali hanno periodi polari non nulli, si potrà sempre determinare una costante non nulla k, in guisa che l'integrale:

$$I' = J - kI,$$

non possegga più la curva logaritmica C_1. Ma allora due casi possono presentarsi: o I' non è un integrale di 3^a specie, oppure possiede ancora delle singolarità logaritmiche (necessariamente lungo alcune delle curve $C_2, \cdots, C_l$).

Nel 1^o caso i periodi polari di J saranno proporzionali ai periodi polari di I, secondo il coefficiente k; nel 2^o caso le curve $C_2, C_3, \cdots, C_l$ risulteranno algebricamente legate.

Se dunque non è nulla la matrice discriminante dell'aggruppamento $(C_2, \cdots, C_l)$, cioè se le curve $C_2, \cdots, C_l$ sono algebricamente distinte, l'integrale di 3^a specie più generale avente le curve logaritmiche $C_1, \cdots, C_l$ (col periodo *necessariamente* non nullo lungo C_1), si otterrà da un particolare integrale, che possegga le stesse curve logaritmiche, moltiplicandolo per una costante arbitraria ed aggiungendo al prodotto un qualunque integrale di 2^a specie.

Tra gl'integrali che divengono infiniti logaritmicamente lungo $C_1, C_2, \cdots, C_l$, ce n'è uno (determinato a meno d'un integrale di 2^a specie additivo), il quale ha per periodi polari i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ del legame, che, in virtù del teor. III, intercede tra le l curve logaritmiche. Quest'integrale si costruisce nel modo indicato al principio del n° precedente.

Segue dalle osservazioni premesse, che ogni integrale di 3^a specie colle curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, ha i periodi polari proporzionali ai numeri interi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$.

Alla stessa conclusione si perviene direttamente, osservando che i periodi polari $c_1, c_2, \cdots, c_l$ ed i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$, essendo due sistemi di soluzioni delle equazioni lineari:

$$n_{i1}x_1 + n_{i2}x_2 + \cdots + n_{il}x_i = 0, \qquad (i = 1, \cdots, l)$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_l x_l = 0,$$

son proporzionali ai complementi algebrici (supposti non tutti nulli) degli elementi di una orizzontale, appartenente ad un determinante d'ordine l, estratto dalla matrice.

Si conclude col

TEOREMA IV. *Se la matrice discriminante delle l curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$, tracciate sulla superficie F, ha la caratteristica $l - 1$, ciascuno degl'infiniti integrali semplici di 3^a specie, che posseggono le sole curve logaritmiche $C_1, \cdots, C_l$, ha i periodi polari rispettivamente proporzionali ai coefficienti del legame algebrico che intercede tra le l curve date.*

§ 5. – CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DELLE SUPERFICIE I CUI INTEGRALI SEMPLICI DI 3^a SPECIE RIDUCONSI A COMBINAZIONI ALGEBRICO–LOGARITMICHE.

6. Confrontando le più importanti proprietà delle *curve razionali* e delle *superficie algebriche regolari*, un'analogia stretta si riscontra, da vari punti di vista, tra queste due classi di enti algebrici.

Infatti una curva razionale è *caratterizzata* dalle proprietà seguenti:

a) La superficie di Riemann, immagine della curva, è semplicemente connessa, cioè ogni cammino chiuso in essa tracciato, può ridursi ad un punto per deformazione continua.

b) Ogni sistema continuo di gruppi di n punti sopra una curva razionale, è contenuto nella serie *lineare* di tutti i gruppi di n punti della curva.

D'altra parte una superficie regolare è *caratterizzata* dalle seguenti proprietà, perfettamente analoghe alle precedenti:

a') La varietà riemanniana reale a 4 dimensioni, immagine della superficie complessa, è linearmente uniconnessa, cioè ogni cammino chiuso in essa tracciato, può ridursi ad un punto per deformazione continua [19].

b') Ogni sistema continuo di curve algebriche sopra una superficie regolare, è contenuto in un sistema *lineare* di curve dello stesso ordine [20].

Un'altra proprietà che pure caratterizza le curve razionali, è che gl'integrali abeliani di 3^a specie, appartenenti ad una tal curva, riduconsi tutti quanti a combinazioni algebrico–logaritmiche.

Orbene, anche di quest'ultima proprietà sussiste l'analoga per le superficie regolari, come si vedrà dimostrato in questo paragrafo.

(19) Che per ogni superficie regolare si verifichi questa proprietà, è enunciato nella mia Nota, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2^a specie*, Rendiconti dei Lincei, settembre 1904 e dimostrato nella mia Memoria dallo stesso titolo, inserita in questi «Annalen» (*61*, 1905) [Nota XIX e Memoria XX, pp. 247 e 252; N.d.R.]. Che, viceversa, una superficie dotata della proprietà *a'*) sia regolare, risulta, dopo le ricerche dei sigg. Humbert e Picard, dal teorema *b'*) di Enriques.

(20) F. ENRIQUES, *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie regolare*, Rendiconti di Palermo, (1899); e *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rendiconti della R. Acc. di Bologna, Dicembre 1904.

7. Sia F una superficie regolare, e sia J un qualunque integrale semplice di 3ª specie, ad essa appartenente.

Se $C_1, C_2, \cdots, C_l$ son le curve logaritmiche di J, poiché sulla F ogni sistema algebrico di curve algebriche è contenuto totalmente in un sistema lineare, pel teor. III, avremo tra le C il legame *lineare*:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0 ;$$

il che significa che, se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ sono interi positivi e

$$\lambda_{t+1} (= -\mu_{t+1}), \cdots, \lambda_l (= -\mu_l)$$

interi negativi, esisterà su F una funzione razionale $R(x, y, z)$, la quale si annullerà soltanto nei punti di $C_1, \cdots, C_t$ cogli ordini rispettivi $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$, e diverrà infinita soltanto nei punti di $C_{t+1}, \cdots, C_l$ cogli ordini rispettivi $\mu_{t+1}, \cdots, \mu_l$.

Onde l'integrale di 3ª specie:

$$I = \log R(x, y, z) = \int \frac{1}{R} \left(\frac{dR}{dx} dx + \frac{dR}{dy} dy \right),$$

possiederà le sole curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$.

Detti $i_1, i_2, \cdots, i_l$ i periodi polari di I lungo queste curve logaritmiche, ed $j_1, j_2, \cdots, j_l$ i periodi polari di J lungo le stesse curve, scegliamo una i diversa da zero (21), e sia per esempio i_1, e formiamo quindi l'integrale:

$$J_1 = J - \frac{j_1}{i_1} I .$$

Se con questa sottrazione spariscono da J tutte le curve logaritmiche, J_1 si ridurrà certo ad una funzione razionale $S(x, y, z)$, perché sulla F, a causa della regolarità, non esistono integrali trascendenti della 2ª specie. Avremo quindi:

$$J = \frac{j_1}{i_1} \log R(x, y, z) + S(x, y, z),$$

cioè J si ridurrà ad una combinazione algebrico–logaritmica.

Se, invece, l'integrale J_1 è ancora di 3ª specie, poiché per esso la C_1 non è più curva logaritmica, le curve $C_2, \cdots, C_l$ saranno linearmente legate (teor. III); e quindi si potrà costruire un'altra funzione razionale $R_1(x, y, z)$, i cui zeri ed i cui poli cadano soltanto nei punti delle $C_2, \cdots, C_l$. Detti $i''_2, \cdots, i'_l$ i periodi polari dell'integrale:

$$I_1 = \log R_1 (x, y, z)$$

lungo le $C_2, \cdots, C_l$, si sceglierà ancora una i' diversa da zero, e sia per

(21) Non si esclude che alcune delle λ, e quindi alcune delle i (ma non tutte) possano esser nulle.

esempio i_2', e si costruirà l'integrale:

$$J_2 = J_1 - \frac{j_2 i_1 - j_1 i_2}{i_1 i_2'} I_1 ,$$

dotato (al più) delle curve logaritmiche $C_3 , \cdots , C_l$.

Se J_2 è di 2^a specie, avremo:

$$J = \frac{j_1}{i_1} \log R(x , y , z) + \frac{j_2 i_1 - j_1 i_2}{i_1 i_2'} \log R_1(x , y , z) + S_1(x , y , z) ,$$

ove S_1 è una funzione razionale. Se J_2 è ancora di 3^a specie, le curve $C_3 , \cdots , C_l$ saranno linearmente legate; ecc.

Così proseguendo, per successive sottrazioni di logaritmi di funzioni razionali, si fanno sparire da J tutte le singolarità logaritmiche, e resta come differenza una funzione razionale.

Si conclude pertanto che « sulla superficie F ogni integrale semplice di 3^a specie, riducesi ad una combinazione algebrico–logaritmica ».

Se, viceversa, gl'integrali di 3^a specie appartenenti ad una superficie F, riduconsi a combinazioni algebrico–logaritmiche, alla F non potranno appartenere integrali trascendenti di 2^a specie, e quindi la superficie sarà regolare (22).

Riassumendo, abbiamo dunque il

TEOREMA V. *La condizione necessaria e sufficiente affinché gl'integrali di Picard della 3^a specie, appartenenti ad una superficie algebrica, riducansi a combinazioni algebrico–logaritmiche, è che la superficie sia regolare.*

Dal punto di vista dell'*Analysis situs* la condizione precedente si può esprimere dicendo che « *la superficie deve avere l'ordine di connessione lineare* $p_1 = 1$ ».

Nei casi particolari *il procedimento indicato nella dimostrazione servirà ad effettuare, mediante operazioni razionali e logaritmiche, l'integrazione di ogni differenziale esatto del tipo*:

$$A\,dx + B\,dy ,$$

ove A , B son funzioni razionali appartenenti ad una data superficie regolare.

Restano così estese quelle regole, che nel calcolo elementare conducono all'integrazione, mediante operazioni razionali e logaritmiche, di ogni funzione razionale di una variabile, o, più generalmente, di ogni funzione razionale appartenente ad una data curva razionale.

(22) F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie...*

§ 6. – Sull'esistenza di una base per la totalità delle curve algebriche appartenenti ad una superficie.

8. La proposizione fondamentale della teoria degl'integrali semplici di 3ª specie, è senza dobbio la seguente, dovuta al sig. Picard:

Per ogni superficie algebrica F esiste un numero intero positivo ϱ, tale che, prese comunque su F $\varrho + 1$ curve algebriche, si può costruire un integrale semplice di 3ª specie appartenente alla superficie e non avente singolarità logaritmiche fuori delle $\varrho + 1$ curve; mentre il fatto analogo non si verifica per tutti i gruppi di ϱ curve della superficie.

In virtù del teor. III ciò significa che sulla F $\varrho + 1$ curve son sempre algebricamente legate, mentre esistono su F gruppi di ϱ curve algebricamente distinte.

Dette $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ ϱ curve di F, la cui matrice discriminante sia diversa da zero, cioè che siano distinte algebricamente, se C è una curva arbitraria della superficie, avremo dunque:

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho \equiv 0 ,$$

con $\lambda \neq 0$. Perveniamo così al

Teorema VI. *Se F è una superficie algebrica qualunque, si possono fissare su F ϱ curve algebricamente distinte, tali che ogni altra curva della superficie sia algebricamente legata ad esse.*

L'insieme delle ϱ curve (algebriche) distinte, si dirà una *base* per la totalità delle curve algebriche della superficie F, ed il carattere ϱ si dirà il *numero-base* della superficie.

Osservazione. – Supponendo, com'è lecito, che qualcuna delle curve della base abbia il grado > 0, la frase « algebricamente legata », che appare nell'enunciato del teor. VI, ha senza dubbio il significato introdotto nel § 1, e non già quello più ampio introdotto verso la fine del § 3 (ved. l'Oss. 1ª del nº 3).

Se la superficie F è regolare, e quindi sopra essa ogni sistema continuo di curve appartiene totalmente ad un sistema lineare, il legame algebrico di cui parla il teor. VI, si ridurrà ad un legame lineare; sicché sotto forma algebrica potremo enunciare quanto segue:

Detto ϱ il numero-base di una superficie regolare F, si fissino sulla F ϱ curve tali che non esista nessuna funzione razionale, i cui poli e i cui zeri siano complessivamente distribuiti soltanto lungo le ϱ curve fissate: allora, scelta comunque un'altra curva della F, esiste sempre una funzione razionale che non si annulla né diviene infinita fuori delle $\varrho + 1$ curve considerate.

9. Si può riavvicinare il teor. VI ad un'ovvia proprietà delle serie di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.

Invero, fissato un punto di una data curva algebrica, ogni gruppo di n punti della curva è algebricamente legato al punto fissato, perché questo

punto, ripetuto n volte, sta in un medesimo sistema algebrico col dato gruppo di n punti.

Se la curva è razionale, il sistema algebrico di tutti i gruppi di n punti della curva, è lineare, e si ricade nella proprietà analoga a quella sopra rilevata per le superficie regolari.

Ma sulle curve non ha importanza la considerazione della base e del numero-base, che vale sempre 1.

10. Dimostriamo ora il

TEOREMA VII. *Se ϱ è il numero-base d'una superficie F, la condizione necessaria e sufficiente affinché ϱ curve della superficie formino una base (cioè siano algebricamente distinte), è che sia diverso da zero il determinante relativo alle ϱ curve.*

Siano $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ le curve di una base e $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho$ le curve di un'altra base.

Avremo allora le relazioni:

$$\lambda_i \Gamma_i + \lambda_{1i} C_1 + \lambda_{2i} C_2 + \cdots + \lambda_{\varrho i} C \equiv 0 , \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varrho)$$

donde si traggono le uguaglianze numeriche:

$$(18) \qquad \begin{cases} \lambda_i n'_{ik} + \lambda_{1i} n_{1k} + \lambda_{2i} n_{2k} + \cdots + \lambda_{\varrho i} n_{\varrho k} = 0 , & (k = 1, \cdots, \varrho) , \\ \lambda_i \nu_{il} + \lambda_{1i} n_{l1} + \lambda_{2i} n'_{l2} + \cdots + \lambda_{\varrho i} n'_{l\varrho} = 0 , & (l = 1, \cdots, \varrho) , \end{cases}$$

ove si è posto:

$$n_{ik} = [C_i C_k] , \qquad n'_{ik} = [\Gamma_i C_k] , \qquad \nu_{il} = [\Gamma_i \Gamma_l] .$$

Il *determinante* della base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ è:

$$D = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \cdots n_{1\varrho} \\ n_{21} & n_{22} \cdots n_{2\varrho} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_{\varrho 1} & n_{\varrho 2} \cdots n_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} ;$$

ed il determinante della base $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$ è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \cdots \nu_{1\varrho} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_{\varrho 1} & \nu_{\varrho 2} \cdots \nu_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} .$$

Ora, in virtù delle (18) e della regola di moltiplicazione dei determinanti, si ha:

$$(19) \qquad (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_\varrho)^2 \Delta = A^2 D ,$$

ove:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1\varrho} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{\varrho 1} & \lambda_{\varrho 2} & \cdots & \lambda_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

Dalla (19) si rileva facilmente che « se è nullo il determinante di una base, son nulli i determinanti di tutte le altre basi ».

Invero, nessuna delle $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho$ può esser nulla, perché altrimenti le $C_1, \cdots, C_\varrho$ non sarebbero distinte; e quindi se fosse $D = 0$, sarebbe necessariamente $\Delta = 0$.

Viceversa, scambiando l'ufficio delle due basi, si vede che se fosse $\Delta = 0$, sarebbe di conseguenza $D = 0$.

Ora proviamo che si può sempre scegliere una base a cui spetti un determinante non nullo.

Infatti, quando si costruisce la base $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho$, si può cominciare a scegliere una curva *del tutto* arbitraria della superficie; poi una curva che non sia legata algebricamente alla precedente, e così continuando. Possiamo dunque supporre che la prima curva scelta Γ_1, sia una sezione piana della superficie.

Allora gli ordini delle $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho$ risulteranno, rispettivamente uguali ai numeri $\nu_{11}, \nu_{12}, \cdots, \nu_{1\varrho}$, onde la matrice discriminante dell'aggruppamento $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho)$ sarà:

$$\begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \cdots & \nu_{2\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{\varrho 1} & \nu_{\varrho 2} & \cdots & \nu_{\varrho\varrho} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \end{vmatrix}.$$

Poiché questa matrice ha evidentemente la stessa caratteristica del determinante Δ, in forza del teor. II, si conclude che se fosse $\Delta = 0$, le curve $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho$ sarebbero algebricamente legate, e quindi non potrebbero costituire una base.

Dunque è $\Delta \neq 0$, e quindi è anche diverso da zero il determinante D di ogni altra base.

Osservazione 1ª. – Poiché il 1° membro della (19) non è nullo, sarà anche $\Delta \neq 0$; onde i determinanti D, Δ avranno lo stesso segno.

Si conclude che *i determinanti delle varie basi hanno tutti lo stesso segno.*

Osservazione 2ª. – Quando sia $\varrho = 1$, ogni curva della superficie F si potrà assumere come base, e il determinante relativo si ridurrà al grado virtuale della curva. Ne deriva che ogni curva della superficie avrà il grado virtuale diverso da zero, ed anzi positivo (Oss. 1ª), perché sulla F esistono certamente curve col grado positivo. Dunque:

Se il numero-base di una superficie è uguale ad 1, ogni curva della superficie ha il grado virtuale maggior di zero.

§ 7. – Effetto di una trasformazione birazionale sulla base e sul numero-base.

11. Se una superficie F si muta in una superficie F' mediante una trasformazione birazionale che sia priva di punti fondamentali su entrambe le superficie, è ben chiaro che ogni base delle curve di F si muta in una base delle curve di F'; e viceversa.

Il numero-base rimarrà dunque invariato dopo una tale trasformazione (23).

Supponiamo invece che nel passaggio da F ad F' s'introduca la curva eccezionale E', corrispondente al punto (semplice) E di F, senza peraltro che alcuna curva (eccezionale) di F si muti in un punto di F'; e diciamo $(C_1, \cdots, C_\varrho)$ le ϱ curve di una base della superficie F.

Nel caso che nessuna delle C passi per E, le curve $C_1', \cdots, C_\varrho'$ corrispondenti alle $C_1, \cdots, C_\varrho$, saranno irriducibili, al pari delle C, e nessuna di esse incontrerà la curva E'. Ogni curva D' di F', che non incontri la E', essendo la trasformata di una curva D di F non passante per E, risulterà algebricamente legata a $C_1', \cdots, C_\varrho'$. Se invece la curva D' incontra E', la curva composta $D'+E'$ sarà la trasformata di una curva D di F passante per E; onde si avrà un legame algebrico tra la curva $D'+E'$ e le curve $C_1', \cdots, C_\varrho'$, cioè un legame algebrico tra la D' e le curve $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$.

Nel caso in cui una delle C, e sia per esempio C_1, passi per E (colla molteplicità s), indicando con C_1' la trasformata di C_1, astrazion fatta dalla curva E' corrispondente ad E, e con $C_2', \cdots, C_\varrho'$ le trasformate di $C_2, \cdots, C_\varrho$, ogni curva D' di F' risulta algebricamente legata alle curve $sE'+C_1', \cdots, C_\varrho'$, cioè alle $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$.

Ad una conclusione analoga si perviene quando più curve C passino per E.

Si può ora vedere facilmente che, in ognuno dei due casi considerati, le curve $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$ sono algebricamente distinte, e quindi costituiscono una base sulla superficie F'. Cominciamo perciò dall'osservare che, in forza dell'ipotesi che la corrispondenza tra F, F' sia priva di punti fondamentali sulla F', la E' è una curva eccezionale di 1ª specie (24).

Nel 1° caso si ha dunque:

$$[E'C_i'] = 0 \quad (i = 1, \cdots, \varrho), \qquad [E'E'] = -1, \quad [C_i'C_k'] = [C_iC_k];$$

onde il determinante Δ' dell'aggruppamento $(E', C_1', \cdots, C_\varrho')$, si ottiene orlando il determinante Δ della base $(C_1, \cdots, C_\varrho)$ con una orizzontale e

(23) Picard et Simart, t. II, p. 242.

(24) Ricordo che una *curva eccezionale* dicesi di *1ª specie*, quando con una trasformazione birazionale della superficie, la si può mutare in un punto semplice, senza che, necessariamente, qualche suo punto si muti in una curva; mentre dicesi di *2ª specie* nel caso contrario. Cfr. Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) 6 (1901); n° 8.

con una verticale, che hanno -1 per elemento comune e tutti gli altri elementi nulli. Sicché risulta

$$\Delta' = -\Delta;$$

e poiché $\Delta \neq 0$, anche $\Delta' \neq 0$, e quindi (teor. II) le $(E', C_1', \cdots, C_\varrho')$ saranno algebricamente distinte.

Nel 2° caso si ha:

$$[E'C_1'] = s\,, \qquad [E'C_i'] = 0 \quad (i = 2, \cdots, \varrho), \qquad [E'E'] = -1\,,$$

$$[C_1'C_1'] = [C_1C_1] - s^2\,,$$

e inoltre:

$$[C_i'C_k'] = [C_iC_k]$$

per $i, k = 1, \cdots, \varrho$, eccettuata la coppia $i = 1$, $k = 1$.

Dicendo ancora Δ' il determinante dell'aggruppamento

$$(E', C_1', \cdots, C_\varrho')\,,$$

verrà dunque:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -1 & s & 0 & \cdots & 0 \\ s & [C_1C_1] - s^2 & [C_1C_2] & \cdots & [C_1C_\varrho] \\ 0 & [C_2C_1] & [C_2C_2] & \cdots & [C_2C_\varrho] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & [C_\varrho C_1] & [C_\varrho C_2] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho] \end{vmatrix} = -\Delta\,,$$

e quindi le $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$ saranno algebricamente distinte.

Si osservi infine che tra le $\varrho + 1$ curve di una base qualunque della superficie F', deve sempre esservi la curva eccezionale E', perché altrimenti a quelle $\varrho + 1$ curve corrisponderebbero su F altrettante *curve* algebricamente distinte. Si conclude pertanto col

TEOREMA VIII. *Se la superficie F si muta birazionalmente in una superficie F', mediante una trasformazione che possegga e' punti fondamentali in punti semplici di F, e nessun punto fondamentale su F', il numero-base di F' supera di e' unità il numero-base ϱ di F, e, sulla F', tra le curve di una base qualunque vi sono sempre le e' curve eccezionali (di 1ª specie), corrispondenti ai punti fondamentali.*

Viceversa, se alle curve di F' che corrispondono birazionalmente alle curve di una base della F, si aggiungono le e' curve eccezionali, si ottiene una base sopra F', e tra i determinanti Δ, Δ' delle due basi si ha la relazione:

$$\Delta' = (-1)^{e'}\Delta\,.$$

In quest'enunciato abbiamo considerato il caso generale che nel passaggio da F ad F' s'introducano $e' \geqq 1$ curve eccezionali, perché, se $e' > 1$, la trasformazione birazionale che intercede tra F ed F', si può evidentemente

riguardare come prodotto di più trasformazioni birazionali, in ciascuna delle quali s'introduca una sola curva eccezionale.

Osservazione. – Il teorema VIII permette di passare subito alla considerazione di una corrispondenza birazionale che possegga $e' \geqq 1$ punti fondamentali su F ed $e \geqq 1$ punti fondamentali su F'; giacché, indicando con Φ una superficie birazionalmente identica ad F, e sulla quale gli e' punti fondamentali di F si siano trasformati in altrettante curve eccezionali (di 1ª specie), senza che alcuna curva eccezionale di F si sia trasformata in un punto, la corrispondenza birazionale tra F e F' può riguardarsi come prodotto delle corrispondenze tra F, Φ e Φ, F', prive di punti fondamentali sulla superficie Φ.

Abbiamo dunque tra i numeri-base ϱ, ϱ' di F, F' la relazione:

$$\varrho + e' = \varrho' + e \quad (25). \tag{20}$$

12. Il caso che ci resta da esaminare, in cui una trasformazione birazionale della F introduca una curva eccezionale di 2ª specie, si può presentare soltanto quando F sia riferibile ad una rigata (o, in particolare, ad una superficie razionale) (26).

Ma in tal caso sussiste il teorema:

« Sopra una superficie F riferibile ad una rigata, la base è costituita da una generatrice (cioè da una curva razionale corrispondente ad una retta generatrice della rigata), da una curva unisecante le generatrici, e da quelle eventuali curve eccezionali di 1ª specie, che si staccano come parti dalle generatrici » (27).

Sicché l'introduzione di una curva eccezionale di 2ª specie, non modifica né la *natura* della base, né il valore del numero-base.

13. Riassumendo si può enunciare il

TEOREMA IX. *Il numero-base ϱ è un invariante relativo, cioè non s'altera per quelle trasformazioni birazionali che non introducono curve eccezionali di 1ª specie.*

Se e è il numero delle curve eccezionali (di 1ª specie) di una superficie non riferibile ad una rigata, il numero $\varrho - e$ è un invariante assoluto. Dunque, data una classe di superficie birazionalmente identiche, ϱ assume il valor minimo su quelle superficie della classe, che son prive di curve eccezionali di 1ª specie.

(25) Cfr. PICARD, *Sur une formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique*, Annales de l'Ecole Normale, (3) 21 (1905); n° 21.

(26) CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali...*

(27) Ved. il n° 14 della mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica...*, ove il teorema richiamato è enunciato sotto forma diversa (più espressiva). — Si noti che, se la rigata è irrazionale, ogni curva eccezionale di F è una generatrice (se di 2ª specie) o parte d'una generatrice (se di 1ª specie).

Per le superficie razionali e, più generalmente, per le superficie riferibili ad una rigata, il numero $\varrho - e$ non è un invariante assoluto, perché nella trasformazione di uno o più punti in altrettante curve eccezionali di 1ª specie, si presenta talora qualche altra curva eccezionale di 1ª specie, trasformata di una curva eccezionale di 2ª specie, che passi per alcuni punti fondamentali.

Tuttavia *anche per le superficie riferibili alle rigate, ϱ assume il valor minimo sulle superficie prive di curve eccezionali di 1ª specie*: e precisamente il valore 1 (sul piano) se la rigata è razionale, il valore 2 (sulla rigata) se la rigata è irrazionale.

A proposito del carattere d'invarianza del numero-base ϱ, ricorderò che ϱ è legato ad altri caratteri invarianti della superficie, dalla notevolissima *relazione di Picard* (28):

$$\varrho_0 = I + 4q - \varrho + 2 ,$$

ove ϱ_0 è il numero degl'integrali doppi di 2ª specie, appartenenti alla superficie, I *l'invariante di Zeuthen-Segre* (29), e $q\ (= p_g - p_a)$ l'irregolarità della superficie medesima (30).

Ad esempio per una superficie razionale l'invariante assoluto $I - \varrho$ vale -2, q vale 0, onde $\varrho_0 = 0$: com'è del resto evidente a priori.

Per una rigata irrazionale di genere p,

$$I = -4p , \qquad \varrho = 2 , \qquad q = p ,$$

onde risulta $\varrho_0 = 0$; cioè *una superficie riferibile ad una rigata è priva d'integrali doppi di 2ª specie* (31).

14. La considerazione della base dà luogo ad un altro invariante.

Risulta infatti dall'Osservazione con cui termina il nº 11 che, se le due superficie F, F' son riferite birazionalmente in guisa che e' punti semplici di F si mutino in altrettante curve eccezionali (di 1ª specie) di F', mentre e curve eccezionali (di 1ª specie) di F si mutano in altrettanti punti semplici di F', tra il determinante Δ di una base di F e il determinante Δ' della base *corrispondente* di F' (costituita dalle trasformate delle curve che dànno la base su F – astrazion fatta da quelle che si mutano in punti – coll'aggiunta

(28) PICARD, *Sur une formule générale*...; nº 18.

(29) Per la definizione di quest'invariante, ved. ad esempio CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali*...; nº 6.

(30) Veramente nella relazione originaria di Picard, in luogo del termine $4q$ c'è il termine $2r$, ove r è il numero degl'integrali semplici di 2ª specie appartenenti alla superficie. Dalle ricerche mie e dei sigg. Enriques e Castelnuovo risulta appunto la relazione:

$$r = 2q.$$

(31) La contemporanea mancanza d'integrali semplici e d'integrali doppi di 2ª specie, basterà a caratterizzare le superficie razionali?

delle curve eccezionali di F' corrispondenti agli e' punti fondamentali di F), passa la relazione:

$$(21) \qquad (-1)^e \Delta' = (-1)^{e'} \Delta .$$

Fissiamo ora l'attenzione sulle basi di F e di F' alle quali spettano determinanti aventi il minimo valore assoluto.

Dalla (21) risulta che questi valori minimi, relativi alle due superficie, sono identici; onde si può enunciare il

TEOREMA X. *Il minimo valore assoluto dei determinanti delle varie basi che si possono costruire sopra una superficie algebrica, rimane immutato per qualunque trasformazione birazionale della superficie.*

Quest'invariante assoluto è un numero intero non inferiore ad 1 (Teor. VII). Sulle superficie razionali e sulle rigate vale precisamente 1.

§ 8. – IL TEOREMA DI BÉZOUT SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA QUALUNQUE. ESPRESSIONI DEL GRADO E DEL GENERE DI UNA CURVA TRACCIATA SULLA SUPERFICIE.

15. Sul piano il teorema di Bézout dà il modo di calcolare il numero dei punti comuni a due curve algebriche qualunque, in funzione di caratteri (gli *ordini*) in cui non entra la considerazione simultanea delle due curve.

Sopra una superficie algebrica F, la questione analoga si può porre nei termini seguenti: definire un sistema di caratteri di ogni singola curva algebrica della superficie, in guisa che il numero dei punti comuni a due curve di F, si esprima soltanto mediante i caratteri della superficie ed i caratteri definiti delle due curve; e assegnare l'effettiva espressione di quel numero [32].

Diciamo $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ una base delle curve tracciate sulla superficie algebrica F, e C, D altre due curve qualunque della superficie, legate alla base dalle relazioni:

$$(22) \qquad \lambda C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho \equiv 0 ,$$

$$(23) \qquad \mu D + \mu_1 C_1 + \cdots + \mu_\varrho C_\varrho \equiv 0 .$$

Dalle (22), (23) si traggono le uguaglianze numeriche:

$$\lambda [CD] + \lambda_1 [C_1 D] + \cdots + \lambda_\varrho [C_\varrho D] = 0 ,$$
$$\mu [C_i D] + \mu_1 [C_1 C_i] + \cdots + \mu_\varrho [C_\varrho C_i] = 0 \qquad (i = 1, \cdots, \varrho) .$$

Eliminiamo tra queste $\varrho + 1$ relazioni lineari, le quantità

$$[C_1 D], \cdots, [C_\varrho D] ,$$

(32) Cfr. per l'ordine d'idee del testo la mia Memoria, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, ecc., Memorie della R. Acc. di Torino, (2) *52* (1902); n° 26 [Memoria VIII, p. 33; N.d.R.]; nonchè l'altra mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebric...a*

viene:

$$[CD] = \frac{1}{\lambda\mu} \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k [C_i C_k] , \tag{24}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le disposizioni binarie con ripetizione degli indici $1, 2, \cdots, \varrho$.

Abbiamo dunque il

TEOREMA XI. *Sopra una superficie algebrica qualunque si abbiano due curve algebriche C, D, legate rispettivamente alla base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$, secondo i numeri interi:*

$$(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho) , \qquad (\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\varrho) :$$

allora il numero dei punti comuni alle curve C, D è espresso dalla formola:

$$\frac{1}{\lambda\mu} \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k [C_i C_k] \qquad (i, k = 1, \cdots, \varrho) .$$

In particolare sul piano, dicendo C_1 una retta, e C, D due curve qualunque di ordini rispettivi m, n, si hanno le relazioni:

$$C - mC_1 \equiv 0 , \qquad D - nC_1 \equiv 0 ,$$

cioè le curve C, D son legate alla base (C_1) secondo i numeri $(1, -m)$, $(1, -n)$. Poiché $[C_1 C_1] = 1$, la (24) dà:

$$[CD] = mn ,$$

che è l'ordinario teorema di Bézout.

Dalla (22) discendono pure le equazioni lineari omogenee nelle $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$:

$$\begin{aligned}
&\lambda [CD] + \lambda_1 [C_1 D] + \cdots + \lambda_\varrho [C_\varrho D] = 0 , \\
&\lambda [CC_1] + \lambda_1 [C_1 C_1] + \cdots + \lambda_\varrho [C_\varrho C_1] = 0 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\lambda [CC_\varrho] + \lambda_1 [C_1 C_\varrho] + \cdots + \lambda_\varrho [C_\varrho C_\varrho] = 0 .
\end{aligned}$$

Eliminando tra queste le $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$, si ha

$$\begin{vmatrix}
[CD] & [C_1 D] & \cdots & [C_\varrho D] \\
[C_1 C] & [C_1 C_1] & \cdots & [C_\varrho C_1] \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
[C_\varrho C] & [C_1 C_\varrho] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho]
\end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè:

$$\Delta [CD] - \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i] \, [DC_k] = 0 \qquad (i, k = 1, \cdots, \varrho), \tag{25}$$

ove Δ è il determinante della base $(C_1, \cdots, C_\varrho)$, e Δ_{ik} è il complemento algebrico dell'elemento $[C_i C_k]$ nel determinante Δ. Poiché $\Delta \neq 0$ (Teor. VII),

dalla (25) si trae:

$$[CD] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i]\ [DC_k] \qquad (i, k = 1, \cdots, \varrho), \tag{26}$$

e si può enunciare il

TEOREMA XII. *Se sopra una superficie F le curve $C_1, \cdots, C_\varrho$ costituiscono una base, il numero dei punti comuni a due curve algebriche qualunque C, D della superficie, è espresso dalla formola:*

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i]\ [DC_k] \qquad (i, k = 1, \cdots, \varrho),$$

ove Δ è il determinante della base e Δ_{ik} è il complemento algebrico dell'elemento $[C_i C_k]$ nel determinante Δ.

In particolare sul piano, assumendo come base (C_1) una retta, si ha $\Delta = \Delta_{11} = 1$, onde risulta ancora:

$$[CD] = [CC_1]\ [DC_1].$$

I ϱ numeri interi (positivi o nulli) $[CC_i]$ si possono chiamare, per analogia, *gli ordini della curva C sulla superficie F.*

16. Dalle formole (24), (26) si traggono facilmente due espressioni del grado virtuale di una curva C tracciata sopra una superficie F.

Invero, se la C appartiene ad un sistema lineare infinito (o ad un sistema continuo), assumendo come curva D un'altra curva del sistema, si ha:

$$[CC] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k [C_i C_k], \tag{24'}$$

$$[CC] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i]\ [CC_k]. \tag{26'}$$

Ma le stesse formole valgono anche se C è isolata, come si vede aggiungendo a C una curva E, tale che il sistema lineare $|D| = |C + E|$ risulti almeno ∞^1, ed osservando che per definizione:

$$[CC] = [CD] - [CE].$$

Dunque: *Il grado virtuale di una curva C, sulla quale non si assegnino punti base, viene espresso in funzione dei coefficienti della relazione che lega C alle curve della base, oppure in funzione degli ordini di C, mediante le formole* (24'), (26').

Se sulla C si assegna un punto base s–plo, il grado virtuale diminuisce di s^2 unità.

17. Valutiamo ora il genere virtuale della curva C, in funzione dei coefficienti λ o degli ordini di C. Dicendo $|E|$ un sistema lineare della superficie F ed $|E'|$ il sistema aggiunto ad $|E|$, è noto che la differenza $[CE']-[CE]$ è indipendente dalla scelta del sistema $|E|$, e vale $2\pi-2-n$, ove π, n sono il genere e il grado virtuali della C. – Nel caso che sulla F esista il sistema canonico, $[CE']-[CE]$ dà il numero complessivo delle intersezioni di C con una curva canonica e colle curve eccezionali di F.

Dalla (22), segando prima con E' e poi con E, e quindi sottraendo le uguaglianze numeriche che così si ottengono, si trae:

$$\lambda\Theta + \lambda_1\Theta_1 + \cdots + \lambda_\varrho\Theta_\varrho = 0, \tag{27}$$

ove si è posto:

$$\Theta = 2\pi - 2 - n, \qquad \Theta_i = 2\pi_i - 2 - n_{ii},$$

π_i, n_{ii} essendo il genere ed il grado della curva C_i.

Ricordando la (24'), dalla (27) si ricava la:

$$\pi = \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k[C_iC_k] - \frac{1}{2\lambda}(\lambda_1\Theta_1 + \cdots + \lambda_\varrho\Theta_\varrho) + 1 \tag{28}$$

Un'altra espressione di π si può ottenere eliminando le $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$ tra la (27) e le equazioni lineari:

$$\lambda[CC_i] + \lambda_1[C_1C_i] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho C_i] = 0, \qquad (i = 1, \cdots, \varrho).$$

Si ha, come condizione di coesistenza delle $\varrho + 1$ equazioni:

$$\begin{vmatrix} \Theta & \Theta_1 & \cdots & \Theta_\varrho \\ [CC_1] & [C_1C_1] & \cdots & [C_\varrho C_1] \\ [CC_2] & [C_1C_2] & \cdots & [C_\varrho C_2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [CC_\varrho] & [C_1C_\varrho] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho] \end{vmatrix} = 0;$$

donde, mediante la (26'), si trae:

$$\pi = 1 + \frac{1}{2\Delta}\sum_{i,k}\Delta_{ik}[CC_k](\Theta_i + [CC_i]), \tag{29}$$

ove Δ, Δ_{ik} hanno il solito significato.

Se la C possiede punti multipli, e tra questi se ne *assegnano* tanti che *equivalgano* a d punti doppi, il genere virtuale $\overline{\pi}$ della C viene espresso dalla formola:

$$\overline{\pi} = \pi - d,$$

ove π è dato dalla (28) o dalla (29).

In particolare sul piano si ha la formola:

$$\overline{\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

che esprime il genere virtuale di una curva d'ordine n, sulla quale si assegnino d punti doppi.

Si conclude pertanto che: *Il genere virtuale d'una curva C, priva di punti base assegnati, è espresso in funzione dei caratteri della C, mediante le formole* (28), (29). *Se sulla C si assegnano d punti doppi, il genere virtuale diminuisce di d unità.*

XXX.

INTORNO AL TEOREMA D'ABEL SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE ED ALLA RIDUZIONE A FORMA NORMALE DEGL'INTEGRALI DI PICARD

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *21* (1906), pp. 257–282.

Nella mia Memoria « *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* » (1) ho dato, sotto varie forme, le condizioni (necessarie e sufficienti) affinché le curve di un sistema continuo, tracciato sopra una superficie algebrica, sieno *tutte quante* contenute in un medesimo sistema lineare.

Queste condizioni sono già molto espressive, come lo dimostra, tra l'altro, l'applicazione che ne ho fatto alla determinazione del numero degl'integrali semplici di 1ª specie, che appartengono alla superficie (2).

Tuttavia, se si pensa (come già osservavo nella citata Memoria) che sopra una curva algebrica l'ordinario teorema d'Abel dà le condizioni di equivalenza di due gruppi di un ugual numero di punti – cioè di uno stesso sistema continuo – mediante il semplice confronto delle somme degl'integrali abeliani nei punti di quei due gruppi, sorge la questione di determinare maggiormente « il teorema d'Abel sulle superficie algebriche », assegnando le condizioni di equivalenza di due curve D_1 , D_2 di uno stesso sistema continuo, senza nulla sapere delle altre curve del sistema.

Il teorema principale del presente lavoro, risponde in parte a tale questione, affermando che, quando nei punti dei gruppi ove le D_1 , D_2 segano una curva C *fissata* in un sistema continuo (di grado > 0), gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti alla superficie F, dànno somme uguali, due equimultipli convenienti delle D_1 , D_2, appartengono ad uno stesso sistema lineare (Teorema IV). – È in particolare notevole la forma che assume il teorema quando C appartiene al sistema continuo, cui appartengono le D_1 , D_2 (Teorema V).

Ma si può anche abbandonare l'ipotesi che le due curve D_1 , D_2 appartengano ad uno stesso sistema continuo, sostituendovi l'ipotesi *aritmetica* che abbiano lo stesso ordine, lo stesso grado virtuale, e che si seghino in un

(1) Annali di Matematica pura ed applicata, (3) *12* (1905), pp. 55–79 [Memoria XXV, p. 296; N.d.R.].

(2) Veggasi l'Introduzione alla stessa Memoria, ove si troveranno le citazioni relative all'argomento.

numero di punti uguale al loro grado: ciò in virtù di un teorema che riferirò a suo tempo e che si troverà dimostrato in una mia Memoria di prossima pubblicazione.

Si giunge così al risultato seguente:

Se sopra una superficie F son tracciate due curve D_1 , D_2 *dello stesso ordine, tali che i loro gradi sieno ambedue uguali al numero delle loro intersezioni e che gl'integrali di* 1ª *specie della F dieno le stesse somme nei gruppi ove le* D_1 , D_2 *tagliano una curva C fissata entro un sistema continuo di grado* > 0 (*in particolare una sezione piana*), *due equimultipli abbastanza elevati delle due curve, appartengono ad un medesimo sistema lineare* (Teorema VI).

Se si vuole confrontare questo teorema coll'ordinario teorema d'Abel, si potrà dire che la considerazione delle due curve D_1 , D_2 soddisfacenti a quelle tali condizioni aritmetiche, è analoga alla considerazione dei due gruppi di un *ugual numero di punti*, cui si riferisce il teorema d'Abel.

Per giungere ai teoremi sopra enunciati, mi si è presentata la necessità di ridurre a *forma normale* gl'integrali di Picard delle tre specie, che appartengono ad una superficie algebrica. Questa riduzione è, sotto certi riguardi, analoga alla riduzione a forma normale degl'integrali abeliani appartenenti ad una curva algebrica; ma l'analogia non è così perfetta da permettere un ovvio trasporto delle proprietà note del campo abeliano.

Anzitutto qua, per difetto di una rappresentazione reale dell'ente complesso, che cada sotto l'immediato dominio dei sensi, non si può adottare pei *cicli normali* della corrispondente varietà riemanniana, una definizione analoga a quella dei *tagli normali* di una superficie di Riemann; né si possono così facilmente maneggiare gl'integrali normali di 2ª specie, perché occorre definirli in relazione ad una curva, assunta come polare, ed entra quindi in giuoco un nuovo elemento, che non ha riscontro nel campo abeliano, ed è la funzione residua individuata da ogni integrale normale sulla propria curva polare.

Il lettore si farà subito un'idea delle nuove difficoltà che qua si presentano, quando, dall'espressione di una funzione razionale della superficie mediante gl'integrali normali di 2ª specie (§ 3), voglia ricavare il numero delle costanti arbitrarie che entrano nella funzione razionale stessa.

Tuttavia in qualche parte l'analogìa è perfetta: ma io, pur succintamente, ho creduto opportuno di fissare anche quei concetti che si delineano da sé, a chiunque abbia familiarità con queste teorie.

§ 1. – Cicli lineari normali d'una superficie algebrica.

1. *Generalità. Costruzione di un sistema primitivo di cicli lineari.* – Sia $p_1 = r + 1$ l'ordine di connessione lineare della varietà riemanniana V, a quattro dimensioni, i cui punti reali rappresentano i punti complessi di una

superficie algebrica (irriducibile) F, e sieno $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$, r cicli lineari *distinti* della V (o della superficie F) [3].

Se σ è un altro ciclo arbitrario della F, ed $\omega, \omega_1, \cdots, \omega_r$ sono i periodi di un integrale di Picard della 2ª specie, appartenente ad F, rispettivamente lungo i cicli $\sigma, \sigma_1, \cdots, \sigma_r$, si ha tra le ω l'equazione lineare

$$m\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_r\omega_r, \tag{1}$$

a coefficienti interi (positivi o negativi) *indipendenti dall'integrale J considerato.*

Anzi, poiché i valori delle $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ si possono assegnare ad arbitrio, il periodo ω non potrà esser nullo in corrispondenza ad *ogni* integrale J, se non quando sia $m_1 = m_2 = \cdots = m_r = 0$, cioè soltanto quando σ possa ridursi ad un punto per deformazione continua.

Supposto che σ non sia riducibile ad un punto, saranno diversi da zero alcuni dei numeri $m_1, \cdots, m_r$ ed anche m; sicché, dividendo per m i due membri della (1), avremo:

$$\omega = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_r\omega_r, \tag{2}$$

ove $p_1, p_2, \cdots, p_r$ son numeri razionali, non tutti nulli.

Se $\sigma_1', \sigma_2', \cdots, \sigma_r'$ sono altri r cicli della F ed $\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_r'$ i relativi periodi dell'integrale J, si avranno le relazioni:

$$\begin{aligned}
n_1\omega_1' &= n_{11}\omega_1 + n_{12}\omega_1 + \cdots + n_{1r}\omega_r \\
n_2\omega_2' &= n_{21}\omega_1 + n_{22}\omega_2 + \cdots + n_{2r}\omega_r \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n_r\omega_r' &= n_{r1}\omega_1 + n_{r2}\omega_2 + \cdots + n_{rr}\omega_r;
\end{aligned}$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinché gli r cicli σ' sieno distinti, è che il determinante $\sum \pm n_{11}n_{12}\cdots n_{rr}$ sia diverso da zero.

Si dice che i cicli $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ formano un *sistema primitivo*, allorquando nella relazione (1), che lega il periodo ω ai periodi $\omega_1, \cdots, \omega_r$, risulta sempre $m = 1$, comunque si sceglie il ciclo σ. Riprendendo un noto procedimento del Weierstrass [4], che adesso svilupperemo per comodità del lettore, si giunge a costruire facilmente un sistema primitivo di cicli lineari entro alla superficie F.

Essendo h un qualunque intero della successione $1, 2, \cdots, r$, consideriamo quei cicli lineari σ della F, in corrispondenza ai quali la relazione (2)

(3) Pei concetti di connessione lineare, di cicli distinti, etc., rimando il lettore alla *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Picard et Simart [Paris, Gauthier-Villars], t. I (1897), Cap. II e Cap. IV, n° 9. — Queste nozioni trovansi pure riassunte, sotto forma un po' diversa, nell'introduzione alla mia Memoria: *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie*, Math. Annalen, *61* (1905), pp. 20–49 [Memoria XX, p. 252; N.d.R.].

(4) Cfr. per esempio PICARD, *Traité d'Analyse* [Paris, Gauthier-Villars], II, 2e éd. (1905), pp. 227–228.

si particolarizza nella

$$\omega = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 + \cdots + p_h \omega_h ,$$

ove p_h è un numero razionale *positivo non nullo*, mentre $p_1 , p_2 , \cdots , p_{h-1}$ son numeri razionali *positivi o nulli*. Esistono certamente cicli soddisfacenti a queste condizioni: uno di essi è σ_h (pel quale $p_h = 1$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_{h-1} = 0$).

Tra i cicli della classe definita, fissiamone uno, $\overline{\sigma}_h$, a cui spetti il minimo valore $p_h^{(h)}$ del coefficiente p_h; e diciamo $p_1^{(h)}, p_2^{(h)}, \cdots , p_{h-1}^{(h)}$ i valori di $p_1 , p_2 , \cdots , p_{h-1}$ corrispondenti al ciclo $\overline{\sigma}_h$, e $\overline{\omega}_h$ il valore dell'integrale J lungo il ciclo medesimo. Tenendo presente che al ciclo σ_h spetta il valore 1 del coefficiente p_h, si vede che il coefficiente $p_h^{(h)}$ della relazione

$$\overline{\omega}_h = p_1^{(h)} \omega_1 + p_2^{(h)} \omega_2 + \cdots + p_h^{(h)} \omega_h , \tag{3}$$

soddisfa alle disuguaglianze

$$0 < p_h^{(h)} \leq 1 .$$

Si osserverà inoltre che i numeri $p_1^{(h)} , \cdots , p_{h-1}^{(h)}$ son pienamente determinati, giacché, in caso diverso, ne seguirebbe una relazione a coefficienti interi non tutti nulli, tra i periodi *distinti* $\omega_1 , \omega_2 , \cdots , \omega_{h-1}$.

Per $h = 1, 2, \cdots , r$ otteniamo così r cicli $\overline{\sigma}_1 , \overline{\sigma}_2 , \cdots , \overline{\sigma}_r$. Si noti, in primo luogo, che questi cicli son distinti, perché il determinante

$$\begin{vmatrix} p_1^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{(r)} & p_2^{(r)} & p_3^{(r)} & \cdots & p_{r-1}^{(r)} & p_r^{(r)} \end{vmatrix} = p_1^{(1)} p_2^{(2)} \cdots p_r^{(r)}$$

è diverso da zero. Ora noi proveremo di più che i cicli costruiti formano un sistema primitivo.

Sia infatti

$$\omega = P_1 \omega_1 + P_2 \omega_2 + \cdots + P_r \omega_r \tag{4}$$

l'espressione del periodo ω, relativo ad un arbitrario ciclo σ, in funzione dei periodi $\omega_1 , \omega_2 , \cdots , \omega_r$ relativi ai cicli $\sigma_1 , \sigma_2 , \cdots , \sigma_r$ dati inizialmente. Con semplici divisioni numeriche si possono determinare successivamente i numeri razionali positivi o nulli $P_1' , P_2' , \cdots , P_r'$, risp. *minori* di $p_1^{(1)} , p_2^{(2)} , \cdots , p_r^{(r)}$, in guisa che soddisfino alle relazioni:

$$\begin{cases} P_r = \lambda_r p_r^{(r)} + P_r' \\ P_{r-1} = \lambda_r p_{r-1}^{(r)} + \lambda_{r-1} p_{r-1}^{(r-1)} + P_{r-1}' \\ P_{r-2} = \lambda_r p_{r-2}^{(r)} + \lambda_{r-1} p_{r-2}^{(r-1)} + \lambda_{r-2} p_{r-2}^{(r-2)} + P_{r-2}' \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ P_1 = \lambda_r p_1^{(r)} + \lambda_{r-1} p_1^{(r-1)} + \cdots + \lambda_2 p_1^{(2)} + \lambda_1 p_1^{(1)} + P_1' , \end{cases} \tag{5}$$

ove $\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_r$ son interi positivi o negativi o nulli.

Sostituendo nella (4) i valori di $P_1, \cdots, P_r$ dati dalle (5), e ricordando la (3), verrà:

$$\omega = \lambda_1 \overline{\omega}_1 + \lambda_2 \overline{\omega}_2 + \cdots + \lambda_r \overline{\omega}_r + P'_1 \omega_1 + P'_2 \omega_2 + \cdots + P'_r \omega_r .$$

Diciamo ora $\overline{\sigma}$ il ciclo $\sigma - \lambda_1 \overline{\sigma}_1 - \cdots - \lambda_r \overline{\sigma}_r$ (o un ciclo *equivalente* a questo) ed $\overline{\omega}$ il valore di J lungo $\overline{\sigma}$. Poiché

$$\overline{\omega} = P'_1 \omega_1 + P'_2 \omega_2 + \cdots + P'_r \omega_r ,$$

ove

$$0 \leq P'_1 < p_1^{(1)} \leq 1 , \qquad 0 \leq P'_2 < p_2^{(2)} \leq 1 , \cdots , 0 \leq P'_r < p_r^{(r)} \leq 1 ,$$

a causa della definizione di $p_r^{(r)}$ dovrà risultare $P'_r = 0$. Ma allora, a causa della definizione di $p_{r-1}^{(r-1)}$, dovrà pure risultare $P'_{r-1} = 0$; e così proseguendo si trova

$$P'_1 = P'_2 = \cdots = P'_{r-1} = P'_r = 0 .$$

Da ciò segue che il valore dell'integrale J lungo il ciclo σ, si esprime come combinazione lineare a coefficienti *interi* dei periodi $\overline{\omega}_1 , \overline{\omega}_2 , \cdots , \overline{\omega}_r$, mediante la relazione

$$\omega = \lambda_1 \overline{\omega}_1 + \lambda_2 \overline{\omega}_2 + \cdots + \lambda_r \overline{\omega}_r .$$

Resta così dimostrato che *se* $p_1 = r + 1$ *è l'ordine di connessione lineare di una superficie algebrica* F, *si posson sempre costruire entro alla varietà riemanniana immagine reale di* F, r *cicli lineari distinti, che formino un sistema primitivo.*

2. *Sui cicli lineari di una curva algebrica appartenente ad una data superficie.* – Prima di passare alla costruzione dei cicli normali, dimostriamo il seguente

TEOREMA I. – *Avendosi una superficie* F *di ordine di connessione lineare* $p_1 = r + 1$, *e sulla* F *una curva irriducibile* C, *appartenente ad un sistema continuo, almeno* ∞^1, *di grado* > 0, *entro alla superficie di Riemann immagine reale di* C, *si posson sempre trovare* r *cicli distinti della varietà riemanniana immagine reale di* F.

Suppongasi infatti che sulla C si trovino soltanto $\varrho \leq r$ cicli distinti della F. Allora un integrale semplice di 1ª specie appartenente ad F, riguardato come integrale abeliano del punto scorrente sulla C, avrà i suoi periodi riducibili a ϱ distinti.

Ciò posto, indicando con q il numero degl'integrali indipendenti di 1ª specie appartenenti ad F, e con $q' (\leq q)$ il numero degl'integrali abeliani

indipendenti staccati su C dagl'integrali suddetti, risulterà

$$\varrho \geq 2q' \text{ (5)} \quad \text{ed} \quad r = 2q \text{ (6)};$$

onde q' uguaglierà q soltanto quando sia $\varrho = r$.

Se, dunque, $\varrho < r$ *vi sono* $q - q' > 0$ *integrali di* 1ª *specie della* F *che su* C *riduconsi a costanti.*

Teniamo ora conto del fatto che la C è variabile entro ad un sistema continuo, almeno ∞^1, Σ.

Se C_0 è un'altra curva qualunque di Σ, facendo tendere con continuità C_0 a C, ogni ciclo lineare di C_0 si deforma con continuità e tende ad un ciclo lineare di C (eventualmente ridotto ad un punto); e poiché in questa deformazione continua del ciclo non s'altera il valore lungo il ciclo stesso, di un qualunque integrale di 1ª specie I della F, si conclude che, se I è costante lungo la curva C, avrà un periodo nullo lungo ogni ciclo lineare di C_0, cioè sarà costante anche sopra quest'ultima curva.

Dunque i $q - q'$ integrali costanti lungo C, sono costanti lungo ogni altra curva di Σ.

Ma poiché le curve di Σ si segano a due a due almeno in un punto, ogni integrale di F costante sopra ogni C, lo sarà su tutta la F. Dovrà quindi risultare $q - q' = 0$, cioè $\varrho = r$.

Osservazione Iª. — La condizione che il sistema Σ sia di grado > 0, è necessaria per la validità del teorema. Infatti sulla superficie F con due fasci irrazionali unisecantisi di generi p , p' (superficie delle coppie di punti di due curve di generi p , p'), si hanno $p + p'$ integrali indipendenti di 1ª specie, dei quali p son costanti sulle curve del fascio di genere p, e p' sulle curve del fascio di genere p'; cioè sulle curve del 1º fascio si posson trovare soltanto $2p'$ $(= r - 2p)$ cicli lineari distinti della F, e sulle curve del 2º fascio se ne possono trovare soltanto $2p$ $(= r - 2p')$.

Osservazione IIª. — Nel caso in cui la C sia una sezione piana della data superficie F, la proposizione dimostrata riducesi al teorema che ogni ciclo lineare di F si può deformare con continuità sino a ridurlo a stare sulla C (7).

Osservazione IIIª. — Dal Teorema I segue pure come corollario che gl'integrali semplici di 2ª specie appartenenti ad F, staccano sopra la curva C, di cui nell'enunciato del teorema, r integrali abeliani *distinti* di 2ª specie; cioè ogni integrale trascendente di 2ª specie della F, dà luogo su C ad un integrale abeliano trascendente, e non già ad una funzione razionale.

(5) Vedi per esempio il nº 3 della mia Nota: *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali di Picard della* 1ª *e della* 2ª *specie, appartenenti ad una superficie algebrica,* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, (5) *14* (1905), pp. 288–296 [Nota XXI, p. 281; N.d.R.].

(6) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare,* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 40 (1905), pp. 545–556, 593–598, 655–663. – Cfr. pure il nº 8 della mia Memoria: *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (citata).

(7) PICARD et SIMART, *loc. cit.*, p. 86, nº 11.

3. *Costruzione dei cicli normali.* – Sulla curva irriducibile C, di genere p, appartenente ad un sistema continuo, almeno ∞^1, di grado > 0, tracciato sulla superficie F, consideriamo le p retrosezioni riemanniane (tagli normali), e sieno ϱ_h , ϱ_{p+h} i due cicli lineari, segantisi in un punto, che costituiscono la retrosezione d'indice h $(h = 1, 2, \cdots, p)$.

Diciamo inoltre $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$, r cicli distinti formanti un sistema primitivo entro alla F (n° 1). Allora, indicando con I , J due qualunque integrali semplici di 2ª specie appartenenti ad F, con

$$\omega_1 , \omega_2 , \cdots , \omega_{2p}$$

$$\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \cdots , \varepsilon_{2p}$$

i periodi di I , J risp. ai cicli $\varrho_1 , \varrho_2 , \cdots , \varrho_{2p}$, e con

$$\tau'_1 , \tau'_2 , \cdots , \tau'_r$$

$$\theta'_1 , \theta'_2 , \cdots , \theta'_r$$

i periodi di I , J risp. ai cicli $\sigma_1 , \sigma_2 , \cdots , \sigma_r$, avremo le relazioni a coefficienti interi:

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega_j = m_{j1}\tau'_1 + m_{j2}\tau'_2 + \cdots + m_{jr}\tau'_r \\ \varepsilon_j = m_{j1}\theta'_1 + m_{j2}\theta'_2 + \cdots + m_{jr}\theta'_r \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \cdots, 2p).$$

Dicendo c il contorno *positivo* della superficie di Riemann C, resa semplicemente connessa mediante i tagli lungo le retrosezioni congiunte a catena, si ha notoriamente (8):

$$(7) \qquad \int_c I\,dJ = \sum_{j=1}^{p} (\omega_j \varepsilon_{j+p} - \varepsilon_j \omega_{p+j}).$$

Mediante le (6) la forma bilineare del 2° membro si muta in una forma bilineare nelle τ', θ' :

$$\sum_{j=1}^{p} (\omega_j \varepsilon_{p+j} - \varepsilon_j \omega_{p+j}) = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} \tau'_\alpha \theta'_\beta ,$$

ove le k sono interi soddisfacenti evidentemente alle condizioni

$$k_{\alpha\beta} = - k_{\beta\alpha} , \qquad k_{\alpha\alpha} = 0 .$$

Indichiamo con $d_1 , d_2 , \cdots , d_q$ (ove $q = r/2$ è il numero degli integrali di 1ª specie appartenenti ad F) i *divisori elementari* (positivi) del determinante emisimmetrico $K = \sum \pm k_{11} k_{22} \cdots k_{rr}$, disposti in ordine di grandezza $(d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_q)$.

(8) Cfr. per esempio, PICARD, *Traité d'Analyse* (citato), pp. 455–456.

Si può allora soggettare le τ', θ' ad una medesima sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi

$$(8)\qquad \begin{cases} \tau'_h = a_{h1}\tau_1 + a_{h2}\tau_2 + \cdots + a_{hr}\tau_r \\ \theta'_h = a_{h1}\tau_1 + a_{h2}\tau_2 + \cdots + a_{hr}\tau_r \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, r \\ A = \sum \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{rr} = \pm 1 \end{pmatrix},$$

in guisa da ottenere *identicamente*:

$$(9)\qquad \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta}\tau'_\alpha\theta'_\beta = \sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda(\tau_\lambda\theta_{q+\lambda} - \tau_{q+\lambda}\theta_\lambda) \quad (9).$$

Sia

$$(10)\qquad \begin{cases} \tau_h = b_{h1}\tau'_1 + b_{h2}\tau'_2 + \cdots + b_{hr}\tau'_r \\ \theta_h = b_{h1}\theta'_2 + b_{h2}\theta'_2 + \cdots + b_{hr}\theta'_r \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, r \\ B = \sum \pm b_{11}b_{22}\cdots b_{rr} = \pm 1 \end{pmatrix},$$

la sostituzione lineare unimodulare inversa della (8).

Allora noi considereremo entro ad F i nuovi cicli

$$\begin{aligned} &b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2 + \cdots + b_{1r}\sigma_r \\ &b_{21}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2 + \cdots + b_{2r}\sigma_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &b_{r1}\sigma_1 + b_{r2}\sigma_2 + \cdots + b_{rr}\sigma_r , \end{aligned}$$

e designeremo risp. coi simboli $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$ i cicli stessi o cicli ad essi equivalenti.

I cicli definiti $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$ sono tra loro distinti (perché $B \neq 0$) e formano evidentemente un sistema primitivo.

Li diremo i *cicli normali* della superficie F, per la loro analogia, che avremo subito occasione di constatare, coi cicli formanti le retrosezioni normali sopra una curva algebrica (cioè sulla corrispondente superficie di Riemann).

Due cicli normali ν_h e ν_{q+h} $(h = 1, \cdots, q)$, i cui indici differiscano di q unità, si diranno tra loro *associati*; i cicli $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_q$ si diranno *cicli normali del 1° gruppo*, ed i cicli $\nu_{q+1}, \cdots, \nu_{2q}$, risp. associati ai precedenti, si diranno *del 2° gruppo*. Si chiameranno infine *periodi normali* i periodi d'un integrale semplice lungo i cicli normali.

Osservazione. – Nella costruzione dei cicli normali c'è di arbitraria la scelta della curva irriducibile C, la quale è soggettata alla sola condizione di

(9) Cfr. FROBENIUS, *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, Journal fur die r. und a. Math., *86* (1879), pp. 146–208; p. 165. – Nel caso in cui il determinante K sia uguale all'unità, la sostituzione lineare che riduce a *forma normale* la forma bilineare $\Sigma k_{\alpha\beta}\tau'_\alpha\theta'_\beta$, trovasi anche in BRIOT, *Théorie des fonctions abèliennes* [Paris, Gauthier-Villars, 1879], p. 56. – Cfr. pure PICARD, *Sur la réduction du nombre des pèriodes des intégrales abèliennes*, etc., Bulletin de la Soc. Math. de France, *11* (1883), pp. 25–53.

appartenere ad un sistema continuo Σ, almeno ∞^1, di grado >0; ed i cicli $\sigma_1\,\sigma_2\,,\cdots,\sigma_i$ costituenti il sistema primitivo di partenza.

Si potrà osservare, in primo luogo, che se la C varia con continuità entro al sistema Σ che la contiene, i cicli $\varrho_1\,,\varrho_2\,,\cdots,\varrho_{2p}$ si deformano con continuità, costituendo però sulla curva trasformata un sistema di p retrosezioni; e i periodi $\omega\,,\varepsilon$ degl'integrali $I\,,J$, lungo i cicli suddetti, restano costanti. Onde le (6) continuano a sussistere, e continua pure a sussistere la relazione (7), ove c denoti il contorno deformato.

Ne deriva che, *qualunque sia la posizione della curva C entro al sistema continuo che la contiene, partendo dai cicli* $\sigma_1\,,\sigma_2\,,\cdots,\sigma_r$ *e applicando il procedimento esposto, si giunge sempre agli stessi cicli normali* $\nu_1\,,\nu_2\,,\cdots,\nu_r$.

Ma si può inoltre provare che cambiando il sistema dei cicli $\sigma_1\,,\sigma_2\,,\cdots,\sigma_r$, da cui siamo partiti, si perviene ad altri cicli normali $\bar\nu_1\,,\bar\nu_2\,,\cdots,\bar\nu_r$, tali che l'integrale

$$\int_c I\,dJ$$

si esprime in funzione dei periodi

$$\bar\tau_1\,,\bar\tau_2\,,\cdots,\bar\tau_r$$
$$\bar\theta_1\,,\bar\theta_2\,,\cdots,\theta_r$$

di $I\,,J$ lungo i cicli $\bar\nu_1\,,\bar\nu_2\,,\cdots,\bar\nu_r$, mediante la forma bilineare

$$\sum_{\lambda=1}^{q}\bar d_\lambda\,(\bar\tau_\lambda\,\bar\theta_{q+\lambda}-\bar\tau_{q+\lambda}\,\bar\theta_\lambda)\,,$$

ove

$$\bar d_\lambda = d_\lambda \qquad\qquad (\lambda=1\,,\cdots,q)\,.$$

Invero, i due sistemi di cicli $\nu\,,\bar\nu$ essendo primitivi la sostituzione lineare a coefficienti interi che fa passare dalle τ (o dalle θ) alle $\bar\tau$ (o alle $\bar\theta$), è unimodulare, e quindi le due forme bilineari

$$\sum_\lambda d_\lambda(\tau_\lambda\,\theta_{q+\lambda}-\tau_{q+\lambda}\,\theta_\lambda)\,,\qquad \sum_\lambda \bar d_\lambda(\bar\tau_\lambda\,\bar\theta_{q+\lambda}-\bar\tau_{q+\lambda}\,\bar\theta_\lambda)\,,$$

che esprimono il valore dello stesso integrale, *sono equivalenti nel senso di* Weierstrass: *cioè hanno gli stessi divisori elementari* $(\bar d_\lambda = d_\lambda)$.

Ma se si cambia il sistema continuo a cui appartiene la C, quale relazione passerà tra i cicli normali primitivi e quelli che vengono a costruirsi nelle nuove condizioni? E, ciò che più interessa, si potrà scegliere un sistema continuo tale che i cicli normali costruiti a partire da una curva di questo sistema, dieno luogo ad una forma bilineare normale coi divisori elementari uguali all'unità?

Sono queste questioni assai difficili, alle quali per ora non possiamo rispondere.

4. *Proprietà dei cicli normali.* – Passando ad esporre le principali proprietà dei cicli normali, dimostriamo il

TEOREMA II. – *Se l'integrale semplice I, di 1ª specie, appartenente alla superficie algebrica F, ha i periodi normali*

$$\omega_1 = \omega_1' + i\omega_1'', \qquad \omega_2 = \omega_2' + i\omega_2'', \cdots, \omega_{2q} = \omega_{2q}' + i\omega_{2q}'',$$

sussiste la disuguaglianza

$$\sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda (\omega_\lambda' \omega_{q+\lambda}' - \omega_\lambda'' \omega_{q+\lambda}') > 0 , \tag{11}$$

la quale riducesi ad un'uguaglianza sola quando I riducesi ad una costante.

Questo teorema si dimostra riprendendo il solito ragionamento di Riemann, che conduce alla disuguaglianza analoga nella teoria degl'integrali abeliani.

Il Teorema I (nº 2) permette di applicare anche alla questione attuale il procedimento riemanniano.

Infatti, per l'ipotesi che la curva C, mediante cui si son definiti i cicli normali, sia variabile in un sistema continuo di grado > 0, l'integrale *trascendente* I staccherà su C un *effettivo* integrale abeliano di 1ª specie (Teorema I). Ciò posto, s'indichino con X e con iY la parte reale e la parte immaginaria dell'integrale I, e si consideri il solito integrale riemanniano

$$\int_c X\, dY , \tag{12}$$

esteso al contorno positivo c, definito al nº precedente. Le X, Y, considerate come funzioni di un punto variabile sulla immagine reale di F, hanno per rispettivi periodi ai cicli normali $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{2q}$, le quantità reali

$$\omega_1', \ \omega_2', \cdots, \omega_{2q}'$$
$$\omega_1'', \ \omega_2'', \cdots, \omega_{2q}'' ;$$

e considerate come funzioni di un punto scorrente sulla immagine reale di C, hanno per rispettivi periodi (reali) ai cicli $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_{2p}$, le quantità:

$$\theta_1', \ \theta_2', \cdots, \theta_{2p}'$$
$$\theta_1'', \ \theta_2'', \cdots, \theta_{2p}'',$$

essendo

$$\theta_1 = \theta_1' + i\theta_1'', \qquad \theta_2 = \theta_2' + i\theta_2'', \cdots, \theta_{2p} = \theta_{2p}' + i\theta_{2p}''$$

i periodi dell'integrale I ai cicli $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_{2p}$.

Poiché dalle θ', θ'' si passa alle ω', ω'' mediante le formole

$$\theta_j' = m_{j1} \sum_{h=1}^{2q} a_{1h}\omega_h' + m_{j2} \sum_h a_{2h}\omega_h' + \cdots + m_{j,2q} \sum_h a_{2q,h}\omega_h'$$
$$\theta_j'' = m_{j1} \sum_{h=1}^{2q} a_{1h}\omega_h'' + m_{j2} \sum_h a_{2h}\omega_h'' + \cdots + m_{j,2q} \sum_h a_{2q,h}\omega_h''$$
$$(j = 1, \cdots, 2p),$$

ove i numeri interi m, a son quelli già considerati nelle sostituzioni (6), (8), la forma bilineare

$$\sum_{j=1}^{2p} (\theta'_j \theta''_{p+j} - \theta''_j \theta'_{p+j}),$$

che esprime il valore dell'integrale (12), si muterà, conformemente alla (9), nella forma bilineare normale

$$\sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda (\omega'_j \omega''_{q+\lambda} - \omega''_j \omega'_{q+\lambda}).$$

Ricordando che l'integrale (12) è essenzialmente positivo [10], si conclude colla disuguaglianza (11).

Osservazione I^a. – Una prima conseguenza del Teorema II è che *nessuno dei numeri interi positivi* $d_1, d_2, \cdots, d_q$ *può essere nullo* [11].

Se, infatti, la prima d nulla fosse $d_{q'+1}$ $(q' < q)$, avremmo necessariamente

$$d_{q'+1} = d_{q'+2} = \cdots = d_q = 0, \tag{13}$$

giacché l'annullarsi della $d_{q'+1}$ implica l'annullarsi di tutti i determinanti d'ordine $q' + 1$ estratti dal determinante K, e quindi l'annullarsi di tutti i determinanti d'ordine superiore.

È facile ora costruire un integrale I, di 1ª specie, trascendente, che abbia i periodi nulli lungo i cicli $v_1, v_2, \cdots, v_{q'}$. Detti invero $I_1, I_2, \cdots, I_q$ i q integrali indipendenti di 1ª specie, che appartengono ad F, e δ_{hj} il periodo dell'integrale I_h al ciclo v_j $(h = 1, \cdots, q\,;\ j = 1, \cdots, q')$, basterà prendere

$$I = \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2 + \cdots + \mu_q I_q,$$

ove le μ soddisfino alle equazioni lineari

$$\mu_1 \delta_{1j} + \mu_2 \delta_{2j} + \cdots + \mu_q \delta_{qj} = 0 \qquad (j = 1, \cdots, q').$$

Se la caratteristica della matrice delle δ è q'' $(q'' \leq q' < q)$, $q - q''$ delle μ saranno arbitrarie, e si potranno quindi assumere diverse da zero. Ma allora, riferendo le notazioni del Teorema II all'integrale I ultimamente costruito, si avrebbero, oltre alle (13), le uguaglianze

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \cdots = \omega'_{q'} = \omega''_{q'} = \omega''_1 = \cdots = \omega''_{q'} = 0,$$

e quindi la forma bilineare $\sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda (\omega'_\lambda \omega''_{q+\lambda} - \omega''_\lambda \omega'_{q+\lambda})$ risulterebbe identicamente nulla: dal che seguirebbe la costanza dell'integrale I.

Si osservi per ultimo che, essendo

$$K = (d_1 d_2 \cdots d_q)^2,$$

il determinante K risulterà diverso da zero.

(10) Cfr. per esempio PICARD, *Traité d'Analyse* (citato), p. 451.

(11) Cfr. per esempio KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen* [Leipzig, Teubner, 1903], p. 122.

Osservazione II. – Dalla disuguaglianza (11) seguono pure queste altre conseguenze, che ci limitiamo ad enunciare, perché derivano dalla (11) come le proprietà corrispondenti degl'integrali abeliani derivano dalla disuguaglianza analoga.

Un integrale semplice di 1ª specie appartenente ad F, che abbia periodi nulli lungo i cicli normali di un medesimo gruppo, o i periodi normali tutti quanti reali o tutti quanti immaginari puri, riducesi ad una costante.

La parti reali (o le parti immaginarie pure) dei 2 q periodi di un integrale semplice di 1ª specie appartenente ad F, si possono assegnare del tutto ad arbitrio; cosicchè gl'integrali di 1ª specie dipendono da 2 q parametri reali (mentre gl'integrali di 2ª specie dipendono da 2 q parametri complessi) [12].

Un'altra proprietà notevole dei cicli normali viene espressa dal

TEOREMA III. – *Se I , J son due integrali semplici di 1ª specie della superficie algebrica F, ed*

$$\omega_1 , \omega_2 , \cdots , \omega_{2q}$$

$$\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \cdots , \varepsilon_{2q}$$

sono i loro rispettivi periodi normali, si ha la relazione bilineare

$$\sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda (\omega_\lambda \varepsilon_{q+\lambda} - \varepsilon_\lambda \omega_{q+\lambda}) = 0 , \tag{14}$$

ove $d_1 , d_2 , \cdots , d_q$ *son numeri interi non inferiori all'unità.*

Considerando infatti gl'integrali I , J sulla superficie di Riemann C, e indicando con c il contorno definito al nº 3, avremo con Riemann

$$\int_c I \, dJ = 0 .$$

Questa relazione riducesi alla (14) in virtù della definizione dei periodi normali (nº 3).

Osservazione. – Tra i periodi normali di due integrali abeliani appartenenti ad una curva di genere q, corre la relazione (14), ove però le d_λ son tutte uguali all'unità.

Anche la relazione tra i periodi di due integrali di Picard della 1ª specie, si potrebbe ridurre ad una forma bilineare normale, identicamente nulla, e coi divisori elementari uguali ad 1, purché si assumessero come fondamentali i cicli

$$d_1 v_1 , d_2 v_2 , \cdots , d_q v_q , \qquad v_{q+1} , \cdots , v_{2q} ,$$

ove $v_1 , v_2 , \cdots , v_{2q}$ è un sistema di cicli normali. Ma in tal modo, se le d non fossero tutte uguali all'unità, si avrebbero dei cicli non costituenti un sistema primitivo.

(12) Un'altra dimostrazione di questo teorema, in cui giuoca la considerazione dell'equazione differenziale lineare E (di Fuchs–Picard), trovasi accennata in una breve Nota del sig. PICARD (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, séance du 3 avril 1905).

§ 2. – Integrali semplici normali, delle tre specie.

5. *Integrali normali di 1ª specie.* – Sieno $K_1, K_2, \cdots, K_q$, q integrali semplici di 1ª specie, tra loro indipendenti, della superficie algebrica F d'irregolarità q; e sieno

$$\tau_{h1}, \tau_{h2}, \cdots, \tau_{h,2q} \qquad (h = 1, \cdots, q)$$

i periodi dell'integrale K_h lungo i cicli $v_1, \cdots, v_{2q}$ d'un sistema normale.

Osserviamo anzitutto che il determinante

$$T = \sum \pm \tau_{11}\, \tau_{22} \cdots \tau_{qq}$$

è diverso da zero; giacché, nell'ipotesi contraria, si potrebbe formare una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli, degl'integrali K, in guisa che i periodi di questa combinazione lineare ai cicli $v_1, \cdots, v_q$ fossero tutti nulli: il che è assurdo, avendo supposto gl'integrali K tra loro indipendenti (nº 4, Teorema II, Osservazione II).

Ponendo dunque

$$\lambda_1 = \frac{T_{1h}}{T}, \qquad \lambda_2 = \frac{T_{2h}}{T}, \cdots, \lambda_q = \frac{T_{qh}}{T},$$

ove $T_{1h}, T_{2h}, \cdots, T_{qh}$ sono i complementi algebrici (non tutti nulli) degli elementi della h^{esima} verticale nel determinante T, i periodi dell'integrale

$$I_h = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_q K_q$$

lungo i cicli normali $v_1, v_2, \cdots, v_{h-1}, v_{h+1}, \cdots, v_{2q}$, risulteranno tutti nulli, ed il periodo lungo v_h risulterà uguale ad 1.

Per $h = 1, \cdots, q$ otteniamo così q integrali, che sono indipendenti tra loro, perché ogni combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei q integrali costruiti, ha per periodi lungo i cicli $v_1, \cdots, v_q$ i coefficienti stessi, e quindi non può mai ridursi ad una costante.

Diciamo

$$\omega_{h1}, \omega_{h2}, \cdots, \omega_{hq} \qquad (h = 1, \cdots, q)$$

i periodi dell'integrale I_h lungo i cicli normali $v_{q+1}, \cdots, v_{2q}$. Il Teorema III applicato agl'integrali I_h, I_k $(h \neq k)$, dà luogo alle $\frac{q(q-1)}{2}$ relazioni

$$d_h\, \omega_{kh} = d_k\, \omega_{hk}.$$

Riassumendo *la tabella dei periodi degl'integrali* $I_1, I_2, \cdots, I_q$ *è*

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1q} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2q} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \omega_{q1} & \omega_{q2} & \cdots & \omega_{qq},
\end{array}$$

ove i periodi ω *son legati dalle relazioni*

$$d_h \omega_{kh} = d_k \omega_{hk} , \tag{15}$$

essendo le d numeri interi non inferiori all'unità.

I q integrali $I_1 , I_2 , \cdots , I_q$ si diranno gl'*integrali normali di* 1ª *specie* della superficie F.

6. *Integrali normali di* 2ª *specie.* – Fissiamo ora sulla superficie F d'irregolarità q, una curva algebrica irriducibile D, la quale sia priva di punti multipli e possegga la serie caratteristica (completa) di dimensione $\varrho \geq 0$ [13]. Consideriamo inoltre il sistema lineare $|D|$, e diciamo δ la deficienza della serie caratteristica di questo sistema (cosicché la dimensione del sistema stesso risulterà uguale a $\varrho - \delta + 1$).

Prendendo entro alla serie caratteristica completa una serie g di dimensione $\delta - 1$, e non contenente nessun gruppo caratteristico del sistema $|D|$, potremo costruire δ integrali di 2ª specie $L_1 , L_2 , \cdots , L_\delta$, che divengano infiniti del 1º ordine lungo la D, individuando sulla curva polare altrettanti gruppi caratteristici, tra loro indipendenti, scelti del resto comunque entro alla serie g [14].

Mediante un ragionamento che ho già esposto altrove [15], si giunge a dimostrare non soltanto che gl'integrali $L_1 , L_2 , \cdots , L_\delta$ son *distinti*, cioè che una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, non riducesi mai ad una funzione razionale; ma di più ch'essi son *linearmente indipendenti*, cioè che una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, non riducesi mai ad una funzione razionale aumentata di un integrale di 1ª specie.

Si può dunque enunciare la seguente proposizione, che sotto forma implicita è già contenuta nella mia Nota citata:

La deficienza della serie caratteristica d'un sistema lineare $|D|$, *sopra una superficie algebrica F, uguaglia il numero degl'integrali linearmente indipendenti di* 2ª *specie, che divengono infiniti del* 1º *ordine lungo una curva generica del sistema.*

Consideriamo ora uno, L_h, degl'integrali $L_1 , L_2 , \cdots , L_\delta$, e diciamo

$$\theta_{h1} , \theta_{h2} , \cdots , \theta_{h,2q} \qquad (h \leq 1 , \cdots , \delta)$$

i suoi periodi ai cicli normali $\nu_1 , \nu_2 , \cdots , \nu_{2q}$. Allora l'integrale

$$J = L_h - \theta_{h1} I_1 - \theta_{h2} I_2 - \cdots - \theta_{hq} I_q ,$$

ove $I_1 , I_2 , \cdots , I_q$ son gl'integrali normali di 1ª specie, avrà periodi nulli

(13) Per concetto di serie caratteristica (nel senso più generale) vedi la mia Nota: *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *39* (1904), pp. 490–506 [Nota XVIII, p. 234; N.d.R.].

(14) Vedi la mia Nota: *Sulla differenza tra i numeri degl'integrali*, etc. (citata); nº 1.

(15) *Ibidem*, nº 2.

lungo i cicli normali del 1° gruppo; ma avrà periodi non tutti nulli lungo i rimanenti cicli normali, perché altrimenti sarebbe

$$L_h = \theta_{h1} I_1 + \cdots + \theta_{hq} I_q + \text{funzione razionale.}$$

L'integrale J si dirà *un integrale normale di 2ª specie relativo alla curva polare (del 1° ordine) D.*

Per $h = 1, 2, \cdots, \delta$ otteniamo in tal modo δ integrali normali di 2ª specie, relativi alla curva polare D.

Supponiamo ora che la curva C di genere p, da cui partimmo per costruire i cicli normali $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{2q}$ (n° 3), sia una sezione della superficie F di equazione

$$F(x, y, z) = 0,$$

con un piano generico, $y = y_0$, del fascio $y =$ cost. Ci sarà pur lecito supporre, senza introdurre restrizioni essenziali, che la curva polare D, di cui sopra, non faccia parte di alcun piano $y =$ cost., né giaccia sulla $F'_z = 0$.

Ciò premesso, indicheremo con τ_α il periodo dell'integrale normale J al ciclo $\nu_{q+\alpha}$, e fissiamo l'attenzione sull'integrale $\int_c J dI_\alpha$, ove I_α è l'integrale normale di 1ª specie che ha il periodo 1 lungo il ciclo ν_α associato a $\nu_{q+\alpha}$. Da un lato, ricordando la relazioni (7), (9) del n° 3, abbiamo

$$\int_c J dI_\alpha = -d_\alpha \tau_\alpha ;$$

d'altro lato, indicando con $R(x_1), R(x_2), \cdots, R(x_m)$ i residui della funzione

$$J(x y_0 z) \frac{dI_\alpha(x, y_0, z)}{dx}$$

nei punti $x_1, x_2, \cdots, x_m$ comuni alle curve C, D, abbiamo:

$$\int_c J dI_\alpha = 2\pi i [R(x_1) + R(x_2) + \cdots + R(x_m)],$$

perché la funzione razionale dI_α/dx ha residui nulli in tutti i punti della C, e la funzione J ha residui non nulli soltanto ne' suoi poli $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Ma se $\varphi(x, y, z)$ è la funzione residua di rango 1 individuata da J sulla curva polare D (16), e se inoltre

$$I_\alpha = \int A_\alpha dx + B_\alpha dy ,$$

risulterà

$$R(x_j) = \varphi(x_j) A_\alpha(x_j) \qquad (j = 1, \cdots, m);$$

(16) SEVERI, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di* Picard, etc. (citata); § 1.

onde, in definitiva, avremo *le formole*

$$\tau_a = -\frac{2\pi i}{d_a}\sum_j \varphi(x_j)\, A_a(x_j) \qquad (a = 1, \cdots, q), \tag{16}$$

che esprimono razionalmente, rispetto al gruppo dei punti $x_1, x_2, \cdots, x_m$ *variabili sulla curva polare, i periodi dell'integrale normale di* 2^a *specie* J, *lungo i cicli normali del* 2^o *gruppo.*

Osservazione. – Nel 2^o membro delle relazioni (16), comparisce l'arbitraria y_0; ma siccome il 1^o membro è una costante indipendente da y_0 (che per una a conveniente si può anzi supporre non nulla) ne deriva che *la funzione*

$$\sum_j \varphi(x_j, y, z_j)\, A_a(x_j, y, z_j)$$

deve risultare indipendente da y.

Da ciò si potrebbe ricavare nuovamente la determinazione degli zeri e dei poli della funzione residua $\varphi(x, y, z)$, giacché la funzione razionale A_a è pienamente conosciuta.

7. *Integrali normali di* 3^a *specie.* – Assunta sulla F la solita curva C di genere p, appartenente ad un sistema continuo almeno ∞^1, di grado > 0, a partire dalle p retrosezioni $(\varrho_1 \varrho_{p+1})$, $(\varrho_2 \varrho_{p+2}), \cdots$ della C, costruiamo i cicli normali $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{2q}$ della F (n° 3).

Preso quindi su F un sistema algebrico irriducibile Σ (che può anche contenere la C parzialmente o totalmente) diciamo D_1, D_2 due curve di questo sistema, e K un integrale semplice di 3^a specie appartenente ad F, il quale divenga infinito (logaritmicamente) soltanto lungo le curve D_1, D_2, coi relativi periodi polari $+1$ e -1.

Si può sempre costruire un tal integrale considerando entro Σ un sistema algebrico irriducibile ∞^1, S, che contenga D_1, D_2; rappresentando le curve di S coi punti di una curva piana $\varphi(\xi, \eta) = 0$, e prendendo

$$K = \theta(\xi_1) + \theta(\xi_2) + \cdots + \theta(\xi_\lambda),$$

ove $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\lambda$ è il gruppo dei punti di φ che rappresentano le curve di S uscenti da un punto di F, e $\theta(\xi) = \int \zeta(\xi)\, d\xi$ è un integrale abeliano di 3^a specie della curva φ, il quale diviene infinito (logaritmicamente) coi periodi polari $+1$ e -1, soltanto nei 2 punti a_1, a_2 che rappresentano D_1, D_2 [17].

Anzi, se si suppone che la funzione integranda $\zeta(\xi)$ abbia in a_1, a_2, poli del 1^o ordine, si dimostra facilmente che la funzione razionale dK/dx diviene infinita del 1^o ordine lungo la curve D_1, D_2, cioè che lo sviluppo dell'integrale *abeliano* $K(x, \bar{y}, z)$ nell'intorno di un punto $x_0(x_0, \bar{y}, z_0)$ della curva D_1 (o D_2),

(17) Cfr. il n. 1 della mia Nota: *Sulla differenza tra i numeri*, etc. (citata), ov'è esposta la cosa del tutto analoga per gl'integrali di 2^a specie.

non contiene altri termini che non si conservino finiti in x_0, all'infuori di $\log(x - x_0)$. Diremo perciò che le D_1, D_2 son *curve logaritmiche pure* per l'integrale K.

Per provare quanto sopra è affermato, si osservi che, mentre x si muove sul piano $y = \bar{y}$, descrivendo un ciclo infinitesimo avvolgente il punto x_0, i λ punti $\xi_1, \cdots, \xi_\lambda$ corrispondenti ad x, descrivono altrettanti cicli infinitesimi avvolgenti i punti $\xi_1^0 \equiv a_1, \xi_2^0, \cdots, \xi_\lambda^0$ corrispondenti ad x_0. Ora, se x_0 è generico sulla curva D_1, x risulta funzione olomorfa di ξ_i nell'intorno di ξ_i^0, e ξ_i funzione olomorfa di x nell'intorno di x_0 (18). Avremo dunque:

$$x = x_0 + c_1(\xi_1 - \xi_1^0) + c_2(\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \cdots \qquad (\text{con } c_1 \neq 0).$$

Inoltre anche $\zeta(\xi_2), \cdots, \zeta(\xi_\lambda), \dfrac{d\xi_1}{dx}, \dfrac{d\xi_2}{dx}, \cdots, \dfrac{d\xi_\lambda}{dx}$, risulteranno olomorfe nell'intorno di x_0, e quindi in quest'intorno avremo:

$$(x - x_0)\frac{dK}{dx} = (x - x_0)\left[\zeta(\xi_1)\frac{d\xi_1}{dx} + \zeta(\xi_2)\frac{d\xi_2}{dx} + \cdots + \zeta(\xi_\lambda)\frac{d\xi_\lambda}{dx}\right]$$

$$= \zeta(\xi_1)\frac{d\xi_1}{dx}\left[c_1(\xi_1 - \xi_1^0) + c_2(\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \cdots\right] + \Phi(x),$$

ove Φ è una funzione olomorfa di x, che si annulla in x_0.

Passando al limite per $x = x_0$, e quindi per $\xi_1 = \xi_1^0$, viene:

$$\lim_{x = x_0}(x - x_0)\frac{dK}{dx} = c_1\left(\frac{d\xi_1}{dx}\right)_0 \lim_{\xi_1 = \xi_1^0}(\xi_1 - \xi_1^0)\,\zeta(\xi_1),$$

od anche, essendo $c_1 = \left(\dfrac{dx}{d\xi_1}\right)_0$:

$$\lim(x - x_0)\frac{dK}{dx} = \lim(\xi_1 - \xi_1^0)\,\zeta(\xi_1),$$

la quale prova che in ogni punto di D_1 la dK/dx possiede un polo del 1° ordine (19).

Ciò premesso, suppongasi che i periodi $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{2p}$ di un integrale di 2ª specie I della F, lungo i cicli $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_{2p}$, si esprimano in funzione dei periodi $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2q}$ dello stesso integrale lungo i cicli $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{2q}$, mediante le formole

$$\pi_j = m_{j1}\tau_1 + m_{j2}\tau_2 + \cdots + m_{j,2q}\tau_{2q} \qquad (j = 1, \cdots, 2p), \tag{17}$$

(18) *Sulla differenza tra i numeri*, etc. (citata); n° 1.

(19) Dall'ultima relazione segue pure che dK/dx individua su D_1 una funzione residua *costante*, uguale al residuo della funzione $\zeta(\xi)$ nel punto a_1. Che quella funzione residua dovesse risultar costante, era prevedibile *a priori*, giacchè l'integrale K, esteso ad un ciclo infinitesimo avvolgente un punto qualunque della D_1, dà un valore costante.

ove le m son interi: allora i periodi $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{2p}$ dell'integrale K lungo i cicli $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_{2p}$, si esprimeranno in funzione dei periodi normali $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{2q}$ dello stesso integrale, mediante le formole

$$\delta_j = m_{j1}\,\theta_1 + m_{j2}\,\theta_2 + \cdots + m_{j,2q}\,\theta_{2q} + \mu_j \qquad (j = 1, \cdots, 2p),$$

ove anche le μ son numeri interi.

Se si pone

$$\delta'_j = m_{j1}\,\theta_1 + m_{j2}\,\theta_2 + \cdots + m_{j,2q}\,\theta_{2q}, \tag{18}$$

in forza dell'ipotesi che i cicli ν sieno normali, la forma bilineare

$$\sum_{j=1}^{p} (\pi_j\,\delta'_{p+j} - \pi_{p+j}\,\delta'_j),$$

mediante le (17), (18), si muterà identicamente nella forma bilineare

$$\sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda(\tau_\lambda\,\theta_{q+\lambda} - \tau_{q+\lambda}\,\theta_\lambda).$$

Poiché inoltre

$$\int_c I\,dK = \sum_{j=1}^{p} (\pi_j\,\delta_{p+j} - \pi_{p+j}\,\delta_j) \quad [20],$$

ponendo al posto di δ_j il valore $\delta'_j + \mu_j$, avremo:

$$\int_c I\,dK = \sum_{j=1}^{p} (\pi_j\,\delta'_{p+j} - \pi_{p+j}\,\delta'_j) + \sum_{j=1}^{q} (\pi_j\,\mu_{p+j} - \pi_{p+j}\,\mu_j).$$

Sostituendo ivi i valori di π_j, δ'_j dati dalle (17), (18), verrà:

$$\int_c I\,dK = \sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda(\tau_\lambda\,\theta_{q+\lambda} - \tau_{q+\lambda}\,\theta_\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{q} (r_\lambda\,\tau_\lambda + s_\lambda\,\tau_{q+\lambda}), \tag{19}$$

ove le r, s son numeri interi.

In particolare, se chiamiamo *integrale normale di 3ª specie relativo alle curve logaritmiche* (*pure*) D_1, D_2, l'integrale

$$\Pi = K - \theta_1\,I_1 - \theta_2\,I_2 - \cdots - \theta_q\,I_q,$$

che ha i periodi nulli lungo i cicli normali del 1° gruppo; e se indichiamo con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_q$ i periodi di Π lungo i cicli $\nu_{q+1}, \nu_{q+2}, \cdots, \nu_{2q}$, la relazione (19),

(20) Cfr. per esempio APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* [Paris, Gauthier-Villars, 1895], p. 163.

applicata all'integrale di 1ª specie I_h e all'integrale di 3ª specie Π, ci dà:

$$\int_c I_h \, d\Pi = d_h \varepsilon_h + r_h + s_1 \omega_{h1} + \cdots + s_q \omega_{hq} \qquad (h = 1, \cdots, q),$$

ove, secondo le notazioni del nº 5, $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \cdots, \omega_{hq}$ sono i periodi dell'integrale normale I_h ai cicli normali del 2º gruppo.

Dicansi ora: $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m$ i punti comuni alle curve C, D_1; $x''_1, x''_2, \cdots, x''_m$ i punti comuni alle C, D_2; ed x un punto variabile sulla C. Asportando dalla superficie di Riemann C, ove immaginiamo già descritto il contorno c, $2m$ dischetti che contengano i punti $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m$, $x''_1, x''_2, \cdots, x''_m$, e applicando il teorema di Cauchy all'integrale $\int I_h \, d\Pi$, esteso al contorno c ed ai bordi dei $2m$ buchi così praticati, avremo la relazione:

$$\int_c I_h \, d\Pi = \sum_{j=1}^{m} [I_h(x'_j) - I_h(x''_j)],$$

perché la funzione $I_h \dfrac{d\Pi}{dx}$ ha residui nulli in tutti i punti della C, eccezion fatta pei punti x'_j, x''_j $(j = 1, \cdots, m)$, ove ha residui rispettivamente uguali ad

$$\frac{1}{2\pi i} I_h(x'_j), \qquad -\frac{1}{2\pi i} I_h(x''_j) \quad (21).$$

Si conclude pertanto colle *relazioni fondamentali*

$$(20) \qquad d_h \varepsilon_h + r_h + s_{h1} \omega_{h1} + \cdots + s_q \omega_{hq} = \sum_{j=1}^{m} [I_h(x'_j) - I_h(x''_j)] \qquad (h = 1, \cdots, q),$$

che ci condurranno alla completa estensione del teorema d'Abel sulle superficie algebriche.

Osservazione. – Una conseguenza delle relazioni (20) è il teorema:

Se D_1, D_2 son due curve di un medesimo sistema continuo, e C è una curva variabile in un sistema continuo di grado > 0 (*eventualmente coincidente col sistema cui appartengono D_1, D_2*), *la differenza tra le somme dei valori assunti da un integrale semplice di 1ª specie della F, nei punti dei gruppi (CD_1), (CD_2), si mantiene costante al variare continuo di C.*

Invero, se si suppone che C varii con continuità, nelle (20) rimangono costanti $d_h, \varepsilon_h, \omega_{h1}, \cdots, \omega_{hq}$ e i numeri *interi* r, s; onde restano costanti anche i secondi membri.

Il caso in cui C, D_1, D_2 appartengano ad un medesimo sistema continuo, trovasi già considerato al nº 4 della mia Memoria citata « *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* ».

(21) Cfr. per esempio APPELL et GOURSAT, *op. cit.*, pp. 162–163.

§ 3. – Espressione d'una funzione razionale dell'ente ∞^2 mediante gl'integrali normali di 2ª specie.

8. Data sulla superficie algebrica F la curva irriducibile D, la quale appartenga ad un sistema algebrico completo *non lineare*, almeno ∞^1, un integrale di 2ª specie che possegga la D come curva polare del 1° ordine, non riducesi in generale ad una funzione razionale.

Quali condizioni *algebriche* debbono esser perciò soddisfatte?

È chiaro che la ricerca di queste condizioni equivale alla ricerca delle condizioni affinché il gruppo caratteristico individuato sulla D dall'integrale di 2ª specie fissato, appartenga alla serie caratteristica del sistema lineare $|D|$ (22).

Profittando degl'integrali normali di 2ª specie, è facile scrivere sotto forma esplicita queste condizioni.

Ritorniamo perciò all'ipotesi che i cicli normali $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{2q}$ della superficie F di equazione

$$F(x,y,z) = 0,$$

sieno costruiti a partire da una sezione C di F con un piano $y = y_0$; e, detta r la dimensione del sistema algebrico completo che contiene la curva D (che supponiamo non appartenente ad alcun piano $y = \text{cost.}$), scegliamo su D r gruppi caratteristici $G_1, G_2, \cdots, G_r$, indipendenti tra loro, e *non appartenenti* alla serie caratteristica del sistema $|D|$.

Sieno $J_1, J_2, \cdots, J_r$ gli r integrali normali di 2ª specie che individuano sulla curva polare D i gruppi caratteristici fissati (n° 6) (23), e $\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z), \cdots, \varphi_r(x,y,z)$ le funzioni residue individuate su D dagli stessi integrali.

Se $R(x,y,z)$ è una funzione razionale che possegga la D come curva polare del 1° ordine, poiché il gruppo caratteristico individuato da R sulla D è linearmente dipendente dai gruppi $G_1, \cdots, G_r$, avremo:

$$\varphi(x,y,z) = \lambda_1 \varphi_1(x,y,z) + \cdots + \lambda_r \varphi_r(x,y,z),$$

ove φ è la funzione residua relativa ad R, e $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son costanti non tutte nulle. Ma allora l'integrale di 2ª specie

$$R - \lambda_1 J_1 - \lambda_2 J_2 - \cdots - \lambda_r J_r, \tag{21}$$

individuando sulla D una funzione residua identicamente nulla, riducesi alla 1ª specie; e poiché i periodi dell'integrale (21) lungo i cicli normali del 1° gruppo son nulli, ne segue (n° 4, Osservazione 2ª) che esso riducesi addirittura ad una costante.

(22) Severi, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di* Picard, etc. (citata); n° 4.

(23) Si ricordi che, se δ è la deficienza della serie caratteristica di $|D|$, tra i suddetti integrali se ne trovano soltanto δ linearmente indipendenti.

Sicché, indicando con λ una costante, abbiamo l'uguaglianza

$$R = \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \cdots + \lambda_r J_r + \lambda ,$$

che *esprime la funzione razionale R come combinazione lineare a coefficienti costanti, degl'integrali normali di 2^a specie.*

Poiché l'integrale (21) ha i periodi nulli anche lungo i cicli normali del 2° gruppo, avremo [vedi le (16) del n° 6]:

$$(22) \qquad \lambda_1 \sum_{j=1}^{m} \varphi_1(x_j) A_a(x_j) + \lambda_2 \sum_j \varphi_2(x_j) A_a(x_j) + \cdots + \lambda_r \sum_j \varphi_r(x_j) A_a(x_j) = 0 ,$$

ove $x_1 , x_2 , \cdots , x_m$ sono i punti comuni alle curve C, D ed

$$A_a\, dx + B_a\, dy \qquad (a = 1 , \cdots , q)$$

è il differenziale totale dell'integrale normale di 1ª specie I_a.

Viceversa, se le $\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_r$ soddisfano alle equazioni lineari (22), l'integrale $\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \cdots + \lambda_r J_r$ ha *tutti* i periodi nulli e quindi riducesi ad una funzione razionale.

Dunque *le equazioni* (22), *lineari nelle* λ, *esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinché un integrale di 2^a specie* $\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \cdots + \lambda_r J_r$ *si riduca ad una funzione razionale, infinita del 1° ordine lungo la curva D.*

Ne deriva che *la dimensione del sistema lineare completo* $|D|$ *viene espressa dalla differenza tra la dimensione del sistema algebrico completo* $\{D\}$ *e il numero* $q' \leq q$ *delle equazioni* (22) *tra loro indipendenti.*

In altri termini: *Il numero q' delle equazioni* (22) *tra loro indipendenti, uguaglia la deficienza della serie caratteristica del sistema lineare* $|D|$.

Sembra assai difficile tradurre *geometricamente* le condizioni di dipendenza delle equazioni (22). Questa traduzione geometrica permetterebbe di assegnare il significato della differenza tra la deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare e l'irregolarità q della superficie a cui appartiene il sistema; e quindi porterebbe a stabilire in modo ben netto il significato della *sovrabbondanza* di un sistema lineare di curve sopra una superficie irregolare (24).

La differenza $q - q'$, dal punto di vista attuale, è analoga all'indice di specialità di una serie lineare di gruppi di punti sopra una curva irrazionale.

§ 4. – Maggiore determinazione del teorema d'Abel sulle superficie algebriche.

9. Ritorniamo ora alle due curve D_1 , D_2 che abbiamo considerato al n° 7; e riferiamoci agli sviluppi ivi contenuti, conservando anche le stesse notazioni.

(24) Per le superficie regolari vedi Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2) *44* (1893), pp. 171–232, § IV, n° 2.

Denotiamo, come di solito, con (CD_1) il gruppo dei punti $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m$ comuni alle curve C, D_1, e con $\sum_h (CD_1)$ la somma

$$I_h(x'_1) + I_h(x'_2) + \cdots + I_h(x'_m);$$

e similmente scriviamo $\sum_h (CD_2)$ in luogo della somma

$$I_h(x''_1) + I_h(x''_2) + \cdots + I_h(x''_m).$$

Se, qualunque sia h, sussistono le relazioni

$$\sum_h (CD_1) \equiv \sum_h (CD_2) \quad \text{(modd. periodi)}, \tag{23}$$

cioè le

$$\sum_h (CD_1) = \sum_h (CD_2) + m_1 + n_1 \omega_{h1} + n_2 \omega_{h2} + \cdots + n_h \omega_{hq},$$

ove le m, n son interi, in forza delle (20) avremo:

$$d_h \varepsilon_h = a_h + b_1 \omega_{h1} + b_2 \omega_{h2} + \cdots + b_h \omega_{hq} \qquad (h = 1, \cdots, q),$$

dove le a, b son pure numeri interi.

Ciò premesso, detto x il punto variabile sulla superficie data F, e d il minimo comune multiplo $(\leq d_q)$ dei numeri interi positivi $d_1, d_2, \cdots, d_q$, consideriamo la funzione

$$\Phi(x) = e^{2\pi i d \left(b_1 \frac{I_1}{d_1} + b_2 \frac{I_2}{d_2} + \cdots + b_q \frac{I_q}{d_q} - \Pi \right)},$$

ove $I_1, I_2, \cdots, I_q$ son gl'integrali di 1ª specie appartenenti ad F, e Π è l'integrale normale di 3ª specie colle curve logaritmiche D_1, D_2.

Percorrendo col punto x il ciclo normale ν_h $(h = 1, \cdots, q)$ l'integrale I_h aumenta di 1, mentre gli altri integrali che figurano nell'esponente, rimangono invariati. Ne deriva che, dopo la circolazione, Φ si riproduce moltiplicata per $e^{2\pi i b_h \frac{d}{d_h}} = 1$.

Percorrendo con x il ciclo normale ν_{q+h} $(h = 1, \cdots, q)$ l'integrale

$$b_1 \frac{I_1}{d_1} + b_2 \frac{I_2}{d_2} + \cdots + \frac{I_q}{d_q} - \Pi,$$

aumenta di

$$b_1 \frac{\omega_{1h}}{d_1} + b_2 \frac{\omega_{2h}}{d_2} + \cdots + b_q \frac{\omega_{qh}}{d_q} - \varepsilon_h;$$

e quest'espressione, in virtù delle relazioni (15), riducesi alla forma

$$\frac{b_1 \omega_{h1} + b_2 \omega_{h2} + \cdots + b_q \omega_{hq}}{d_h} - \varepsilon_h = \frac{-a_h}{d_h}.$$

Onde per la circolazione di x lungo ν_{q+h}, $\Phi(x)$ si riproduce moltiplicata per $e^{-2\pi i a_h \frac{d}{d_h}} = 1$.

Ne deriva che $\Phi(x)$ *è funzione uniforme del punto* x.

È chiaro che la Φ si mantiene finita finché x non appartiene ad alcuna delle curve D_1, D_2. Vediamo ora cosa accade quando x coincide col punto $x_1(x_1\bar{y}z_1)$ della D_1.

Ricordando che il valore di Π lungo un ciclo avvolgente x_1 è uguale ad 1, avremo, nell'intorno di x_1:

$$\Pi(x, \bar{y}, z) = \frac{1}{2\pi i} \log(x - x_1) + \text{funz. olomorfa in } x_1 ;$$

e quindi

$$\Phi(x, \bar{y}, z) = e^{-d \log(x-x_1)} \Phi_1(x, \bar{y}, z) = \frac{\Phi_1(x, \bar{y}, z)}{(x - x_1)^d},$$

ove Φ_1 è olomorfa nell'intorno di x_1. Ciò dimostra che il punto x_1 è un polo (d'ordine $\leq d$) per la $\Phi(x)$.

Similmente, se $x_2(x_2\bar{y}z_2)$ è un punto generico della D_2, si ha nell'intorno di x_2:

$$\Phi(x, \bar{y}, z) = e^{d \log(x-x_2)} \Phi_2(x, \bar{y}, z) = (x - x_2)^d \Phi_2(x, \bar{y}, z),$$

ove Φ_2 è olomorfa in x_2; e ciò prova che x_2 è uno zero (d'ordine $\geq d$) per la funzione $\Phi(x)$.

Poiché la $\Phi(x)$ è uniforme e non presenta in tutta la superficie F singolarità di natura diversa dalla polare, si conclude che $\Phi(x)$ *è una funzione razionale, che diviene infinita soltanto lungo la curva* D_1 *e nulla soltanto lungo la* D_2.

Detto λ l'ordine d'infinito di Φ lungo D_1, siccome D_1, D_2 segano un piano nello stesso numero di punti, λ rappresenterà pure l'ordine di zero di Φ lungo D_2, e quindi avremo le disuguaglianze:

$$\lambda \leq d, \quad \lambda \geq d, \qquad \text{donde segue:} \quad \lambda = d .$$

Riassumendo otteniamo il

TEOREMA IV. – *Se sopra una superficie algebrica* F *si hanno due curve* D_1, D_2 *di un medesimo sistema continuo, che seghino sopra una terza curva* C, *fissata pure entro ad un sistema continuo (di grado* > 0*), due gruppi di punti nei quali gl'integrali semplici di prima specie appartenenti ad* F *dieno somme uguali, a meno di multipli dei periodi, allora esiste un intero positivo* d *tale che i sistemi lineari* $|dD_1|, |dD_2|$ *coincidono.*

10. Supposto che le D_1, D_2 appartengono ad un sistema continuo di grado > 0, nulla ci vieta di assumere come curva C una curva di questo sistema. Allora è facile vedere che le condizioni (23) risultano perfettamente equivalenti alle condizioni:

$$\sum_h G_1 \equiv \sum_h (D_1 D_2) \equiv \sum_h G_2 \quad \text{(modd. periodi)}, \tag{24}$$

ove G_1, G_2 son *gruppi caratteristici* di D_1, D_2.

Invero, per *ogni* posizione di C entro al sistema continuo cui appartengono D_1, D_2, tra le $\sum_h(CD_1)$, $\sum_h(CD_2)$ sussiste la relazione (23) (vedi l'Osservazione in fine del § 2); sicché se la C variando con continuità viene infinitamente prossima a D_1, si ha

$$\sum_h G_1 \equiv \sum_h(D_1 D_2);$$

e se la C viene infinitamente prossima a D_2, si ha similmente

$$\sum_h(D_1 D_2) \equiv \sum_h G_2 .$$

Dal confronto di queste relazioni seguono le (24).

Viceversa, indicando con C una curva qualunque del sistema continuo cui appartengono D_1, D_2, in forza dell'Osservazione con cui termina il § 2, sussistono le relazioni:

$$\sum_h(CD_1) - \sum_h(CD_2) \equiv \sum_h G_1 - \sum_h(D_1 D_2) \equiv \sum_h(D_1 D_2) - \sum_h G_2 ,$$

le quali, una volta ammesse le (24), dànno le (23).

Adottando per le somme dei valori assunti dagl'integrali di 1ª specie della F nei punti di un gruppo caratteristico di D_1 (o D_2), la locuzione già altrove usata di *somme caratteristiche* [25], il Teorema IV si può anche enunciare sotto la forma seguente:

TEOREMA V. – *Sieno D_1, D_2 due curve di uno stesso sistema continuo di grado > 0 appartenente ad una superficie F: allora, se le somme dei valori di un integrale qualunque di 1ª specie della F, nei punti del gruppo $(D_1 D_2)$, è uguale, a meno di multipli dei periodi, alle somme caratteristiche cui quell'integrale dà luogo sulle curve D_1, D_2, esiste un intero positivo d, tale che le curve dD_1, dD_2 risultano equivalenti.*

Osservazione. – Se si suppongono soddisfatte soltanto le relazioni

$$\sum_h G_1 \equiv \sum_h G_2 ,$$

ricordando che

$$\sum_h G_1 - \sum_h(D_1 D_2) \equiv \sum_h(D_1 D_2) - \sum_h G_2 ,$$

si dedurrà

$$2\sum_h(CD_1) - 2\sum_h(CD_2) \equiv 2\sum_h G_1 - 2\sum_h(D_1 D_2) \equiv 0 .$$

Considerando ancora l'integrale normale di 3ª specie Π relativo alle curve D_1, D_2 e indicando con ε_h il suo periodo al ciclo v_{q+h}, si avrà in tal caso:

$$2 d_h \varepsilon_h = a_h + b_1 \omega_{h1} + \cdots + b_q \omega_{hq} ,$$

e quindi

$$\Psi(x) = e^{2\pi i d\left(\frac{b_1}{d_1} I_1 + \cdots + \frac{b_q}{d_q} I_q - 2\Pi\right)}$$

si ridurrà ad una funzione razionale.

(25) *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (citata); n° 5.

Ed anzi, ripetendo il ragionamento già esposto al n° precedente per la funzione Φ, si conclude che la Ψ diviene infinita d'ordine $2d$ lungo D_1, e nulla d'ordine $2d$ lungo D_2.

Onde *dall'essere uguali le corrispondenti somme caratteristiche delle curve* D_1 , D_2 *si deduce*

$$| 2\, dD_1 | = | 2\, dD_2 | .$$

Ma non è escluso che possano essere identici anche due multipli inferiori delle D_1 , D_2.

11. All'ipotesi che le due curve D_1 , D_2, cui si riferisce il Teorema IV, appartengano ad un medesimo sistema continuo, si può sostituire l'ipotesi ch'esse soddisfino a certe condizioni aritmetiche (che adesso preciseremo), senza che la conclusione del Teorema IV cessi di valere.

Però la nuova ipotesi ci permetterà soltanto di affermare l'equivalenza delle curve lD_1 , lD_2, con l generalmente maggiore dell'intero d, di cui si parla nell'enunciato del Teorema IV.

Le condizioni aritmetiche a cui ho sopra alluso, derivano dal teorema seguente:

«Avendosi sopra una superficie F due curve D_1 , D_2 dello stesso ordine, che abbiano il grado virtuale uguale al numero delle loro intersezioni, si può determinare un intero positivo λ, tale che le curve $\lambda D_1 , \lambda D_2$ appartengano ad un medesimo sistema continuo» (26).

Se facciamo l'ipotesi che le somme dei valori assunti da un qualunque integrale di 1ª specie della F nei punti dei gruppi $(CD_1) , (CD_2)$, ove le D_1 , D_2 segano una curva C fissata entro ad un sistema continuo di grado > 0, sieno uguali tra loro (a meno di multipli dei periodi), risulteranno pure uguali le somme cui dà luogo lo stesso integrale nei punti dei gruppi $(\lambda D_1 , C) , (\lambda D_2 , C)$; sicché le curve $\lambda D_1 , \lambda D_2$ si troveranno nelle condizioni previste dal Teorema IV, onde avremo

$$| d\lambda D_1 | = | d\lambda D_2 | .$$

Si perviene quindi al

TEOREMA VI. – *Abbiansi sopra una superficie algebrica F due curve D_1 , D_2 dello stesso ordine, i cui gradi virtuali sieno entrambi uguali al numero delle loro intersezioni; ed una terza curva C fissata in un sistema continuo (di grado > 0): allora, se gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad F, dànno le stesse somme nei gruppi ove la C è segata dalle D_1 , D_2, esiste un intero positivo l tale che le curve lD_1 , lD_2 risultano equivalenti.*

(26) Questo teorema si troverà dimostrato al n° 2 della mia Memoria, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, di prossima pubblicazione nei Mathematische Annalen [Memoria XXIX, p. 332; N.d.R.]. Veramente quando le D_1 , D_2 abbiano il grado virtuale nullo, si può soltanto affermare che appartengono ad uno stesso sistema algebrico irriducibile le curve $L + \lambda D_1$, $L + \lambda D_2$, ove L è una curva conveniente; ma ciò non pregiudica affatto le deduzioni successive.

12. Dedurremo ora dal Teorema IV dimostrato al n. 9, la proposizione che segue:

Se delle due curve D_1 , D_2 *di cui si parla nell'enunciato del Teorema IV, l'una,* D_1, *è fissa, e l'altra si può far tendere con continuità a* D_1, *senza che le condizioni là enunciate cessino di esser soddisfatte, risulta*

$$|D_1| = |D_2| .$$

Infatti i multipli d dei gruppi (AD_1) , (AD_2) segati dalle D_1 , D_2 sopra una curva A, fissata entro ad un fascio lineare, in forza del Teorema IV sono tra loro equivalenti, perché staccati dalle curve equivalenti dD_1 , dD_2.

Se, quindi, denotiamo con u un integrale abeliano *qualunque*, di 1ª specie, disteso sulla A e con $(x_1' , x_2' , \cdots , x_m')$, $(x_1'' , x_2'' , \cdots , x_m'')$ i punti dei gruppi (AD_1) , (AD_2), avremo:

$$d[u(x_1') + \cdots + u(x_m')] \equiv d[u(x_1'') + \cdots + u(x_m'')] ,$$

cioè:

$$d\left[\sum_{j=1}^{m} u(x_j') - \sum_{j=1}^{m} u(x_j'')\right] \equiv 0 . \tag{25}$$

Ora, prendendo come valori di u nei punti del gruppo (AD_1) quelli che, col tendere di D_2 a D_1, derivano per continuità dai valori di u nei punti del gruppo (AD_2), la differenza tra le somme $\sum u(x_j')$, $\sum u(x_j'')$ tende a zero col tendere di D_2 a D_1; e quindi risulta tendente a zero anche il 1º membro della relazione (25). Ma poiché questo 1º membro si deve esprimere mediante una combinazione lineare a coefficienti interi dei periodi di u, ne deriva che i coefficienti di questa combinazione lineare son rigorosamente nulli, e quindi che è nulla la differenza tra le due somme suddette.

Da ciò, in virtù dell'ordinario teorema d'Abel, segue:

$$(AD_1) \equiv (AD_2) \quad (27) ;$$

e quindi, mediante l'applicazione del Teorema VI contenuto nella mia Memoria citata « *Il teorema d'Abel*, etc. »:

$$D_1 \equiv D_2 .$$

(27) Il ragionamento esposto conduce alla seguente proprietà di geometria sopra una curva: *Se sopra una curva irriducibile si ha una serie continua di gruppi di punti, tale che i multipli secondo d dei gruppi di questa serie appartengano ad una serie lineare, allora la serie stessa appartiene ad una serie lineare.* – E da ciò, mediante l'applicazione del teorema dimostrato al n. 6 della mia Memoria sul teorema d'Abel, segue che: *Se sopra una superficie irriducibile si ha una serie continua di curve, tale che i multipli secondo d delle curve della serie sieno contenute totalmente in un sistema lineare, allora la serie stessa è contenuta totalmente in un sistema lineare.*

Dalla proposizione dimostrata discende come corollario immediato la seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema continuo di curve D sopra una superficie F, sia contenuto totalmente entro un sistema lineare, è che la somma dei valori di ogni integrale di 1ª specie della F, nei punti comuni ad una D e ad una curva C, FISSATA ENTRO AD UN SISTEMA CONTINUO DI GRADO > 0, *resti costante al variare continuo della D.*

Questo teorema differisce dal Teorema VII della mia Memoria più volte citata sul teorema d'Abel, solo pel fatto che la curva C che là si considerava (e che si chiamava A) doveva supporsi scelta entro ad un fascio lineare; mentre qui si suppone più generalmente scelta entro ad un sistema continuo di grado > 0.

Ma ciò che è più interessante da notare, si è che, ove s'immagini acquisito, con un procedimento diverso da quello sviluppato al n. 8 della mia Memoria sul teorema d'Abel, il risultato che il numero degl'integrali di 1ª specie è la metà del numero dei loro periodi (e cioè seguendo per esempio la primitiva via del sig. Castelnuovo o quella indicata dal sig. Picard), reggono tutti gli sviluppi del presente lavoro, e quindi si giunge a dare una *nuova* dimostrazione del primo teorema d'Abel, sotto la forma che ho esposta nella Memoria precedente.

13. Prima di terminare noterò ancora il seguente corollario geometrico della proposizione ultimamente enunciata:

Se sopra una superficie F le curve di un sistema continuo S segano gruppi equivalenti sopra UNA *curva irriducibile, fissata entro ad un sistema continuo, che non sia un fascio irrazionale, il sistema S è contenuto totalmente in un sistema lineare.*

È questa un'estensione del corollario *a*) dimostrato al n. 9 della mia Memoria sul teorema d'Abel.

XXXI.

OSSERVAZIONI VARIE DI GEOMETRIA SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA E SOPRA UNA VARIETÀ

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 65_2 (1906), pp. 625–643 (*).

Ho già avuto occasione di notare altrove alcuni criterii per riconoscere l'equivalenza di curve di un sistema continuo tracciato sopra una superficie algebrica, dal semplice esame dei gruppi ch'esse segnano sopra una medesima curva C, atta a definire un sistema continuo infinito (diverso da un fascio irrazionale), che contenga totalmente la C (1).

Questi criterii si posson racchiudere nell'unico enunciato seguente:

Avendosi sulla superficie F un sistema continuo di curve (algebriche) A, appena si sappia che le curve kA (k intero positivo dato ≥ 1) segano sulla C, di cui sopra, gruppi di una stessa serie lineare, si può senz'altro concludere che le A sono tra loro equivalenti.

Dei criterii racchiusi in quest'enunciato, io ho dato dimostrazioni poggiate sull'uso degl'integrali di differenziali totali (integrali di Picard) appartenenti alla F; e specialmente sull'uso di quella proposizione che, per la sua analogia col classico teorema d'Abel, relativo agl'integrali abeliani, ho chiamato « il teorema d'Abel sulle superficie ».

Una recentissima Nota del sig. Castelnuovo (2), mi porge l'occasione di ritornare sull'argomento e di dare una semplice dimostrazione geometrica del teorema sopra enunciato.

Mi sembra opportuno di esporre tale dimostrazione, perché essa è più adatta alla natura del risultato, in quanto questo si riferisce a proprietà *algebriche* delle curve di una superficie F, e non già a proprietà *trascendenti* degl'integrali ivi distesi.

(*) Nota presentata dal Socio A. Favaro nella seduta del 22 aprile 1906.

(1) Ved. il n. 9 della mia Memoria, F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di Matematica pura ed applicata, (3) *12* (1905), pp. 55–79; nonchè il n. 13 dell'altra mia Memoria, F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *21* (1906), pp. 257–282 [Memorie XXV e XXX, pp. 296 e 363; N.d.R.].

(2) G. CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (5) *15* (1906), pp. 337–344.

La dimostrazione cui alludo, deriva dal criterio aritmetico col quale il sig. Castelnuovo è riuscito, molto ingegnosamente, a caratterizzare sopra una curva algebrica, le serie costituite da gruppi equivalenti (3).

Il teorema che ho sopra riferito, ed altri teoremi analoghi, di cui mi occupo in questa Nota, si trasportano senza difficoltà alle varietà algebriche a più dimensioni.

In particolare, mediante l'uso dei teoremi di equivalenza entro una varietà a tre dimensioni, si giunge a dimostrare che:

Avendosi sopra una varietà regolare un sistema lineare di superficie, due delle quali si taglino, fuori delle linee base, lungo una curva irriducibile, la superficie generica del sistema risulta regolare.

Per *varietà regolare* dovrà intendersi una varietà tale che ogni sistema continuo di superficie algebriche, in essa tracciato, sia contenuto totalmente entro un sistema lineare. D'una superficie regolare può darsi notoriamente una definizione analoga, considerando i sistemi continui di curve in essa tracciati.

Questo teorema è dovuto ai sigg. Castelnuovo ed Enriques, e si troverà in un loro lavoro di prossima pubblicazione negli «Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure» di Parigi (4). Anzi in questo lavoro (di cui ho avuto notizia nei miei rapporti amichevoli cogli Autori), si troverà di più dimostrato che «ad una varietà a tre dimensioni appartengono tanti integrali semplici di 1ª specie, quanti ne appartengono alla superficie generica di un sistema lineare a intersezioni variabili irriducibili, tracciato sulla varietà».

Il teorema relativo alle varietà regolari, segue da quest'ultimo, supponendo la varietà priva di integrali semplici di 1ª specie; ed è appunto in tal modo che i citati Autori pervengono al risultato; mentre qua io lo stabilisco per via geometrica.

Applicando il teorema allo spazio ordinario (assunto come varietà ambiente), si ha la proposizione:

Nello spazio la superficie generica di un sistema lineare a intersezioni variabili irriducibili, è regolare.

In questo teorema sembra si debba ricercare la chiave per giungere in modo diretto all'inattesa proprietà, da poco dimostrata dal sig. Picard (5),

(3) Tale risultato prova, ancor una volta, come nel campo algebrico le relazioni numerative possano spesso condurre a proprietà capaci di lumeggiare la struttura intima delle funzioni algebriche. Il sig. Castelnuovo, nel lavoro citato, profittando del suo criterio aritmetico, dimostra infatti la proprietà funzionale, assai riposta, da me data per via trascendente, al n. 1 della Memoria, F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di matematica, (3) *12* (1905), pp. 55–79.

(4) G. CASTELNUOVO, F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, Annales de l'Ecole normale supérieure, (3) *22* (1906), pp. 339–366.

(5) E. PICARD, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Journal fur die r. und a. Math., *129* (1905), pp. 275–286; p. 276.

circa la deficienza della serie (canonica) segata sopra una sezione piana di una superficie F, d'ordine n, dello spazio ordinario, dalle superficie d'ordine $n-3$, aggiunte ad F. Al n. 9 del presente lavoro si troveranno alcune considerazioni in proposito.

Terminando questa prefazione, rileverò ancora un teorema che ho occasione di dimostrare incidentalmente:

Sopra una superficie F, di genere aritmetico p_a, genere geometrico p_g, ogni curva i cui caratteri n (grado virtuale), π (genere virtuale), i (indice di specialità, soddisfino alla disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0 ,$$

INDIVIDUA *un sistema algebrico completo (costituito da $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari non equivalenti), cui essa appartiene totalmente.*

Questo teorema, salvo la restrizione (necessaria) data dalla disuguaglianza, estende ai sistemi algebrici, una proprietà fondamentale nella teoria dei sistemi lineari di curve.

1. Sulla superficie algebrica F consideriamo una curva irriducibile C di genere p, atta ad individuare un sistema lineare, almeno ∞^1; e diciamo A le curve di un sistema algebrico irriducibile, ∞^1, Γ, che segni sulla C una serie algebrica di gruppi tra loro equivalenti. Si tratta di provare che le A sono a due a due equivalenti.

A tal uopo suppongasi, anzitutto, che le A seghino C in punti tutti variabili e distinti, cioè che gli eventuali punti base del sistema Γ sieno esterni a C, e che inoltre C non faccia parte dell'inviluppo di Γ. Queste condizioni si citeranno più tardi come *condizioni d'indipendenza* di Γ da C.

Indichiamo con n il numero dei punti di un gruppo (AC) e con ν l'indice di Γ, cioè il numero delle A passanti per un punto generico di F (e quindi di C). Dall'ipotesi che il gruppo (AC) varii in una serie lineare, segue che il gruppo di $n\nu$ punti, costituito dalle intersezioni di C colle ν curve A che passano pel punto P di C – gruppo che contiene il punto ν–plo P – varia pure in una serie lineare.

Ciò significa che la corrispondenza simmetrica d'indice $\nu(n-1)$, che si ottiene chiamando omologhi due punti segati su C da una medesima A variabile, è dotata di valenza ν [6]; e quindi che sono $2\nu(n+p-1)$ i punti uniti della corrispondenza, cioè i contatti di C con curve A.

Se ora la C varia con continuità in un fascio lineare $|C|$, che la contenga totalmente, il numero dei contatti con curve A si conserva costante, cioè anche la serie segata da Γ sopra un'altra C del fascio fissato, ha $2\nu(n+p-1)$ punti doppi.

(6) Ved. ad esempio il § 2 della mia Memoria, F. SEVERI, *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2) *54* (1903), pp. 1–49 [Memoria XV, p. 173; N.d.R.].

In forza del criterio aritmetico del sig. Castelnuovo (7), ne segue che sopra quest'altra C le Γ segano pure gruppi equivalenti, e quindi (8) che le A sono tra loro equivalenti.

Ci restano da esaminare i casi esclusi, che cioè la C contenga alcuni punti base di Γ (sicché le A taglino C in gruppi aventi alcuni o *tutti* i punti fissi), oppure che la C faccia parte dell'inviluppo di Γ.

Questi casi si riconducono facilmente al caso generale sopra esaminato, colla seguente considerazione.

Riferiamoci ad una superficie F, priva di singolarità in un iperspazio, e conduciamo per una A forme di ordine l così elevato, che il sistema lineare $|B|$ da esse segnato su F, fuori di A, sia privo di punti base.

(7) Riporto qui l'enunciato di questo criterio: « Se sopra una curva di genere p si ha una serie algebrica irriducibile, semplicemente infinita, di gruppi di n punti, e se ν è l'indice della serie, la condizione necessaria e sufficiente affinchè questi gruppi sieno tra loro equivalenti, è che la serie possegga $2\nu(n+p-1)$ punti doppi ».

(8) Cfr. col n. 6 della mia Memoria citata, *Il teorema d'Abel...*, ove è dimostrato, con elementari considerazioni geometriche, che due curve le quali segnino gruppi equivalenti sopra le curve di un fascio lineare, sono equivalenti o differiscono per curve contenute (parzialmente o totalmente) nel fascio. Se questo è privo di curve spezzate, la 2ª alternativa resta esclusa quando le due curve abbiano lo stesso ordine, ovvero quando il fascio possegga qualche punto base. Se inoltre si tratta, come nel testo, di curve A di un sistema algebrico infinito, le quali segnino gruppi equivalenti sulle C del fascio, non è necessaria alcuna limitazione circa la natura del fascio lineare, per concludere che le A sono equivalenti.

Rileverò incidentalmente, come conseguenza della citata proposizione, una dimostrazione del *teorema fondamentale dell'aggiunzione* (dovuto ad Enriques), che mi sembra ancor più semplice di quelle date da questo Autore. Avendosi sopra una superficie F un sistema lineare $|C|\infty^r$ $(r \geq 1)$, che non contenga ∞^{r-1} curve spezzate, e sia al più dotato di punti base semplici ordinari, si posson definire come *curve* C' *aggiunte* a $|C|$, le curve che segano gruppi canonici sulla generica C. Si osserverà subito che le C' formano un sistema lineare, perché segano gruppi equivalenti sulle C di un fascio generico H (che non contiene C spezzate). Se $|D|$ è un sistema lineare analogo a $|C|$, e K un fascio generico di $|D|$, la curva T luogo dei contatti delle curve dei fasci H, K, sega su una C di H il relativo gruppo base ed il gruppo jacobiano della serie lineare staccata da K su C; cioè un gruppo equivalente a quello ivi segato da una curva $C + C' + 2D$. Onde $T \equiv C + C' + 2D$. Similmente $T \equiv D + D' + 2C$. Dunque:

$$|C' + D| = |C + D'| . \tag{1}$$

Questa relazione permette di estendere la definizione di sistema aggiunto ad un sistema lineare *qualunque* $|E|$, virtualmente privo di punti base. Si definirà come sistema $|E'|$ il sistema $|E + C' - C|$. La (1) mostra: 1°) che il sistema $|E'|$ è indipendente dalla scelta di $|C|$; 2°) che quando $|E|$ soddisfa alle condizioni poste per $|C|$, si ricade nella definizione data prima. Si passerà poi alla definizione di sistema aggiunto per un sistema $|E|$ dotato di punti base assegnati, introducendo prima le curve aggiunte, astrazion fatta dai punti base, eppoi imponendo ad esse un punto base di molteplicità virtuale $s - 1$, per ogni punto base di $|E|$, assegnato colla molteplicità s.

Il ragionamento esposto si trasporta immediatamente alle varietà algebriche superiori (cfr. col teo. IV al n. 6 di questa Nota).

Al variare di A entro Γ, il luogo del sistema variabile $|B|$, è un sistema algebrico irriducibile Σ, privo di punti base, la cui curva generica taglia C in punti tutti distinti. Anzi dall'ipotesi che i gruppi (AC) sieno equivalenti, segue pure l'equivalenza dei gruppi (BC) segati su C dalle curve di Σ.

Se, dunque, sono B_1, B_2 due generiche curve di Σ, ed S un sistema algebrico irriducibile ∞^1, giacente in Σ e contenente quelle due curve, S si troverà, rispetto a C, nelle « condizioni d'indipendenza » e quindi le B_1, B_2 risulteranno equivalenti.

Ne deriva che il sistema Σ è costituito da curve tra loro equivalenti, cioè che coincide col sistema $|B|$ di partenza; sicché ogni curva A appartiene totalmente al sistema lineare $|D - B|$, ove $|D|$ è il sistema segnato su F da tutte le forme d'ordine l.

2. Si può estendere il risultato stabilito al numero precedente, dimostrando il teorema

I) *Se le curve A di un sistema algebrico irriducibile ∞^1, Γ, tracciato sopra una superficie algebrica F, segano gruppi equivalenti sopra una curva irriducibile C, atta a determinare un sistema continuo ∞^1, che non sia un fascio irrazionale, esiste un sistema lineare che contiene totalmente le A* (9).

Diciamo Σ un sistema algebrico irriducibile ∞^1, che contenga totalmente la C, ed S il sistema lineare cui appartengono le curve H composte dai gruppi di una g^1_m, priva di elementi fissi, ma scelta del resto ad arbitrio entro all'ente Σ (10).

Escluso il caso (già trattato) che Σ sia esso stesso un fascio lineare, ed il caso che Σ sia un fascio irrazionale, la curva generica B del sistema S dovrà essere irriducibile, perché le H non hanno parti comuni, né son composte colle curve di un medesimo fascio.

Per contare quanti sono i contatti di una B con curve A, basterà ricorrere ad una particolare curva di S: per esempio ad una curva H composta mediante le curve $C_1, C_2, \cdots, C_m$ di un gruppo appartenente alla fissata g^1_m. Se ν è l'indice, p il genere *effettivo* di Σ (cioè il genere effettivo della C generica), n il numero dei punti del gruppo (AC), vi saranno, come al numero precedente, $2\nu(n + p - 1)$ curve A, tangenti a quella particolar C su cui, per ipotesi, le A segano gruppi equivalenti; e quindi altrettante A tangenti ad una qualunque curva di Σ. Sicché intanto troviamo $2m\nu(n + p - 1)$ curve A aventi *contatti proprii* colla curva composta $H = C_1 + C_2 + \cdots + C_m$.

(9) F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel...* (citata), n. 13.

(10) Che le H appartengono totalmente ad un sistema lineare, risulta da ciò che « ogni sistema *razionale* di curve sopra una superficie, è contenuto totalmente entro un sistema lineare ». Cfr. F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *10* (1896), pp. 30–35; vedi pure il n. 2 della mia Memoria, *Il teorema d'Abel...* (citata).

Ora si osservi che la curva generica B, per un noto teorema del sig. Bertini, non ha punti multipli fuori degli eventuali punti base di S; e quindi che ogni curva A, che passi per un punto multiplo di H, diverso dai punti base suddetti, col tendere di B ad H, si presenta come limite di due o più curve A propriamente tangenti alla B. Anzi se la H ha, fuori dei punti base, soltanto punti doppi nodali – al qual caso ci possiamo liberamente riferire, sostituendo ad un punto multiplo di composizione più elevata, il suo « equivalente » in punti doppi – ogni A passante per un nodo di H, esterno ai punti base, sarà limite di *due* curve A tangenti a B.

Se dunque δ è il numero complessivo dei punti doppi variabili di H (tra i quali vi sono naturalmente i punti d'intersezione variabili delle $C_1, C_2, \cdots, C_m$ a due a due), il numero delle A tangenti alla B generica, sarà uguale $2mv(n + p - 1) + 2v\delta$. Poiché il genere *effettivo* di B è espresso da

$$\bar{p} = mp + \delta - m + 1 ,$$

si conclude che una B è toccata da $2v(mn + \bar{p} - 1)$ curve A, e quindi (pel criterio di Castelnuovo) che i gruppi di mn punti segati dalle A sopra una B irriducibile, sono equivalenti; donde segue (numero precedente) che le A medesime sono tra loro equivalenti.

3. Al teorema I, dimostrato nel numero precedente, si può pure pervenire seguendo quest'altra via meno elementare, ma più breve.

Riprendiamo il sistema Σ (d'indice $v > 1$), che contiene totalmente la C, e teniamo ancora presente che, essendo per ipotesi equivalenti i gruppi (CA), vi sono $2v(n + p - 1)$ curve A tangenti alla C considerata, e quindi altrettante A tangenti ad ogni altra C del sistema Σ. Da quest'ultima affermazione, in forza del criterio di Castelnuovo, segue che le A segnano gruppi equivalenti sopra ogni curva (irriducibile) di Σ.

Fissata una C_0 di Σ, si può porre una corrispondenza algebrica tra i punti di C_0 e gli elementi (curve A) di Γ, chiamando omologhi un punto di C_0 ed una curva A, quando si appartengono. Poiché agli elementi di Γ vengono a corrispondere su C_0 gruppi di una medesima serie lineare (i gruppi sezioni di C_0 colle A), tra gli enti ∞^1 C_0 e Γ si viene ad avere una corrispondenza che è a *valenza zero* in un senso, e quindi anche nel senso opposto (11). Ciò significa che il gruppo delle v curve A, uscenti dal punto P variabile sopra C_0, si muove entro una serie lineare (d'ordine v) dell'ente Γ. E siccome, come già avemmo occasione d'osservare, curve composte da gruppi di una serie lineare dell'ente Γ, appartengono totalmente ad un sistema lineare di curve della superficie F, si conclude che l'insieme delle v curve A che escono dal

(11) Ved. il n. 6 della mia Memoria citata, *Le corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica...*; oppure il n. 2 dell'altra mia Memoria citata, *Il teorema d'Abel...*

punto P variabile su C_0, varia entro un sistema lineare T_0 appartenente ad F.

Il sistema lineare T_1 costruito similmente a partire da un'altra curva C_1 di Σ, coincide col sistema T_0, perché i due sistemi (completi) T_0 , T_1, contengono entrambi totalmente ogni curva composta dalle ν curve A uscenti da un punto (diverso dai punti base eventuali di Σ) comune alle C_0 , C_1.

Dunque il sistema Γ gode della proprietà che « la curva $A_1 + \cdots + A_\nu$ costituita dalle A passanti pel punto P variabile su F, si muove entro un sistema lineare ». Tanto basta per concludere che Γ è contenuto totalmente entro un sistema lineare [12].

Infatti, se si fa muovere P sopra una curva D, atta a definire un sistema lineare infinito, la corrispondenza che nasce su D chiamando omologhi di P i punti di ulteriore intersezione della D colle A uscenti da P, è dotata di valenza uguale a ν: onde vi sono $2\nu(m + \pi - 1)$ curve A tangenti a D (m designando il numero dei punti (AD), e π il genere della D). Da ciò segue che i gruppi (AD) sono equivalenti e quindi (n. 1) che lo sono pure le A.

Osservazione. – Nell'enunciato I entra l'ipotesi che *il sistema continuo cui appartiene la C non sia un fascio irrazionale.* Orbene, *questa restrizione è necessaria per la validità del teorema.*

Sopra una superficie F che contenga un fascio irrazionale Σ di curve C, si può infatti costruire un sistema algebrico le cui curve A seghino gruppi equivalenti sulle C, senza tuttavia che le A sieno tra loro equivalenti.

Si assuma invero su F una curva A di ordine così elevato, che essa e tutte le curve del suo ordine, tracciate su F, sieno non speciali, e che inoltre la dimensione virtuale del sistema $|A|$ sia positiva. Allora, prese due curve C_0 , C_1 di Σ, esisterà il sistema lineare $|A + C_0 - C_1|$ per qualunque scelta delle C_0 , C_1 [13]; e le curve di questo sistema taglieranno sulle C gruppi equivalenti a quelli segati da A.

Tenendo fissa la C_0 e facendo variare C_1 entro a Σ, il sistema $|A + C_0 - C_1|$ descrive un sistema algebrico (irriducibile) Γ, costituito da ∞^1 sistemi lineari *distinti*; e tuttavia le curve di Γ segnano sopra una C gruppi equivalenti.

4. Per passare dal teorema I al teorema più generale enunciato nella prefazione, occorre dimostrare il lemma seguente:

II) *Se sopra una curva algebrica C si ha una semplice infinità, algebrica e irriducibile, di gruppi di n punti, tale che i multipli secondo k di questi gruppi, sieno tra loro equivalenti, allora i gruppi stessi risultano equivalenti a due a due* [14].

(12) Cfr. col teor. c) al n. 9 della mia Memoria, *Il teorema d'Abel...*

(13) Ved. la mia Nota, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rendiconti del R. Istituto lombardo, (2) *38* (1905), pp. 859–865 [Nota XXVII, p. 325; N.d.R.].

(14) Per una dimostrazione trascendente, veggasi il n. 12 della mia Memoria, *Intorno al teorema d'Abel...*

Detta Σ la semplice infinità di gruppi, si chiamino omologhi di un punto P di C, gli ulteriori punti appartenenti ai ν (≥ 1) gruppi di Σ che escono da P.

Si ha in tal modo su C una corrispondenza simmetrica T, d'indice $\nu(n-1)$; e, per l'ipotesi che i k–pli dei gruppi di Σ appartengano ad una medesima serie lineare, si può affermare che la corrispondenza kT, multipla secondo k della T, ha la valenza $k\nu$ (15). Ne segue che la kT possiede

$$2k\nu(n-1) + 2k\nu p = 2k\nu(n+p-1)$$

punti uniti, p essendo il genere di C. D'altronde il gruppo dei punti uniti di kT non è altro che il gruppo dei punti uniti di T, contato k volte, dunque la T avrà $2\nu(n+p-1)$ punti uniti: donde segue, in virtù del criterio di Castelnuovo, che i gruppi di Σ appartengono ad una medesima serie lineare.

Osservazione. Dalla proposizione dimostrata discende, come immediato corollario, che *se fra i punti d'una curva C intercede una corrispondenza T tale che la corrispondenza kT sia a valenza kγ, la T avrà la valenza γ.*

5. Supponiamo ora di avere sulle superficie F un sistema continuo di curve algebriche A, tale che le kA segnino gruppi equivalenti sopra una curva irriducibile C, atta a determinare un sistema algebrico almeno ∞^1, diverso da un fascio irrazionale. Dico che le A sono tra loro equivalenti.

Senza introdurre restrizioni, possiamo supporre che le A sieno contenute totalmente entro un sistema algebrico di curve tutte dotate della stessa proprietà (algebrica) di cui godono le A rispetto alle C. – Allora, in forza del teorema II, si vede, anzitutto, che sono equivalenti i gruppi (AC); onde le A vengono a trovarsi nelle condizioni previste dal teorema I, e risultano perciò equivalenti.

Si perviene così al teorema

III) *Abbiasi sopra una superficie F un sistema continuo di curve algebriche A, tale che le curve kA stacchino gruppi equivalenti sopra una curva irriducibile C, atta a definire su F un sistema continuo infinito, diverso da un fascio irrazionale: allora esiste un sistema lineare che contiene totalmente le A.*

6. I teoremi I, III, come pure il teorema VI dimostrato al n. 6 della mia Memoria citata, *Il teorema d'Abel...*, si trasportano ormai, senza alcuna difficoltà, ai sistemi di superficie contenuti entro una varietà algebrica a tre dimensioni, o più in generale, ai sistemi di V_{k-1} entro una V_k algebrica.

Si ottengono in tal modo le proposizioni seguenti, che mi limito ad enunciare, appunto perché le loro dimostrazioni non offrirebbero, a questo punto, nulla di nuovo.

IV) *Se sopra una varietà algebrica V (sottintendo a tre dimensioni) si hanno due superficie algebriche A, B, che segnino curve equivalenti sopra le superficie irriducibili di un fascio Σ (razionale o no), le A, B risultano equi-*

(15) *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica...* (citata); nn. 2, 10.

valenti, ovvero differiscono per superficie contenute (parzialmente o totalmente) nel fascio.

Se il fascio Σ è razionale, e non contiene superficie spezzate, questa seconda alternativa resta esclusa, qualora esista una linea base di Σ, oppure qualora si sappia che le A , B hanno lo stesso ordine.

V) *Si abbia sopra una varietà V una superficie irriducibile F, la quale sia atta a definire un sistema continuo, almeno ∞^2, tale che una superficie del sistema infinitamente prossima ad F, stacchi ivi una curva irriducibile (fuori delle eventuali linee base del sistema): allora, se le superficie Φ di un sistema continuo, segnano sulla F curve equivalenti, esiste un sistema lineare che contiene totalmente le Φ.*

Alla stessa conclusione si può giungere anche quando si sappia che sono equivalenti le curve segate su F dalle $k\Phi$.

7. Prima di passare a dimostrare il teorema, già enunciato nella prefazione, concernente i sistemi lineari di superficie appartenenti ad una varietà regolare, è necessaria una breve disgressione.

Sopra la superficie algebrica F, di genere aritmetico p_a e di genere geometrico p_g, sia data una curva C, irriducibile o no, di grado virtuale n, genere virtuale π, indice di specialità i, e supponiamo sia soddisfatta la disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0 .$$

Allora esiste certamente un sistema algebrico completo S (costituito da $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari non equivalenti), cui la C appartiene come curva totale [16]. Si tratta di provare che la C non può appartenere totalmente ad un sistema Σ, senza che Σ sia contenuto in S.

Indichiamo con A una curva variabile in S, con B una curva variabile in Σ, ed osserviamo anzitutto che, se A è generica entro ad S, ogni sistema algebrico contenente A sta tutto nel sistema *completo* S [17].

Ciò posto, consideriamo la *curva virtuale* $A + C - B$, che ha lo stesso grado e lo stesso genere della C. Indicando con $|L|$ il sistema canonico (virtuale) di F, non spogliato dalle eventuali componenti fisse eccezionali, l'indice di specialità i' della $A + C - B$, per definizione, supera di un'unità la dimensione (≥ -1) del sistema lineare

(1) $$|L + B - A - C| \quad [18].$$

(16) Ved. la mia Nota, *Sul teorema di Riemann–Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 602–612; n. 7 [Nota XXVI, p. 317; N.d.R.].

(17) Cfr. col principio del n. 6 della mia Nota, F. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *39* (1904), pp. 371–392 [Nota XVIII, p. 234; N.d.R.].

(18) Si tenga presente il mio lavoro citato, *Sulle curve algebriche virtuali...*

Ora, quando A varia con continuità entro ad S, sino a coincidere con C, la dimensione del sistema (1) non può decrescere e quindi si ha $i' \leq d + 1$, ove d è la dimensione del sistema

$$(2) \qquad |L + B - 2C| .$$

Inoltre, quando B varia con continuità entro a Σ, neppure la dimensione di (2) può decrescere: dunque il sistema

$$(3) \qquad |L + C - 2C| = |L - C| ,$$

ha la dimensione $d' \geq d$. Ne deriva che

$$i = d' + 1 \geq d + 1 \geq i'.$$

Dall'ipotesi $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$ segue quindi *a fortiori* o a ugual ragione, la disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 - i' \geq 0 ,$$

la quale prova che esistono *curve effettive* corrispondenti al simbolo $A + C - B$, ed anzi ch'esse costituiscono un sistema lineare di dimensione $\geq n - \pi + p_a + 1 - i'$.

Tenendo fissa la curva A – scelta genericamente entro ad S – e facendo variare la B entro a Σ, il sistema lineare

$$|D| = |A + C - B|$$

descrive un sistema algebrico Σ', che, come insieme de' suoi sistemi lineari $|D|$, è birazionalmente identico al sistema Σ concepito come insieme dei $|B|$. Si osservi poi che Σ', contiene totalmente la A, poiché quando B viene a coincidere con C, $|D|$ coincide con $|A|$. D'altra parte già abbiamo notato che ogni sistema contenente la A sta in S; dunque Σ' sta in S, cioè ogni sistema lineare $|D|$ è costituito da curve di S.

Da ciò segue facilmente la conclusione. Infatti, se C_0 , C_1 son due curve qualunque di S, il sistema lineare $|A + C_0 - C_1|$ esiste effettivamente, per le ragioni analoghe a quelle già addotte per provare l'esistenza di $|A + C - B|$, e inoltre sta tutto in S, perché altrimenti col tendere di C_1 a C_0, avremmo un sistema algebrico contenente A e non appartenente ad S.

Ma dunque ogni sistema lineare $|B|$, in quanto può riguardarsi come un sistema $|A + C - D|$, ove C , D son curve di S, sta tutto in S; cioè l'intero sistema Σ appartiene ad S.

Possiamo dunque enunciare il teorema

VI) *Se tra i caratteri virtuali n , π , i di una curva C tracciata sopra una superficie algebrica F di generi p_g , p_a, sussiste la disuguaglianza*

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0 .$$

esiste uno ed un solo sistema algebrico completo, cui la C appartenga come curva totale, e questo sistema algebrico è costituito da $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari non equivalenti.

8. Sulla varietà algebrica a tre dimensioni V, appartenente ad uno spazio S_r, consideriamo un sistema lineare $|F|$ di superficie irriducibili, d'irregolarità q, le quali si seghino a due a due, fuori delle eventuali linee base del sistema, lungo curve C irriducibili.

Quando l sia abbastanza grande, le forme (ipersuperficie) d'ordine l dello S_r, taglieranno sopra ogni F un sistema lineare *non speciale e avente la dimensione virtuale positiva*: donde segue che questo sistema lineare *individuerà* su F un sistema algebrico completo (irriducibile) $\{D\}$, costituito da ∞^q sistemi lineari non equivalenti (teorema VI).

Sicché, se in V si sceglie un fascio Σ di superficie F, che si taglino, fuori delle linee base, lungo una C irriducibile, sopra ogni F di Σ, resterà fissato *razionalmente*, rispetto al parametro che individua la posizione di F entro al fascio, un sistema algebrico $\{D\}$.

Se un generico sistema lineare $|D|$, appartenente ad un $\{D\}$, contiene s volte la C, considereremo sopra la relativa F il sistema irriducibile, ben determinato, $\{A\}$, costituito dagli ∞^q sistemi lineari $|D - sC|$: cosicché un sistema generico $|A|$ non conterrà più la C; potendo però accadere il contrario per particolari sistemi $|A|$, il cui insieme denoteremo con M.

Ciò posto, indichiamo con r la dimensione del sistema $\{A\}$ relativo ad una F genericamente fissata entro a Σ, e proviamo anzitutto che le A segnano su C una serie ∞^r di gruppi di punti. Basterà a tal uopo dimostrare che un gruppo G, segato su C da una A generica, non può appartenere che ad un numero finito di curve A, esterne alla varietà M sopra definita (cioè non contenenti come parte C).

Infatti ogni parte *infinita* del sistema di tutte le A passanti per G, essendo costituita da curve B seganti su C gruppi equivalenti (che coincidono tutti in G), appartiene totalmente ad un sistema lineare (teorema I); e poiché tra le B ve ne sono di quelle che contengono come parte C (le B passanti per un punto generico di C), si conclude che il sistema lineare $|B|$ appartiene al sistema M.

Per r punti generici di C passa dunque un numero finito ν di curve A, non contenenti come parte C; e al variare della F considerata entro al fascio Σ, l'insieme L di quelle ν curve, descrive una superficie algebrica Φ, la quale sega ogni F lungo la relativa L, e passa con determinate molteplicità per le linee base di Σ.

Al variare degli r punti scelti su C, si ha in tal modo nella varietà V un sistema algebrico irriducibile ∞^r di superficie Φ, con molteplicità assegnate lungo le linee base di Σ.

Questo sistema non può esser contenuto totalmente in un sistema lineare colla stessa base, perché altrimenti sopra una F le varie L risulterebbero equivalenti, e quindi risulterebbero equivalenti anche i gruppi segati su C dalle A [19]; donde seguirebbe l'equivalenza di tutte le A (teorema I).

(19) Qui si fa uso di una proprietà, che si troverà dimostrata nel n. 10.

Chiamando *regolare* una varietà algebrica a tre dimensioni sulla quale ogni sistema continuo di superficie algebriche appartenga totalmente ad un sistema lineare (colla stessa base), il risultato ottenuto si può enunciare come segue:

VII) *Sopra una varietà regolare, la superficie generica di un sistema lineare a intersezioni variabili irriducibili, è regolare.*

Osservazione I. Nel ragionamento precedente non è neppur necessario che la curva comune a due F generiche, fuori delle linee base, sia irriducibile: basta soltanto che, se è riducibile, non sia composta colle curve di un fascio irrazionale, ma colle curve di un fascio lineare, perché allora il teorema I può riferirsi ad una parte irriducibile C della curva comune a due F.

Osservazione II. Lo spazio ordinario è una varietà regolare, perché in esso le superficie d'un dato ordine passanti con assegnate molteplicità per dati punti e linee algebriche, costituiscono un unico sistema *lineare*. Si potrà dunque applicare allo spazio il teorema VII, e si avrà la proposizione:

VIII) *Nello spazio ordinario la superficie generica di un sistema lineare a intersezioni variabili irriducibili, è regolare.*

9. Quest'ultima proposizione ha molta analogia col teorema del sig. Picard, citato nella prefazione.

Il teorema di Picard si può infatti presentare sotto la forma seguente:

« Data nello spazio una superficie irriducibile F, d'ordine n, le superficie d'ordine $\geq n-2$, aggiunte ad F, segano sopra un piano generico un sistema lineare completo (regolare) ».

Il teorema VIII si può invece enunciare così:

« Avendosi nello spazio una superficie irriducibile F, d'ordine n, se esiste un'altra superficie F' che abbia gli stessi punti multipli di F (colle stesse molteplicità), e che, fuori delle linee multiple, tagli F lungo una curva irriducibile, le superficie d'ordine $\geq n-3$, aggiunte ad F, segano sopra un piano generico un sistema completo (regolare) ».

Da questo teorema si può anzi dedurre quello di Picard, sotto l'ipotesi (eventualmente limitativa) che il sistema lineare avente per punti base assegnati, colla loro molteplicità effettiva, i punti multipli di F, e che si ottiene come somma della F e dei piani dello spazio, sia irriducibile.

Detta infatti Φ la superficie generica di questo sistema, poiché le curve comuni a due Φ, fuori delle linee fisse, sono evidentemente irriducibili, la Φ generica sarà regolare: cioè le superficie d'ordine $\geq (n+1)-3 = n-2$, aggiunte a Φ, e quindi ad F, segneranno sopra un piano generico un sistema lineare completo (regolare).

Il teorema VIII, tenuto conto dell'Osservazione I, fatta al numero precedente, ci dice che *se nello spazio si ha una superficie irregolare F, d'ordine n, priva di fasci irrazionali, non esiste nessun'altra superficie, dello stesso ordine, che abbia gli stessi punti multipli di F.*

A proposito del teorema di Picard, osserverò ancora che, dal punto di vista dell'« Analysis situs » è intuitiva la regolarità della superficie somma di una superficie irregolare F e di un piano π dello spazio, perché, se il piano è generico, deformando con continuità un ciclo lineare di F, si può ridurlo a stare sulla sezione C di F con π, e continuando la deformazione entro al piano (complesso) π, si può ridurre il ciclo ad un punto. Dunque « ogni ciclo lineare di $F + \pi$ è riducibile ad un punto ».

10. Dimostrerò infine la proprietà sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica, di cui ho fatto uso al n. 8. A tal uopo occorre premettere la seguente estensione del teorema stabilito, per via trascendente, al n. 1 della mia Memoria (citata) degli « Annali di Matematica (1905) », e, per via algebrica, al n. 2 della citata Nota lincea del sig. Castelnuovo.

Se sopra una curva algebrica C si ha un numero finito di sistemi algebrici irriducibili, semplicemente infiniti, $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_t$, costituiti rispettivamente da gruppi di $n_1, n_2, \cdots, n_t$ punti, e se, al variare di un punto x su C, l'insieme dei gruppi uscenti da x ed appartenenti a quei sistemi, si muove in una serie lineare, anche ciascuno dei sistemi Σ è contenuto totalmente in una serie lineare.

Per la dimostrazione basta riprendere, con qualche altra osservazione, il ragionamento esposto dal sig. Castelnuovo nel caso di un sol sistema.

Indicando con $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_t$ gl'indici dei sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_t$, con $d_1, d_2, \cdots, d_t$ i numeri rispettivi dei loro punti doppi, si ha [20]:

$$(1) \qquad d_i = 2\nu_i(n_i + p - 1) - \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, t),$$

ove p è il genere di C ed ε_i un intero non negativo.

Ciò premesso, diciamo T_i la corrispondenza simmetrica che nasce tra i punti di C chiamando omologhi due punti appartenenti ad uno stesso gruppo di Σ_i, e consideriamo la corrispondenza $T = T_1 + T_2 \cdots + T_t$, ottenuta associando a ciascun punto di C i suoi omologhi nelle corrispondenze $T_1, \cdots, T_t$. Dall'ipotesi che l'insieme dei gruppi di $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_t$, uscenti dal punto variabile x, si muova in una serie lineare, si deduce che la corrispondenza T ha la valenza $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_t$. Poiché inoltre essa ha l'indice $\nu_1(n_1 - 1) + \nu_2(n_2 - 1) + \cdots + \nu_t(n_t - 1)$, saranno

$$2\sum_{i=1}^{t} \nu_i(n_i - 1) + 2p\sum_{i=1}^{t} \nu_i = 2\sum_{i=1}^{t} \nu_i(n_i + p - 1)$$

i punti uniti della T [21]. Ma il gruppo di questi punti uniti è la somma dei gruppi delle coincidenze di $T_1, T_2, \cdots, T_t$, dunque

$$\sum d_i = 2\sum \nu_i(n_i + p - 1).$$

(20) G. CASTELNUOVO, *loc. cit.*, n. 1.

(21) Ved. ad esempio la mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica...*, § 2.

Tale relazione, grazie alla (1), dà:

$$\sum \varepsilon_i = 0 , \quad \text{cioè:} \quad \varepsilon_i = 0 \qquad (i = 1 , \cdots , t) .$$

In virtù del criterio aritmetico del sig. Castelnuovo, tanto basta per concludere che ogni sistema Σ è costituito da gruppi equivalenti, c.d.d.

Come corollario della proprietà dimostrata, si ricava il teorema di cui abbiamo profittato al n. 8 della presente Nota:

Avendosi sopra una curva irriducibile C un sistema algebrico Σ, ∞^r, di gruppi di n punti, tale che l'insieme dei gruppi di Σ uscenti da r punti variabili su C, si muova in una serie lineare, i gruppi del sistema dato risultano a due a due equivalenti.

La proprietà è già stata dimostrata per le serie ∞^1; sicché potremo procedere per induzione, ammettendola per le serie ∞^{r-1} (irriducibili o no).

I gruppi di Σ uscenti da un punto generico x di C, costituiscono una serie ∞^{r-1} Σ'_x (22), tale che l'insieme de' suoi gruppi passanti per $r-1$ punti generici di C, varia in una serie lineare. Pel teorema ammesso, segue da ciò che i gruppi di Σ'_x sono equivalenti tra loro.

Siccome inoltre le serie che contengono totalmente i sistemi Σ'_x ottenuti a partire da due diverse posizioni di x, hanno a comune tutti i gruppi di Σ, in numero finito o infinito, che passano per quelle due posizioni di x, così si conclude che i gruppi di Σ sono a due a due equivalenti.

(22) La serie Σ'_x relativa ad un generico x, può essere riducibile anche se la serie Σ di partenza è irriducibile. Perciò appunto si rende necessaria l'estensione alle serie riducibili del lemma da me dato nella Memoria sul teorema d'Abel.

XXXII.

UNA PROPRIETÀ DELLE FORME ALGEBRICHE PRIVE DI PUNTI MULTIPLI (*)

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *15*$_2$ (1906), pp. 691–696 (**).

Sia

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0 \tag{1}$$

una forma algebrica d'ordine l nelle variabili $x_0, \cdots, x_r$, cioè un polinomio omogeneo di grado l nelle x. Il *discriminante* della f è il risultante della eliminazione delle x tra le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0. \tag{2}$$

L'annullarsi del discriminante esprime dunque la condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni (2) abbiano soluzioni comuni (appartenenti, in virtù dell'identità di Eulero, anche alla (1)).

Si supponga che le equazioni

$$\begin{cases} f(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0 \\ \varphi_i(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, s), \tag{3}$$

ove anche le φ sono forme nelle x, ammettano ∞^{r-2} soluzioni, riguardandosi come coincidenti due soluzioni del tipo $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$, $(\varrho x_0, \varrho x_1, \cdots, \varrho x_r)$.

In generale non è possibile sostituire al sistema di equazioni (3) un sistema equivalente di due sole equazioni, come a priori lo potrebbe far supporre il fatto che *due* è il minimo numero di equazioni aventi in comune ∞^{r-2} soluzioni. Tale impossibilità generica è ben nota.

In questo lavoro io dimosterò che *quando una (almeno) delle forme f, φ_i ha il discriminante non nullo, il sistema (3) è equivalente ad un sistema di due sole equazioni. Per la validità del teorema occorre però che le equazioni contengano più di quattro variabili.*

Per evitare di dilungarmi soverchiamente, nell'enunciato che precede ho un po' allargato il significato di equivalenza tra due sistemi di equazioni

(*) Ristampato nel volume: F. SEVERI, *Memorie scelte*, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1950, pp. 397–404, con «Osservazioni complementari» in fine del lavoro, aggiunte dall'Autore in quella occasione (N.d.R.).

(**) Presentata dal Socio G. Veronese nella seduta del 2 dicembre 1906.

omogenee (ad $r+1$ variabili) con ∞^{r-2} soluzioni. Due sistemi siffatti li ho cioè riguardati come « equivalenti » quando posseggono ∞^{r-2} soluzioni comuni. Con ciò non si viene ad escludere l'esistenza di ∞^{r-3} soluzioni (al più) appartenenti ad un sistema e non all'altro.

L'enunciato però si semplifica e si determina di più col linguaggio geometrico. Assumendo $x_0, x_1, \cdots, x_r$ come coordinate omogenee di un punto in uno spazio S_r, la (1) rappresenta un'ipersuperficie o forma (quale luogo di punti). Le equazioni a discriminante non nullo rappresentano forme prive di punti multipli. Il sistema (2) sia soddisfatto dai punti di una varietà algebrica ad $r-2$ dimensioni (appartenente alla forma $f=0$).

Allora il teorema ch'io intendo dimostrare si enuncia così:

Sopra una forma algebrica V, priva di punti multipli, dello spazio S_r, ogni varietà algebrica ad $r-2$ dimensioni, è la completa intersezione di V con un'altra forma.

Di questa singolare proprietà delle forme algebriche erano già noti due casi speciali; e cioè il caso delle quadriche di S_r, studiato dal Klein, ed il caso della varietà cubica dello spazio S_4, studiato dal Fano [1]. Ma questi casi non lasciavano affatto supporre che si trattasse di una proprietà comune a tutte le forme prive di punti multipli, perché le conclusioni ad essi relative derivavano da speciali proprietà delle varietà considerate, e d'altra parte un'ovvia osservazione mostrava come il teorema non fosse vero per le superficie dello spazio ordinario.

Però il Noether nella sua Memoria premiata col premio Steiner, aveva dimostrato che « le curve appartenenti ad una superficie generale d'ordine n son tutte intersezioni complete »; o, più precisamente, che le superficie d'ordine n sulle quali esistono altre curve, oltre alle intersezioni complete, formano nello spazio una varietà meno ampia di quella costituita da tutte le superficie d'ordine n [2].

Il teorema contenuto in questa Nota può dunque riguardarsi anche come un'estensione del teorema di Noether; soltanto, per $r>3$, il teorema è ancor più espressivo.

1. Cominciamo dal caso $r=4$. Sopra la forma V, d'ordine l, e priva di punti multipli nello spazio S_4, consideriamo una superficie F, irriducibile e priva anch'essa di punti multipli. Diciamo n l'ordine di F, a il rango della sua sezione iperpiana (numero delle tangenti di questa sezione appoggiate ad una retta del suo spazio), j il numero dei piani tangenti ad F e passanti per un punto dello S_4 (numero dei *pinch-points* della proiezione di F sullo S_3).

(1) F. KLEIN, *Ueber einen liniengeometrische Satz*, Mathematische Annalen, *22* (1883), pp. 234–241. G. FANO, *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *39* (1904), pp. 597–613.

(2) *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*, Abhandlungen der Berliner Akad., 1882, §§ 11, 12.

Essendo la F priva di punti multipli, e quindi in particolare di punti doppi impropri, tra i caratteri n, a, j avremo la relazione

$$n(n-1) = a + j \quad (3). \tag{4}$$

Ma tra questi caratteri havvi un'altra relazione. Invero, nella mia Memoria *Sulle intersezioni delle varietà* (citata a piè di pagina) ho dimostrato che una forma dello S_4, obbligata a passare per una superficie, viene di conseguenza ad avere come punti doppi gli eventuali punti doppi impropri della superficie, e generalmente altri punti doppi in punti semplici di questa. Ho anche assegnato il numero di questi punti doppi. Nel caso attuale si ottiene appunto la relazione

$$nl(l-2) - n^2 - al + 2(n + a + j) = 0, \tag{5}$$

esprimente che la forma V non ha punti doppi in punti (semplici) di F (4). Eliminando $a + j$ tra le (4), (5), si ha

$$nl(l-2) + n^2 = al. \tag{6}$$

Pongasi $n = ml - \nu$ $(m \geq 1,\ 0 \leq \nu < l)$. Allora la (6) diviene:

$$ml^2(l-2) - \nu l(l-2) + m^2 l^2 + \nu^2 - 2mlv = al. \tag{7}$$

Poiché la sezione spaziale di F è una curva tracciata sopra una superficie d'ordine l priva di punti multipli (la sezione spaziale di V), un bel teorema di Valentiner e Nöther ci dice che il genere p di questa curva soddisfa alla disuguaglianza

$$p \leq \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + \frac{1}{2}(ml - 2\nu)(m + l - 4) \quad (5).$$

Se ne deduce una disuguaglianza cui soddisfa il rango $a\ (= 2n + 2p - 2)$, e questa disuguaglianza, confrontata colla (7), dopo facili riduzioni, porge:

$$\nu(l - \nu)(l - 1) \leq 0. \tag{8}$$

Essendo $l > \nu$, se fosse $\nu > 0$, cioè $\nu \geq 1$, oltre ai fattori ν, $l - \nu$, risulterebbe positivo anche il fattore $l - 1$, e quindi la (8) non resterebbe soddisfatta. Conviene pertanto concludere che $\nu = 0$, ossia che $n = ml$.

Dalla (6) ricavasi allora

$$a = ml(m + l - 2), \quad \text{e quindi:} \quad p = \frac{1}{2}ml(m + l - 4) + 1. \tag{9}$$

(3) Ved. il n. 2 della Nota VI [queste «Opere», p. 14; N.d.R.]. Ved. pure il n. 3 della Memoria VIII [queste «Opere», p. 33; N.d.R.], ove trovansi considerati i punti multipli impropri di una varietà qualunque.

(4) La (5) deriva dalle formola generale data alla fine del n. 7 della Memoria VIII, sopra cit. Ved. anche la fine del n. 21, ove trovasi la formola particolare che serve al nostro caso.

(5) *Zur Grundlegung der Th. d. alg. Raumk.* ved. nota (2).

Nella citata Memoria di Noether si trova dimostrato, come caso particolare del teorema sulle curve di massimo genere appartenenti ad una superficie di dato ordine, che « una curva d'ordine ml e genere p dato dalla (9), la quale sia tracciata sopra una superficie d'ordine l, priva di punti multipli, è intersezione completa di questa superficie con un'altra d'ordine m ».

Dunque *la sezione iperpiana della nostra superficie F è intersezione completa della sezione iperpiana di V con una superficie d'ordine m.*

2. Dalla proprietà dimostrata trarremo che F è essa stessa intersezione completa di V con una forma d'ordine m, mediante considerazioni di geometria sopra una superficie e sopra una varietà.

Si osservi in primo luogo che curve C', aggiunte alla sezione iperpiana generica C della F, son segnate su F dalle forme d'ordine $l + m - 4$ dello S_4. Invero, sulla C, priva di punti multipli e intersezione completa di due superficie di ordini l, m, la serie canonica completa è segata dalle superficie d'ordine $l + m - 4$ (Noether). Sicché sulla F le forme di ordine $l + m - 5$ dello S_4 segano un sistema lineare di curve canoniche $C' - C$ (che a priori non possiamo dir completo).

Entro alla V dicasi ora $|F'|$ il sistema lineare aggiunto ad $|F|$, cioè il sistema somma di $|F|$ e del sistema canonico $|L|$ di V, che è ivi segato da tutte le forme d'ordine $l - 5$ (Noether). S'indichi inoltre con $|G|$ il sistema delle sezioni iperpiane di V, sicché $|(l + m - 5)G|$ indicherà il sistema staccato su V dalle forme d'ordine $l + m - 5$.

Poiché le superficie F' ed $(l + m - 5)G$ staccano su F curve (canoniche) equivalenti, saranno pure equivalenti i gruppi segnati da quelle superficie sopra una sezione iperpiana di F, cioè sopra una C. Ora, fissata una generica superficie G – sezione iperpiana di V – l'intersezione C di F e G, per la conclusione del numero precedente, individua su G il sistema lineare completo ivi segato dalle superficie d'ordine m; dunque le superficie F' ed $(l + m - 5)G$ si trovano nella condizione di staccare gruppi equivalenti sopra una curva irriducibile C di G, variabile in un sistema continuo di grado > 0. Tanto basta per concludere che le $F', (l + m - 5)G$ segano curve equivalenti sopra G [6], cioè sulla sezione iperpiana generica di V. Ne deriva che

$$F' \equiv (l + m - 5)G \quad [7].$$

Essendo inoltre

$$F' \equiv F + L \equiv F + (l - 5)G,$$

verrà:

$$F + (l - 5)G \equiv (l + m - 5)G, \qquad \text{cioè:} \quad F = mG.$$

(6) Ved. il teor. I della Nota XXXI [queste « Opere », p. 390; N.d.R.].
(7) *Ibidem*, teor. IV.

In parole: La superficie F appartiene al sistema lineare completo individuato da una superficie mG. E siccome le forme d'ordine m segnano su V un sistema lineare *completo* (8), si conclude che F è intersezione completa di V con una forma d'ordine m, c.d.d.

3. Con ciò il teorema resta stabilito per ogni superficie di V, la quale sia priva di punti multipli. Passeremo ora ad estenderlo a una superficie (irriducibile) dotata di singolarità qualunque (necessariamente proprie).

Supporremo dunque in quel che segue che F designi una superficie d'ordine n con singolarità arbitrarie. Dico anzitutto che « le forme d'ordine n passanti per F segnano altrove su V un sistema lineare $|\Phi|$ privo di punti base ».

Per brevità designeremo con Γ_X il cono che proietta F da un punto X dello S_4 (anche situato su F). È chiaro allora, in primo luogo, che un punto P, esterno ad F, non può esser base per $|\Phi|$, perché il cono Γ_Q relativo ad un punto Q, esterno a Γ_P, non passa per P, e quindi esso segna su V una Φ non passante per P.

Sia ora P un punto s–plo di F ($s \geq 1$). Il cono d'ordine s tangente ad F in P starà tutto nello S_3, π, tangente a V in P. Ciò premesso, consideriamo il cono Γ_Q relativo ad un punto Q esterno a π, ed osserviamo che la retta QP è luogo di punti s–pli per Γ_Q, ma che questo cono non tocca lungo QP lo spazio π. Ne deriva che l'intersezione $F + \Phi$ di Γ_Q colla V ha in P un punto di molteplicità s e *non maggiore*, e quindi che Φ non passa per P. È dunque vero che $|\Phi|$ non ha punti base né su F né fuori di F.

Da ciò segue:

a) Che una Φ generica è priva di punti multipli. Infatti su V la superficie generica d'un sistema lineare non può avere punti multipli fuori dei punti base, e d'altronde $|\Phi|$ è privo di punti base (9).

b) Che una Φ generica è irriducibile. Infatti se una Φ generica fosse spezzata, le sue parti, essendo immerse nello S_4, avrebbero necessariamente dei punti comuni, che riuscirebbero multipli per Φ, contrariamente all'affermazione *a*).

Ma allora alla superficie Φ, d'ordine $n(l-1)$, possiamo riferire la conclusione del n. 2. Dovrà quindi essere $n(l-1)$ multiplo di l, cioè $n = ml$, e

$$\Phi \equiv m(l-1)G .$$

E poiché $F + \Phi \equiv mlG$, risulta ancora $F \equiv mG$. Donde si trae che F è intersezione completa di V con una forma d'ordine m, sempre per la ragione che le forme di un dato ordine segnano su V un sistema completo.

Il teorema è così dimostrato per $r = 4$.

(8) Ved. per esempio la Nota XIII [queste « Opere », p. 132; N.d.R.].

(9) Cfr. il n. 1 della Nota XXVIII [queste « Opere », p. 331; N.d.R.].

4. *L'estensione ad r qualunque si ottiene immediatamente* per induzione seguendo passo passo la dimostrazione esposta nei nn. 2, 3.

Suppongasi infatti di avere nello S_r una forma V d'ordine l priva di punti multipli, ed ivi una varietà F ad $r-2$ dimensioni, priva di punti multipli e d'ordine n. Ammesso il teorema per le forme dello S_{r-1}, si ha in primo luogo che la sezione iperpiana di F è completa intersezione della sezione iperpiana di V con una forma d'ordine $m = n/l$. Colle considerazioni dei sistemi aggiunti e canonici, si giunge, come al n. 2, alla conclusione che $F = mG$, G essendo una sezione iperpiana di V; e da ciò segue, al solito, che F è intersezione completa.

Si dimostra poi il teorema anche per varietà F dotate di singolarità qualunque, estendendo il ragionamento del n. 3.

OSSERVAZIONI COMPLEMENTARI

In collegamento con la Memoria XXXII [queste «Opere»; N.d.R.] deve anzitutto ricordarsi un lavoro di Fano (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1909) nel quale si prova che una V_k di S_r intersezione completa di $r-k$ forme generiche ($k \geq 2$) non contiene che M_{k-1}, intersezioni complete (salvo il caso in cui, essendo $k = 2$, si tratta d'una superficie razionale). Questo risultato non ha però lo stesso grado di precisione di quello della Memoria XXXII, perché la genericità non resta in esso definita dalla sola condizione che V_k sia irriducibile, priva di punti multipli.

Il teorema dimostrato da Fano è dunque del tipo di quello dato da Noether per le curve di una superficie d'ordine > 3 di S_3, alla quale appunto si richiede di essere generica, non bastando (e gli esempi lo dimostrano) l'ipotesi che non abbia punti multipli. Nella dimostrazione Fano ricorre anche alla teoria dei periodi degl'integrali doppi sopra una superficie; ne deriva un'effettiva dimostrazione del teorema che Noether aveva dato sulla base di un computo non esauriente di costanti (***). Ma, siccome la dimostrazione poggia sull'inesistenza di integrali doppi di 1ª specie senza periodi, proprietà vera (Hodge), che però a quel tempo non era ancora stabilita, così la dimostrazione di Fano restava subordinata a tale supposizione. In S. Lefschetz (*On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties*, Trans. of the Am. Math. Society, *22* (1921), pp. 327–482) trovasi invece una completa dimostrazione topologico-trascendente, prescindente dalla predetta supposizione. Il risultato di Lefschetz è anzi più espressivo, perché afferma che sopra una V_k ($k > 2$) irriducibile, priva di punti multipli, completa intersezione di $r-k$ forme di S_r, ogni M_{k-1} è intersezione completa. Per $k = 2$ il risultato di Lefschetz è invece identico a quello di Fano e vale fino ad $r = 3$ (Noether).

Estensioni del teorema alle forme di S_r ($r > 4$) con non più di ∞^{r-5} punti multipli (esse non contengono che M_{r-1} intersezioni complete) e alle forme di S_r ($r \geq 4$) con non più di ∞^{r-4} punti multipli (esse contengono soltanto M_{r-1} intersezini complete, quando però siano *generiche*) trovasi in una Memoria di molto posteriore dell'Autore (1946), che sarà pubblicata in un successivo volume.

(***) Un'altra dimostrazione del teorema di Noether, poggiata sulla variazione continua della superficie fino a farla divenire un monoide, trovasi in A. FRANCHETTA, *Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine* $n \geq 4$ *dell'* S_3, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (8) *32* (1947), pp. 71–78), discepolo di F. Severi.

XXXIII.

INTORNO ALLE SUPERFICIE IPERELLITTICHE

In collab. con F. ENRIQUES, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, *16*$_1$ (1907), pp. 443–453.

1. Una superficie algebrica

$$F(x, y, z) = 0$$

si dice *iperellittica*, quando ammette una rappresentazione parametrica per mezzo di funzioni abeliane quadruplamente periodiche, di due parametri:

$$x = f_1(u, v) \qquad y = f_2(u, v) \qquad z = f_3(u, v).$$

Ad ogni punto (x, y, z) corrisponderanno in generale $r \geq 1$ *coppie* u, v *incongrue rispetto ai periodi primitivi* delle f_1, f_2, f_3; diremo in tal caso che F è una *superficie iperellittica di rango r*.

Le superficie razionali e le rigate ellittiche si possono considerare sia come degenerazioni di superficie iperellittiche di rango 1, sia come superficie iperellittiche di rango $r > 1$.

Ma, nel seguito, parlando di superficie iperellittiche, escluderemo sempre codeste due classi di superficie.

Come è noto, i periodi primitivi delle funzioni f_1, f_2, f_3 si possono ridurre alla *forma normale*

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1/\delta & h & g' \end{matrix},$$

ove δ è un intero positivo.

Quantunque questa riduzione si effettui (con sostituzioni lineari su u, v e sui periodi) in più modi diversi, l'intero positivo δ che qui figura, risulta sempre lo stesso; esso è un carattere del sistema delle funzioni f_1, f_2, f_3. Lo diremo il *divisore* di queste funzioni, ed F si chiamerà una *superficie iperellittica di divisore* δ.

2. Le superficie iperellittiche di rango 1 (talvolta considerate esclusivamente sotto il nome di « superficie iperellittiche ») hanno formato oggetto di classici lavori da parte del sig. Picard e del sig. Humbert. Il primo di questi autori le ha studiate come superficie dotate di un gruppo permutabile ∞^2 di trasformazioni birazionali in se stesse; perciò appunto tali superficie hanno ricevuto il nome di *superficie di Picard*.

Le superficie di Picard corrispondenti a un divisore δ qualsiasi, si possono costruire geometricamente nel modo seguente:

Si consideri la *superficie di Jacobi* F che rappresenta le coppie di punti di una curva di genere 2; questa è la più generale superficie di Picard di divisore 1.

Ora F ammette un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè (trasformazioni di 2ª specie), fra cui vi è un numero finito di trasformazioni cicliche d'ordine δ. Ebbene, una trasformazione siffatta genera su F un'involuzione I_δ d'ordine δ; una qualsiasi superficie F_δ, i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi I_δ, è una superficie di Picard di divisore δ.

Tale costruzione fornisce tutte le superficie di Picard di divisore qualsiasi, e conduce subito ad illustrarne le note proprietà, sotto l'aspetto geometrico.

Essa conduce anche a proprietà nuove, fra cui sembra particolarmente importante la seguente (che tuttavia esige una dimostrazione un po' delicata):

Sopra una superficie di Picard a moduli generali, di divisore δ, *tutti i sistemi continui di curve si ottengono per moltiplicazione da un sistema continuo* $\infty^{\delta+1}\{C_\delta\}$ *di genere* $\delta+1$, *e grado* 2δ.

Ne segue in particolare che:

Una superficie di Picard di divisore $\delta > 3$, può trasformarsi in una superficie d'ordine 2δ senza curve eccezionali, ma non in una superficie senza curve eccezionali d'ordine $< 2\delta$.

Per $\delta = 3, 2$ si hanno superficie di Picard, senza curve eccezionali, d'ordine minimo 24 e 16 rispettivamente; per $\delta = 1$ l'ordine minimo di una superficie di Jacobi a moduli generali e senza curve eccezionali è 18, perché la superficie d'ordine 8 le cui sezioni piane appartengono ad un sistema $|2C_1|$, si riduce ad una superficie del 4° ordine (di Kummer) contata due volte.

Le condizioni affinché una superficie sia iperellittica di rango 1, sono state date da un teorema del sig. Picard. Uno di noi (Enriques) ha fatto vedere ch'esse possono tradursi come segue:

Affinché una superficie sia iperellittica di rango 1, *occorre e basta che i suoi generi* (il genere numerico p_a, il genere geometrico p_g e il quadrigenere P_4) *abbiano i valori*

$$p_a = -1 \qquad p_g = P_4 = 1 .$$

Riesce quindi interessante riconoscere che tali condizioni determinano infinite famiglie di superficie, dipendenti da un intero arbitrario (il divisore δ) e da tre parametri (moduli).

3. Lo studio delle superficie iperellittiche di rango $r > 1$, si riattacca a quello delle superficie di Picard, o in particolare delle superficie di Jacobi, mercé l'osservazione seguente:

Ogni superficie iperellittica di rango r e divisore δ corrisponde ad una involuzione d'ordine r sopra una superficie di Picard F_δ, e quindi ad una involuzione d'ordine $r\delta$ sopra una superficie di Jacobi.

Consideriamo l'involuzione I_r su F_δ che corrisponde ad una superficie iperellittica di rango r. Sussistono le due proprietà seguenti:

1) la I_r ha un numero finito (≥ 0) di coincidenze, se (come si è avvertito) si escludono dal novero delle superficie iperellittiche le superficie razionali e le rigate ellittiche;

2) la I_r non è composta coi gruppi di una involuzione I_d, generata da una trasformazione ciclica di 2ª specie di F_δ.

Orbene, da queste proprietà si trae che « l'involuzione I_r è generata da r trasformazioni birazionali della F_δ in se stessa, costituenti un gruppo finito d'ordine r ».

Si ha dunque il *teorema fondamentale*:

Ogni superficie iperellittica di rango $r > 1$ e divisore δ, corrisponde ad una involuzione generata da un gruppo di r trasformazioni birazionali sopra una superficie di Picard F_δ.

Cioè:

Sia $F(xyz) = 0$ una superficie iperellittica, ed essendo x, y, z funzioni abeliane di due parametri u, v, accada che ad ogni gruppo di valori di x, y, z corrispondano r coppie (u,v) incongrue rispetto ai periodi primitivi di queste funzioni:

$$(u_1 v_1)\ (u_2 v_2) \cdots (u_r v_r)\ ;$$

allora tali coppie saranno legate da $r - 1$ sostituzioni lineari

$$\left.\begin{aligned} u_i &= a_i u_1 + b_i v_1 \\ v_i &= c_i u_1 + d_i v_1 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 2, 3, \cdots, r),$$

a coefficienti indipendenti da (x,y,z).

Queste sostituzioni formano gruppo insieme alla sostituzione identica, e le costanti a_i, b_i, c_i, d_i si possono esprimere mediante combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi.

La dimostrazione di questo teorema fondamentale è assai delicata, soprattutto perché *non si può escludere a priori che l'involuzione I_r possegga dei punti fondamentali* appartenenti ad ∞^1 gruppi dell'involuzione. Indicheremo qui le grandi linee del procedimento dimostrativo che abbiamo seguito, e a tale scopo potremo riferirci al caso più semplice in cui la I_r è data sopra una superficie di Jacobi F.

Consideriamo su questa un sistema $\{C_1\} = \{C\}$ costituito da ∞^2 curve di genere due senza punti doppi, e costruiamo la curva K coniugata ad una generica C rispetto ad I_r, cioè il luogo dei gruppi di $r - 1$ punti coniugati ai punti di C.

La dimostrazione del nostro teorema fondamentale si riconduce a stabilire che la K si compone di $r - 1$ curve birazionalmente identiche a C. A priori invece si potrebbe supporre K irriducibile, o spezzata in meno di $r - 1$ componenti.

Limitiamoci all'ipotesi che K sia irriducibile, ed indichiamo la via che da codesta ipotesi fa scaturire un assurdo, in relazione alle proprietà 1) 2) di I_r.

Se il sistema $\{K\}$ che viene descritto dalla curva K mentre C descrive $\{C\}$, è costituito da curve generalmente irriducibili, si possono fare due supposizioni:

a) questo sistema è trasformato in se medesimo dalle ∞^2 trasformazioni di 2ª specie di F;

b) esiste un sistema $\{K\}$, più ampio di $\{K\}$, che contiene infinite curve birazionalmente identiche ad ogni K.

Ma la supposizione *a*) conduce a contraddire la proprietà 2), che innanzi abbiamo detto valere per I_r.

La supposizione *b*) porta a questo, che esiste una serie continua di curve $\overline{K}$ avente per limite una K. Costruiamo la curva coniugata ad una generica $\overline{K}$ della serie, rispetto ad I_r; sia L questa curva. Mentre $\overline{K}$ tende a K, L deve tendere alla curva $C + (r-2)K$. Ora mediante considerazioni di *Analysis situs*, si deduce di qui che L non può essere una curva irriducibile (cioè una superficie di Riemann *connessa*), perché altrimenti qualcuno dei punti comuni a C, K, risulterebbe un punto di coincidenza di I_r, mentre per la proprietà 1) una C generica non contiene di tali punti. Un esame più approfondito mostra che L deve spezzarsi precisamente in una C ed in un'altra curva; ma allora $\overline{K}$ deve essere curva coniugata di una C, cioè appartenere a $\{K\}$, e si ricade nell'ipotesi *a*).

4. Il teorema fondamentale sopra espresso permette virtualmente di determinare tutte le famiglie birazionalmente distinte di superficie iperellittiche di rango $r > 1$. Queste superficie possono essere regolari o irregolari.

Le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ sono superficie ellittiche, e, come facilmente si prova, contengono, oltreché un fascio razionale di curve ellittiche, anche un fascio ellittico di curve parimente ellittiche.

Il rango delle superficie iperellittiche predette può valere $r = 2, 3, 4, 6$, giacché esse si presentano come immagini di involuzioni cicliche d'ordine 2, 3, 4, 6. Si ottengono i tipi più semplici partendo da una superficie di Jacobi con due fasci di curve ellittiche unisecantisi (1) o dalla superficie di Jacobi che corrisponde ad una curva di genere 2 possedente un'involuzione singolare di 2º ordine.

(1) La possibilità di uno di questi tipi, e precisamente di quello che corrisponde al gruppo generato da una sostituzione del tipo $\begin{cases} u' = u + 1/3 \\ v' = e^{\frac{2\pi i}{3}} v \end{cases}$, ci fu annunciata dai signori Bagnera e De Franchis prima che la nostra analisi si volgesse alle superficie iperellittiche irregolari.

A proposito delle superficie ellittiche contenenti due fasci di curve ellittiche si noti che esse si possono classificare, secondo i risultati di Enriques [2], in 4 famiglie alle quali appartengono appunto i 4 tipi suindicati.

I plurigeneri di codeste famiglie, secondo le formule di Enriques (§§ 8, 9) sono rispettivamente:

1) $p_a = -1$, $p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$

2) $p_a = -1$, $p_g = P_8 = 0$, $P_3 = 1$

3) $p_a = -1$, $p_g = P_8 = P_{10} = 0$, $P_4 = 1$

4) $p_a = -1$, $p_g = P_4 = P_{14} = 0$, $P_6 = 1$.

Questi valori dei plurigeneri caratterizzano le superficie ellittiche possedenti due fasci di curve ellittiche.

Infatti, se una superficie ellittica contiene, accanto ad un fascio razionale di curve ellittiche, un fascio ellittico di curve di *genere maggiore d'uno*, si possono presentare 4 casi, corrispondentemente ai quali i generi hanno i valori indicati per 4 famiglie suddette, eccezione fatta pei generi P_6 , P_8 , P_{10} , P_{14} che hanno valori >1. Come si possa dedurre di qui un modo di *definire mediante caratteri le superficie iperellittiche irregolari*, è una questione su cui ci proponiamo di ritornare in un'altra Nota.

5. Le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ (superficie ellittiche) dipendono per la prima famiglia da 2 moduli e per le altre da un modulo. Esse sono dunque superficie iperellittiche a *moduli particolari*. Questo fatto rientra d'altronde nel seguente teorema, che consegue immediatamente dal teorema fondamentale del n. 3:

Le superficie iperellittiche di rango $r > 1$ a moduli generali, sono superficie regolari di rango 2, e di generi $p_a = p_g = P_2 = \cdots = 1$.

Esse corrispondono alle involuzioni generate sopra superficie di Picard, da trasformazioni di 1ª specie:

$$u + u' = \text{cost} , \qquad v + v' = \text{cost} .$$

È facile costruire i modelli di tali superficie per un divisore δ qualsiasi. Si ottengono superficie di ordine 4δ in uno spazio $S_{2\delta+1}$, dotate di 16 punti doppi conici e di 16 iperpiani tangenti lungo curve razionali normali d'ordine 2δ, formanti una ben definita configurazione. Per $\delta = 1$ si ha, com'è noto, *la superficie di Kummer*; per $\delta = 2 , 3$ si ottengono superficie di cui recentemente i sig.ri Traynard e Remy hanno considerato le proiezioni nello spazio ordinario, in varie note pubblicate nei Comptes Rendus dal 1904 in poi.

(2) *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, (1905).

6. Si tratta ora di determinare le superficie iperellittiche regolari di rango $r > 2$, le quali esistono soltanto per particolari valori dei moduli. Perciò occorre stabilire una completa classificazione delle superficie di Picard che ammettono trasformazioni birazionali (*singolari*) in se stesse all'infuori di quelle *ordinarie* di 1ª e 2ª specie, e classificare inoltre le diverse involuzioni che possono ottenersi sopra una medesima superficie di Picard, in corrispondenza a gruppi isomorfi di trasformazioni.

Una superficie di Picard può ammettere due specie diverse di trasformazioni singolari: *trasformazioni principali o di Hermite* e *trasformazioni di Humbert*. (Humbert riserva a queste soltanto il nome di « trasformazioni singolari »).

Riferiamoci, per semplicità di discorso, al caso delle superficie di Jacobi, essendo facile passare di qua al caso del divisore $\delta > 1$. Le trasformazioni di Hermite sono quelle che nascono da una *trasformazione birazionale della curva di genere due*, di cui la superficie di Jacobi rappresenta le coppie.

Si possono avere superficie iperellittiche di rango $r > 2$ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di Jacobi (o di Picard) da gruppi di Hermite o da gruppi di Humbert. I due casi si distinguono come segue: *le superficie iperellittiche corrispondenti ai gruppi di Hermite ammettono una rappresentazione parametrica* PROPRIA *per mezzo di funzioni* Θ; cioè una rappresentazione.

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1}$$

tale che le equazioni (1) per valori dati delle coordinate omogenee x_i di un punto variabile sopra una di queste superficie, hanno in comune un *numero finito* di soluzioni (u, v) incongrue rispetto ai periodi.

All'opposto le superficie provenienti da gruppi di Humbert ammettono *rappresentazioni improprie* per mezzo delle Θ; cioè le equazioni (1) relative a queste superficie, hanno in comune infinite soluzioni fisse e un numero finito di soluzioni variabili colle x_i.

Una rappresentazione parametrica propria per una superficie iperellittica corrispondente ad un gruppo di Humbert, si ottiene mediante funzioni intermediarie.

Ciò posto, noi ci proponiamo di classificare le superficie iperellittiche di rango $r > 2$, che ammettono una rappresentazione parametrica propria mediante funzioni Θ. Ci riferiremo per semplicità al caso $\delta = 1$. Abbiamo dunque da considerare le superficie di Jacobi, che ammettono trasformazioni singolari principali in sè stesse. Ed occorre distinguere due casi: quello di una superficie di Jacobi corrispondente ad una curva di genere due irriducibile, ed il caso particolare della superficie con due fasci di curve ellittiche unisecantisi.

Ci limiteremo in questa Nota al 1° caso, rimandando la trattazione del 2° caso ad una ulteriore comunicazione.

Le superficie di Jacobi che ammettono trasformazioni singolari principali in sè stesse, risultano note dall'analisi di Bolza delle curve di genere due con trasformazioni in sè [3]. Ma alcuni fra i gruppi di Bolza conducono a superficie razionali o a rigate ellittiche, anziché a vere superficie iperellittiche.

Sia data una superficie di Jacobi F che ammetta un gruppo di trasformazioni d'Hermite G_r d'ordine r, generante una involuzione I_r, e (in corrispondenza all'ipotesi che I_r sia di divisore 1) si supponga che G_r non contenga alcuna trasformazione ciclica di 2ª specie.

Si può costruire una superficie Φ immagine di I_r, col procedimento che segue:

Si consideri sopra F un sistema $\infty^2 \{C\} (= \{C_1\})$ di curve di genere due senza punti doppi (n. 2); le trasformazioni hermitiane di G_r *mutano questo sistema in sè stesso*, facendo corrispondere ad una curva generica C le curve $C', C'', \cdots, C^{(r-1)}$ del medesimo sistema. Ebbene le curve

$$C + C' + C'' + \cdots + C^{(r-1)}$$

sono contenute tutte in un sistema lineare di grado $2r^2$ appartenente all'involuzione I_r. Quindi la superficie immagine di I_r contiene un sistema lineare di grado $2r$, di genere $r + 1$ e di dimensione pure $r + 1$.

Si può supporre che il suddetto sistema lineare (che è semplice) venga segato su Φ dagli iperpiani di un S_{r+1}, e si ha allora una superficie Φ_{2r} d'ordine $2r$, a sezioni iperpiane di genere $r + 1$ in S_{r+1}.

Questa non è la superficie d'ordine minimo fra le immagini proiettive dell'involuzione I_r, ma si distingue per la circostanza di possedere un certo numero di punti doppi e d'iperpiani tangenti che formano una *configurazione massimamente simmetrica.*

Si ottengono punti doppi di Φ_{2r} in corrispondenza ai punti uniti delle trasformazioni di G_r su F, e iperpiani tangenti più volte lungo curve razionali, in corrispondenza alle curve C di $\{C\}$ unite per le suddette trasformazioni.

Si ottengono inoltre *gruppi di omografie che mutano in sè la* Φ_{2r}, in corrispondenza alle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie che mutano in sè il gruppo dei punti uniti esistente sulla superficie F.

In tal modo si perviene ai seguenti risultati:

Le superficie iperellittiche regolari di rango $r > 1$ *e divisore* 1, *le quali ammettono una rappresentazione propria mediante funzioni* Θ *non riducibili a prodotti di* Θ *dipendenti da una sola variabile* [4], *sono superficie coi generi* 1,

(3) BOLZA, *On binary sextics with linear transformations into themselves,* American Journal of Mathematics, 10 (1888).

(4) Con ciò si vengono ad escludere le superficie provenienti dalla particolare superficie di Jacobi con 2 fasci ellittici unisecantisi. Esamineremo in appresso tali superficie.

le quali possono ricondursi birazionalmente ai seguenti tipi:

1) $r = 2$: superficie Φ_4 di Kummer;

2) $r = 3$: superficie Φ_6 di ordine 6 in S_4, dotata di 9 punti biplanari ordinari e 9 iperpiani tangenti ciascuno lungo una conica contata tre volte. Le proprietà della configurazione costituita dai 9 punti e dalle 9 coniche, vengono espresse in modo completo da un simbolismo analogo a quello adottato da Humbert pei 16 punti e pei 16 piani singolari della superficie di Kummer.

Precisamente: indicati i punti coi simboli $(\alpha\alpha')$ e le coniche coi simboli $\alpha\alpha'$ $(\alpha, \alpha' = 1, 2, 3)$ si ha che:

Pel punto biplanare $(\alpha\alpha')$ passano le coniche $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$.

Sulla conica giacciono i punti $(\alpha\beta')$ $(\alpha\gamma')$ $(\alpha'\beta)$ $(\alpha'\gamma)$.

Delle 4 coniche per un punto doppio due toccano un piano tangente e due l'altro. Per due punti doppi possono passare due coniche o una sola, e due coniche possono avere comuni due punti doppi o uno solo.

La Φ_6 ammette un gruppo di 18 omografie: 9 involutorie e 9 cicliche di 3° ordine (compresa l'identità). Queste ultime formano un sottogruppo; ecc.

La Φ_6 è intersezione completa di una quadrica e di una varietà cubica. Anzi i 9 punti biplanari di Φ_6 son doppi per un fascio di varietà cubiche, tra le quali ve n'ha una con un 10° punto doppio. La cfg. dei 9 punti biplanari e delle 9 coniche, viene così a riconnettersi ad una cfg. già studiata da Segre e da Castelnuovo. Tutto cioè permette di scrivere le equazioni algebriche della superficie Φ_6.

3) $r = 4$: superficie Φ_8 di ordine 8 in S_5, con 10 punti doppi, di cui 4 biplanari e 6 conici; ogni punto biplanare ha infinitamente vicino un altro punto doppio.

Alla cfg. dei 10 punti doppi, è legata una cfg. di 10 curve razionali, e cioè di 4 coniche e di 6 quartiche; lungo le coniche si hanno iperpiani con contatto di 3° ordine, lungo le quartiche iperpiani con contatto di 1° ordine.

Per brevità, ora e nel seguito, tralasceremo di enunciare le relazioni di appartenenza tra gli elementi della cfg.

4) $r = 6$: superficie Φ_{12} d'ordine 12 di S_7, con dieci punti doppi: 1 punto biplanare singolare, 4 punti biplanari ordinari, 5 punti conici. Al punto biplanare singolare sono infinitamente vicini due punti doppi, l'uno nell'intorno di 1° ordine e l'altro nell'intorno di 2° ordine. Alla cfg. dei punti doppi è legata una cfg. di 10 curve razionali, e cioè: 1 conica, 4 quartiche e 5 sestiche; lungo cui si hanno rispettivamente iperpiani con contatti di 5°, 2°, 1° ordine; ecc. ecc.

(Questi quattro tipi di superficie corrispondono a *gruppi ciclici* di Hermite sopra una superficie di Jacobi).

5) $r = 8$: *tre tipi distinti di superficie* Φ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di Jacobi, da un gruppo di trasformazioni in isomorfismo [1, 2] col *gruppo diedrico*:

a) superficie Φ_{16} di ordine 16 dello spazio S_9, con 7 punti doppi: 4 punti uniplanari ordinari e tre punti conici.

Sulla Φ_{16} esiste una cfg. di 7 curve razionali: 6 quartiche e 1 curva dell'8° ordine, lungo le quali si hanno iperpiani con contatti di 3° e di 1° ordine.

In questo caso e nel successivo, a differenza dei precedenti, le proprietà della cfg., formata dai punti, non si associano per *dualità* alle proprietà della cfg. formata dalle curve.

b) Superficie Φ_{16} d'ordine 16 dello spazio S_9 con sette punti doppi e sette curve razionali; e cioè: 6 punti biplanari e 1 punto conico; 4 coniche e 3 curve dell'8° ordine.

Ognuno dei punti biplanari ha infinitamente vicino un punto doppio.

c) Superficie Φ_{16} d'ordine 16 dello spazio S_9, con 7 punti doppi e 7 curve razionali.

Dei punti doppi 6 sono biplanari con un punto doppio infinitamente vicino, il rimanente è conico. Delle curve 6 sono quartiche e la rimanente è dell'8° ordine. Le proprietà delle due cfg. di punti e di curve, si possono in tal caso associare secondo una certa legge di dualità.

6) $r = 24$: *tre tipi distinti di superficie* Φ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di Jacobi da un gruppo di trasformazioni in isomorfismo [1, 2] col *gruppo tetraedrico*:

a) Superficie Φ_{48} d'ordine 48 dello spazio S_{25}, con 7 punti doppi e 7 curve razionali. Dei punti doppi uno è un punto uniplanare singolare (che ha un punto doppio infinitamente vicino in ciascuno degl'intorni di 1°, 2°, 3° ordine), uno è un punto uniplanare ordinario, 4 son punti biplanari ordinari e 1 è conico. Delle curve razionali 1 è dell'8° ordine, 2 del 12° e 4 del 16° ordine. Lungo queste curve si hanno iperpiani con contatti di 5°, 3°, 2° ordine.

b) Superficie Φ_{48} d'ordine 48 dello spazio S_{25} con 7 punti doppi e 7 curve razionali; e cioè: un punto biplanare avente 1 punto doppio infinitamente vicino in ciascuno degli intorni di 1° e di 2° ordine, due punti biplanari ognuno dei quali ha 1 sol punto doppio infinitamente vicino, 4 punti biplanari ordinari; quanto alle curve: 1 conica, 1 sestica, 4 curve di 16° ordine ed 1 di 24°; ecc. ecc.

c) Superficie Φ_{48} dello S_{25} con 7 punti doppi e 7 curve razionali. Dei punti doppi 1 è un punto biplanare singolare con due punti doppi successivi, due son punti biplanari singolari con un sol punto doppio successivo e gli altri 4 son punti biplanari ordinari. Delle 7 curve 1 è dell'8° ordine, 2 del 12° e 4 del 16° ordine.

Tutte queste superficie si possono rappresentare (per proiezione) su piani doppi $\{z^2 = f_6(x, y)\}$ *con sestica di diramazione.*

7. La configurazione dei punti doppi e degli iperpiani tangenti ad una Φ_{2r} vale a *caratterizzare le superficie iperellittiche regolari di rango r.*

Infatti data una Φ_{2r} che possegga la suddetta cfg. di punti e curve singolari, si riesce a costruire una superficie multipla di generi $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ rappresentata sulla Φ_{2r} contata r volte, la quale risulta (in questo caso) una superficie di Jacobi.

Si ottiene codesta costruzione per la superficie di Kummer

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

considerando 4 piani tangenti lungo coniche, che costituiscano un tetraedro di Rosenhain; se questi piani sono

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

basta considerare la superficie dello spazio $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$$f = 0, \qquad x_1 x_5 = \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Per la superficie Φ_6 di S_4 si procede analogamente considerando 3 iperpiani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ tangenti ad essa lungo coniche e comprendenti nel loro insieme i 9 punti biplanari. Basta quindi costruire la superficie rappresentata sulla Φ_6 contata 3 volte per mezzo del radicale

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}; \quad \text{ecc.}$$

8. Si possono pure assegnare in modo esplicito le sostituzioni lineari su u, v rappresentanti le trasformazioni birazionali che generano sulla superficie di Jacobi l'involuzione I_r immagine di una superficie Φ_{2r}.

Una volta conosciute tali sostituzioni, si costruisce *la rappresentazione parametrica di ciascuna di queste superficie mediante funzioni* Θ.

Così per esempio la involuzione I_3 corrispondente al tipo 2° (superficie Φ_6 di S_4), è generata dalla sostituzione lineare ciclica del 3° ordine

$$(2) \qquad \begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' = -3g'u - \frac{1}{2}v, \end{cases}$$

relativa alla superficie di Jacobi coi periodi

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{matrix} \qquad \left(gg' = -\frac{1}{12}\right).$$

Una sezione iperpiana della superficie Φ_6 può rappresentarsi annullando una funzione $\Theta(u, v)$ di 3° ordine; ma non già una funzione di 3° ordine arbitraria, sibbene una che sia trasformata in sè, a meno di un esponenziale,

dalla sostituzione lineare (2). Scegliendo quindi cinque funzioni Θ di 3° ordine siffatte, tra di loro indipendenti, le coordinate omogenee di un punto di Φ_6 si possono assumere proporzionali a queste Θ, e in tal modo si ottiene la rappresentazione parametrica di Φ_6.

Le 9 coniche della superficie Φ_6 hanno per equazioni

$$\vartheta\,(u - \lambda/3\,,\, v - \mu/3) = 0 \qquad (\lambda\,,\,\mu = 0\,,\,1\,,\,2)\,,$$

ove $\vartheta\,(u\,,\,v)$ è la funzione theta normale di 1° ordine a caratteristica nulla (una delle 16 ϑ di Rosenhain).

Quanto ai punti doppi di Φ_6, essi si ottengono in corrispondenza alle seguenti coppie di valori di $u\,,\,v$:

$$(0\,,\,0)\left(0\,,\,\frac{1}{3}\right)\left(0\,,\,\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\,,\,0\right)\left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\,,\,0\right)\left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{2}{3}\right).$$

Da ciò si deduce nuovamente il simbolismo già introdotto per esprimere le proprietà della cfg. di punti e coniche, esistente sulla superficie Φ_6 (n. 6).

XXXIV.

ALCUNE PROPOSIZIONI FONDAMENTALI PER LA GEOMETRIA SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE (*)

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 16_2 (1907), pp. 337–344.

La conoscenza abbastanza ampia che si possiede ormai delle funzioni algebriche di una e di due variabili, non permette di intuire sempre per analogia le corrispondenti proprietà per le funzioni di tre o più variabili, se si eccettuano alcuni teoremi, i quali, per la natura stessa delle dimostrazioni, si possono ritenere noti per varietà algebriche di dimensione qualunque. Sono tra questi, il teorema relativo all'unicità del sistema lineare completo cui appartiene una data funzione razionale dell'ente, il Restsatz, il teorema fondamentale dell'aggiunzione, ecc.

Altre proposizioni di geometria sopra una varietà, appariscono invece addirittura inattese. Basti citare qualche teorema in cui mi sono imbattuto in alcune ricerche sulle varietà, che mi propongo di esporre qui sommariamente, riservando gli sviluppi ad un altro lavoro.

Così ad esempio, mentre il genere aritmetico di una superficie non è legato ai caratteri del sistema canonico (grado e genere), il genere aritmetico di una varietà a tre dimensioni si può esprimere mediante il grado e il genere aritmetico del sistema canonico; mentre il genere aritmetico di una superficie non supera mai il genere geometrico, per una varietà a tre dimensioni il genere aritmetico può essere minore, uguale o maggiore rispetto al genere geometrico; mentre una superficie con un gruppo permutabile ∞^2 di trasformazioni birazionali (superficie di Picard), ha il genere geometrico diverso dall'aritmetico, una varietà di Picard a tre dimensioni (varietà con un gruppo permutabile ∞^3) ha i due generi tridimensionali uguali; ecc. ecc.

Tuttavia le ricerche che esporrò attorno alle varietà a tre dimensioni, lo studio di qualche esempio e alcune considerazioni generali sulle varietà di dimensione qualunque, permettono d'intravedere le proprietà più notevoli delle varietà superiori, e in particolare mostrano come le analogie più spiccate si ritrovino tra le varietà la cui dimensione ha la stessa parità. Così ad esempio, per le varietà a quattro dimensioni il genere aritmetico torna ad essere indipendente dai caratteri del sistema canonico.

Ma di queste analogie mi occuperò nel lavoro più esteso.

(*) Presentata dal Socio C. Segre, nell'intervallo fra il 7 luglio ed il 1° settembre.

§ 1. – Generi virtuali di una superficie. Caratteri di un sistema lineare.

Sulle superficie algebriche uno dei concetti più fecondi (dovuto al Noether) è quello relativo al genere virtuale di una curva. Similmente sopra una varietà algebrica V a tre dimensioni, si hanno da considerare i *generi virtuali, aritmetico e geometrico, di una superficie.*

Tralasciando di definire i generi di una superficie di cui si considerino come inesistenti alcune singolarità, ci fermeremo al caso di una superficie composta di due parti F, F_1. Se p_a , p'_a sono i generi aritmetici delle due parti e π il genere (virtuale) della curva ad esse comune, il genere aritmetico (virtuale) della superficie composta è

$$x_a = p_a + p'_a + \pi \quad (1) \tag{1}$$

Quanto al genere geometrico (virtuale) della stessa superficie, esso è espresso da

$$x_g = p_g + p'_a + \pi \,, \tag{2}$$

purché però si ammetta che F appartenga ad un sistema continuo (almeno ∞^1) di grado > 0. Se della stessa proprietà gode anche F_1, si ha naturalmente

$$x_g = p_a + p'_g + \pi \,,$$

p_g , p'_g essendo i generi geometrici di F, F_1.

La formola (2) si deduce subito dalla (1), in virtù del teorema (di Castelnuovo–Enriques), che avrò occasione di richiamare più tardi, concernente l'irregolarità superficiale di V.

Dato su V un sistema lineare $|F|$, oltre al genere aritmetico di F (calcolato riguardando eventualmente come inesistenti alcune singolarità base), si hanno da considerare i caratteri virtuali seguenti del sistema $|F|$:

il «grado», cioè il numero delle intersezioni di tre superficie del sistema fuori della base assegnata;

il «genere», cioè il genere (virtuale) della curva comune a due superficie del sistema fuori della base assegnata.

(1) Di questa formula trovasi un caso particolare al n. 4 *b*) della mia Nota: *Su alcune questioni di postulazione*, Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, *17* (1903), pp. 73–103 [Nota XIII, p. 132; N.d.R.]: il caso cioè in cui F , F_1 costituiscano la completa intersezione di $r-2$ forme dello S_r. Ma la dimostrazione pel caso generale non è così semplice come lo potrebbe far supporre il fatto che il sig. Pannelli nella sua Nota: M. Pannelli, *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *15*1 (1906), pp. 483–489, dichiara di averla omessa per brevità. La dimostrazione stessa si troverà (in generale per varietà qualunque) nel mio lavoro più esteso.

Si può facilmente dare di questi caratteri definizioni che abbiano senso anche quando $|F|$ ha la dimensione o o 1, analogamente a ciò che si fa sulle superficie.

Si ottengono immediatamente le formole che esprimono il grado e il genere del sistema lineare $|F+F_1|$ somma di due altri $|F|$, $|F_1|$. Quanto al genere aritmetico del sistema somma, esso è dato dalla (1).

§ 2. – Generi della varietà V. Le due irregolarità.

Sopra una varietà V, a tre dimensioni, si hanno anzitutto i generi considerati da Noether [2] e cioè:

a) *Il genere geometrico tridimensionale* P_g: numero delle superficie canoniche linearmente indipendenti, od anche – sotto forma proiettiva, e supponendo la V, d'ordine n, immersa nella S_4 – numero delle forme aggiunte d'ordine $n-5$ linearmente indipendenti. Il genere P_g è invariante rispetto a tutte le trasformazioni birazionali delle varietà (Noether, Enriques).

b) *I caratteri del sistema canonico* (genere superficiale, genere e grado). Si può dare di essi una definizione aritmetica, considerandoli come caratteri della superficie (virtuale, per $P_g = 0$) $F'-F$, ove F' è una superficie del sistema aggiunto ad $|F|$. Si ottengono allora tre invarianti Ω_0, Ω_1, Ω_2, corrispondenti rispettivamente al grado, genere, genere aritmetico di $F'-F$. Essi coincidono coi caratteri di Noether quando V sia priva di superficie eccezionali, che entrano come parti fisse in $|F'-F|$, e quando la superficie canonica sia regolare. Sono invarianti relativi: l'effetto prodotto su essi dalle trasformazioni che introducono superficie eccezionali, è stato studiato dal Pannelli [3]. Veramente questi invarianti riduconsi a due soli distinti, perché sussiste la relazione

$$2\,\Omega_1 - 2 = 3\,\Omega_0\,,$$

che si verifica facilmente [4].

Oltre gl'invarianti predetti si ha ancora:

c) *Il genere aritmetico tridimensionale* P_a: numero virtuale delle forme aggiunte d'ordine $n-5$ linearmente indipendenti. Supposto che la V sia dotata di singolarità ordinarie, cioè una superficie doppia D, con una linea

(2) M. Noether, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischen Gebilde*, Math. Ann., *8* (1875), pp. 495–533.

(3) M. Pannelli, *Sopra gl'invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *15*$_1$ (1906), pp. 619–629. Pel confronto col Noether (quando V sia priva di superficie eccezionali) si ponga $\Omega_0 = p^{(4)}$, $\Omega_1 = p^{(3)}$ $\Omega_2 = p^{(1)}$, e pel confronto col Pannelli $\Omega_0 = \Delta^{(3)}$, $\Omega_1 = \Delta^{(4)}$, $\Omega_2 = \Delta^{(1)}$. Il carattere $p^{(2)}$, di Noether (o l'invariante $\Delta^{(2)}$ del Pannelli) è uguale a $4\,\Omega_0 + 1$, e perciò è superfluo considerarlo.

(4) M. Pannelli, 1ª Nota citata, formola (23).

tripla per V e per D, con un numero finito di punti quadrupli per V e per la linea tripla e sestupli per D, le forme aggiunte a V soddisfano semplicemente alla condizione di passare per D. Detta $\varphi(l)$ la postulazione della D per le forme d'ordine l assai alto, il genere aritmetico di V viene espresso dalla formola

$$P_a = \binom{n-1}{4} - \varphi(n-5) .$$

Tra il genere aritmetico tridimensionale P_a e gl'invarianti Ω_0, Ω_1, Ω_2 – i quali coincidono rispettivamente col grado, col genere e col genere aritmetico del sistema canonico tracciato sulla varietà V, quando questa sia priva di superficie eccezionali – passa la relazione fondamentale

(3) $\qquad 2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 , \qquad$ ovvero: $\qquad 4P_a = 2\Omega_2 - \Omega_0 + 6$ [5].

La via che si presenterebbe più naturale per verificare la (3), sarebbe di esprimere la postulazione φ e gl'invarianti Ω, mediante i caratteri proiettivi della superficie doppia D; ma per quanto sia utile di possedere tali espressioni, a cui una ricerca un po' minuta deve condurre senza gravi difficoltà, non è così ch'io ho ottenuto la (3). Darò un cenno più sotto della via seguita, la quale ha il vantaggio di presentare la relazione numerica collegata ad un fatto geometrico. Contemporaneamente ne risulterà l'invarianza assoluta del genere aritmetico P_a, cioè dell'espressione $\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4$ [6].

Essendo invarianti i due generi tridimensionali, risulta pure invariante la differenza $P_g - P_a$, che si chiamerà *prima irregolarità* o *irregolarità tridimensionale* della varietà V.

L'irregolarità tridimensionale può essere anche negativa, cioè il genere aritmetico P_a può essere maggiore del genere geometrico P_g, come vedremo su esempi.

d) Un altro invariante assoluto della varietà V è stato introdotto recentemente dai signori Castelnuovo–Enriques [7]. Estendendo leggermente un teorema dimostrato da questi Autori, si può enunciare che « tutte le superficie (irriducibili) tracciate sulla V, hanno la stessa irregolarità, appena si tratti di superficie variabili entro sistemi continui di grado > 0 ». Orbene, l'irregolarità di queste superficie, che è poi uguale al *numero degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti a V*, si chiamerà *seconda irregolarità* o *irregolarità superficiale* della varietà.

(5) Ero giunto da qualche tempo a questa relazione e l'avevo anche comunicata al prof. Enriques; ma, occupato in altre ricerche e desideroso di completare gli studi che avevo intrapreso sulle varietà, ne avevo differito la pubblicazione.

(6) L'invarianza assoluta di quest'espressione trovasi pure dimostrata, seguendo una via ben diversa, nella 2ª Nota citata del sig. Pannelli.

(7) G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, Annales de l'Ecole normale de Paris, (3) *32* (1906), pp. 339–366.

§ 3. – Il teorema di Riemann–Roch sopra una varietà a tre dimensioni.

Sopra una varietà a tre dimensioni *non è possibile* assegnare per tutti i casi neppure una disuguaglianza tra la dimensione r di un sistema lineare, i suoi caratteri n, π, p_a, i (grado, genere, genere aritmetico, indice di specialità) e il genere P_a della varietà: già lo si arguisce dal fatto che non è possibile assegnare una disuguaglianza sempre valida, tra la dimensione effettiva $P_g - 1$ del sistema canonico e la sua dimensione virtuale $P_a - 1$.

Si riesce però a dimostrare che:

Sopra una varietà algebrica a tre dimensioni V, la dimensione r di un sistema lineare completo $|F|$ di superficie (anche riducibili), il quale si possa considerare come l'aggiunto di una superficie G, appartenente ad un sistema continuo di grado > 0, soddisfa alla disuguaglianza

$$r \geq n - \pi + p_a - P_a + 2 , \tag{4}$$

ove n, π, p_a denotano rispettivamente il grado, il genere, il genere aritmetico di $|F|$ e P_a il genere aritmetico di V. Esistono inoltre sistemi $|F|$ per cui vale il segno $=$.

Un sistema (completo) per cui vale l'eguaglianza, è per esempio quello contenente totalmente le sezioni di V, supposta priva di singolarità nello S_d, con le forme d'ordine l abbastanza alto. Si dimostra anzi che il sistema di queste sezioni è esso stesso completo; e da ciò si deduce la *postulazione di V per le forme d'ordine l.*

Il secondo membro della disuguaglianza (4) si deve considerare come la *dimensione virtuale* del sistema (non speciale) $|F|$.

Indicando con $\bar{p}_a$ il genere aritmetico virtuale della superficie G, di cui $|F|$ è l'aggiunto, si trova pure

$$r \geq \bar{p}_a - 1 + P_a . \tag{5}$$

In particolare si può scegliere un tal sistema $|F| = |G'|$ che in corrispondenza ad esso valga il segno $=$ in ambedue le espressioni (4), (5), sicché insomma risulti:

$$\bar{p}_a - 1 + P_a = n - \pi + p_a - P_a + 2 . \tag{6}$$

Esprimendo i caratteri n, π, p_a di F in funzione dei caratteri analoghi di G e della superficie (virtuale) $G' - G$, dalla (6) si deduce la relazione fondamentale (3):

$$2 P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4$$

enunciata al n. 2, *c*). E una volta stabilita questa relazione *si risale da essa alla* (6), *la quale risulta così dimostrata per ogni sistema aggiunto.*

L'invarianza del genere aritmetico segue dal fatto che P_a risulta il limite superiore delle espressioni invarianti $r - \bar{p}_a + 1$.

Dovendosi considerare come dimensione virtuale di un sistema di caratteri n , π , p_a , i, l'espressione

$$n - \pi + p_a - P_a + i + 2 ,$$

la

$$P_a - 1 = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - P_a + 1 + 2$$

risulta la dimensione virtuale del sistema $|G' - G|$, cioè del sistema canonico (essendo $i = 1$ l'indice di specialità di $G' - G$). Dunque:

La relazione fondamentale (3) *esprime che il genere aritmetico di V è il numero virtuale delle superficie canoniche linearmente indipendenti.*

Della relazione $\omega_2 = \omega_1 - 1$ tra i due invarianti del sistema $|C' - C|$ sopra una superficie, può darsi notoriamente un'interpretazione analoga.

4. – Relazioni tra certe deficienze e le irregolarità della varietà.

Dalla (5) segue anzitutto agevolmente che:

La deficienza δ del sistema canonico segato sopra una superficie irriducibile G dal proprio sistema aggiunto $|G'|$, non supera la somma delle due irregolarità q_1 , q_2 della varietà, ed esistono sistemi per cui il limite superiore è raggiunto.

Ne segue che *una varietà d'irregolarità superficiale nulla* ($q_2 = 0$) *ha sempre il genere geometrico non inferiore all'aritmetico* ($q_1 = P_g - P_a \geq \delta \geq 0$).

L'irregolarità superficiale di una varietà V è legata all'esistenza su questa di sistemi continui completi non lineari di superficie algebriche. Si sa anzi che « ogni sistema continuo completo è costituito da ∞^i sistemi lineari distinti, ove $i \leq q_2$ » (Castelnuovo–Enriques).

Applicando un procedimento già usato con successo sulle superficie (Enriques, Severi), si dimostra facilmente che *ogni sistema continuo completo di superficie, tracciato su V, ha il sistema caratteristico completo*, donde segue come immediato corollario che:

La deficienza δ_1 del sistema caratteristico di un dato sistema lineare $|F|$, appartenente a V, non supera l'irregolarità superficiale della varietà, ed esistono sistemi per cui il limite è raggiunto.

Assai più riposta è invece la dimostrazione di un'ultima disuguaglianza di cui manca l'analoga sulle superficie:

La deficienza δ_2 della serie lineare segata sopra una curva caratteristica di un sistema $|F|$ dal sistema $|2F|$, non supera la somma delle due irregolarità di V ($\delta_2 \leq q_1 + q_2$); e vi sono sistemi per cui vale l'uguaglianza.

Ne consegue che sopra una *varietà completamente regolare*, come lo spazio ordinario, per ogni sistema lineare di superficie si ha $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$.

§ 5. – Esempi.

1) *Varietà V delle coppie di punti di una superficie F e di una curva C.* – Ivi si ha un fascio Σ, identico a C, di superficie F_0 identiche ad F, ed una congruenza lineare π, identica ad F, di curve C_0 identiche a C e seganti le F_0 in un punto.

Una superficie canonica di V si ottiene aggiungendo alle superficie formanti entro Σ un gruppo canonico, la superficie riempita dalle ∞^1 curve che entro π dànno un ente canonico.

Essendo p_g, p_a, ω gl'invarianti di F e p il genere di C, *gl'invarianti di V hanno i valori*:

$$P_g = p_g\, p\,, \qquad \Omega_0 = 6(p-1)(\omega-1)\,, \qquad \Omega_1 = 9(p-1)(\omega-1)+1\,,$$
$$\Omega_2 = 3(p-1)(\omega-1)+2(p-1)\,p_a+2p-3\,, \qquad P_a = (p-1)\,p_a+p\,.$$

E poiché gl'integrali doppi di 1ª specie appartenenti a V, provengono sia dagl'integrali doppi di F, come dalle combinazioni degl'integrali semplici di F e degl'integrali abeliani di C, così il numero di questi integrali vien dato da $p_g + p\,(p_g - p_a)$.

Calcolando la differenza tra il numero degli integrali doppi ed il numero degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti a V, si trova precisamente:

$$\{p_g+p\,(p_g-p_a)\}-\{p+(p_g-p_a)\} = p\,(p_g-p_a)+p_a-p = P_g-P_a\,,$$

cioè *l'irregolarità tridimensionale di V è uguale alla differenza tra il numero degl'integrali doppi ed il numero degl'integrali di 1ª specie appartenenti alla varietà.*

Quando la F sia regolare con $p_g = p_a > 0$ e la C razionale ($p = 0$), si ottiene *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale nulla e ad irregolarità tridimensionale* > 0.

Nel caso in cui $p_g = p_a = p = 1$ si ha invece *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale* > 0 *e ad irregolarità tridimensionale nulla.*

Nel caso in cui $p_g = p_a = 0$, $p > 0$ si ha *un esempio di varietà col genere aritmetico maggiore del geometrico* ($P_g = 0$, $P_a = p$).

2) *Varietà V delle terne di punti di una curva C.* – Ebbi già occasione di assegnare in una mia Nota la costruzione del sistema canonico di V ed il valore del genere geometrico P_g (8). Se la curva ha il genere p

$$P_g = \binom{p}{3}\,, \qquad P_a = \binom{p}{3} - \binom{p}{2} + p\,,$$

(8) F. Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, *38* (1903), pp. 119–134, nn. 9, 10 [Nota XII, p. 119; N.d.R.].

e anche in tal caso *l'irregolarità tridimensionale di V risulta uguale alla differenza tra il numero* $\binom{p}{2}$ *degl'integrali doppi e il numero p degl'integrali semplici di* 1ª *specie appartenenti alla varietà.*

Questo esempio e il precedente fanno presagire che lo stesso teorema valga per una varietà qualunque a tre dimensioni; ma la dimostrazione generale sarà molto difficile.

Osserverò infine che, quando $p = 3$, cioè quando V è una varietà di Picard (con un gruppo ∞^3) l'irregolarità tridimensionale è nulla ($P_g = P_a = 1$).

XXXV.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CHE AMMETTONO UN GRUPPO CONTINUO PERMUTABILE A DUE PARAMETRI DI TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI (*)

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *67* (1907), pp. 409–419.

Le superficie algebriche che son mutate in sé dalle ∞^2 trasformazioni birazionali di un gruppo continuo permutabile e transitivo, furono studiate per la prima volta dal sig. Picard in una celebre Memoria del 1889, premiata dall'Accademia di Francia (1), e furono oggetto più tardi di altre ricerche notevoli del sig. Painlevé, il quale completò l'analisi delle superficie possedenti un gruppo continuo qualunque di trasformazioni birazionali (2). Il punto di partenza dell'analisi del sig. Picard è la condizione – data da Lie – affinché le trasformazioni infinitesime generatrici di un gruppo continuo, siano permutabili. Sono note anche altre vie per giungere al risultato relativo alle superficie in questione (3); ma nessuna di queste vie s'inquadra in un sistematico studio algebrico–geometrico della teoria delle superficie.

Nella presente Nota io mi propongo appunto di giungere per via sintetica alla caratterizzazione delle superficie con un gruppo continuo permutabile ∞^2. Il concetto della mia dimostrazione è semplice e si può riassumere brevemente.

L'esistenza di un gruppo continuo G ∞^2, permutabile e (assolutamente) transitivo, sopra una superficie F, conduce facilmente alla conseguenza che su F esiste un'altra serie ∞^2 – non un gruppo – di trasformazioni birazionali involutorie. Si prova che una trasformazione K di questa serie ammette più di un punto unito, e se ne deduce che nel gruppo G esistono trasformazioni involutorie (quelle che scambiano tra loro i punti uniti di K). Da ciò segue

(*) Presentata dal prof. G. Ricci, m.e., nell'adunanza dell'8 dicembre 1907.

(1) E. PICARD, *Mémoir sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, Journal de Mathématiques, (4) *5* (1889), pp. 135, 319. — Ved. pure: *Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques*, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, *9* (1895), pp. 244–255.

(2) P. PAINLEVÉ, *Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition*, Acta Mathematica, *27* (1903), pp. 1–54. — La caratterizzazione di tali superficie mediante i valori dei generi, trovasi in una Nota del sig. ENRIQUES, *Sulle superficie algebrique che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sé stesse*, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, *20* (1905), pp. 61–72.

(3) Ved. per esempio il t. II (Ch. XIV) de la *Théorie des fonctions algébriques* di PICARD et SIMART (Paris, Gauthier – Villars, 1906).

subito l'esistenza su F di involuzioni I_r, prive di coincidenze, d'ordine $r = 2^n$ (n intero arbitrario). Profittando allora della formola che lega i generi aritmetici di F e della superficie imagine di una I_r, si trova che il genere aritmetico di F vale $p_a = -1$.

Il genere geometrico p_g si calcola nel modo seguente. Nel gruppo G non posson esistere infinite trasformazioni che lascino invariante il sistema $|C|$ delle sezioni piane (o iperpiane) di F, perché altrimenti, in virtù di noti risultati di Enriques e Fano, la superficie F (di genere $p_a = -1$) sarebbe riferibile ad una rigata ellittica e il gruppo G risulterebbe *generalmente* transitivo (cioè ammetterebbe una curva invariante). Dunque il sistema $|C|$ vien portato dalle trasformazioni di G in ∞^2 sistemi lineari distinti, e si ha pertanto $p_g - p_a \geq 2$, ossia $p_g \geq 1$.

Ma $p_g > 1$ non può essere, perché altrimenti si riuscirebbe a costruire su F un sistema lineare (semplice) invariante rispetto a G e quindi la F potrebbe riferirsi ad una superficie con un gruppo proiettivo, il che porterebbe $p_g = 0$. Si conclude che dev'essere $p_g = 1$ e che la curva canonica deve risultare d'ordine zero, perché, nell'ipotesi contraria, G possederebbe una curva invariante.

Si trovano così tre condizioni ($p_a = -1$, $p_g = 1$, ordine della curva canonica $= 0$) necessarie affinché esista su F un gruppo continuo del tipo G.

Per provare che tali condizioni son sufficienti, si costruisce su F, d'irregolarità 2, un sistema continuo (semplice) formato da ∞^2 curve D non equivalenti e si osserva, con Castelnuovo, che una superficie Φ, i cui punti rappresentino le D, ammette un gruppo G' del tipo G. Ai punti di F rispondono su Φ le curve di un sistema continuo $\{\Gamma\}$, che si prova esser costituito da ∞^2 curve non equivalenti. Ne deriva che la varietà $\{\Gamma\}$, e quindi F, ammette un gruppo continuo ∞^2 permutabile e assolutamente transitivo.

1. Sulla superficie F si abbia un gruppo continuo ∞^2 G, permutabile e *assolutamente transitivo*, cioè tale che *ogni* punto di F possa trasportarsi mediante le trasformazioni di G in ogni altro punto della superficie [4]. Un tal gruppo nel seguito si chiamerà brevemente « abeliano ».

Si dimostrano agevolmente le seguenti proprietà:

a) Una trasformazione T che abbia un punto unito P è identica, giacché le trasformazioni di G mutano T in se stessa e portano P in ogni altro punto di F.

b) Esiste una sola trasformazione del gruppo che porta P in Q: conseguenza immediata di *a*).

c) Una trasformazione generica di G non è involutoria, perché altrimenti lo sarebbero le trasformazioni infinitesime del gruppo: mentre è chiaro che una trasformazione infinitesima, trasportando un punto dalla sua posi-

(4) Sopra una superficie razionale o sopra una rigata ellittica può costruirsi facilmente un gruppo continuo ∞^2 permutabile *generalmente transitivo*, tale cioè che la transitività cessi pei punti di una curva invariante (eventualmente riducibile).

zione iniziale a posizioni situate negli intorni dei successivi ordini, non può esser ciclica d'ordine finito.

d) La superficie ammette una *serie continua* di trasformazioni involutorie diverse da quelle di G. Invero, fissato un punto P di F, la coppia dei punti Q, Q' corrispondenti a P mediante le trasformazioni T, T^{-1} del gruppo, al variare di T, descrive un'involuzione di 2° ordine, che indicheremo con K_P. Al variare di P, K_P descrive una serie continua; né mai K_P può venire a coincidere con una trasformazione di G, perché altrimenti TK_P sarebbe la trasformazione di G portante P in Q', cioè risulterebbe $TK_P \equiv T^{-1}$, ossia $K_P \equiv (T^{-1})^2$, il che è assurdo.

e) La K_P possiede evidentemente il punto unito P: se essa possiede un altro punto unito P_0, dovrà esistere una trasformazione S di G, tale che S ed S^{-1} porteranno P in P_0, e quindi per *a*), S sarà involutoria.

Dunque: o una K_P qualunque non possiede che un punto unito, oppure esiste entro a G qualche trasformazione involutoria.

D'altronde profittando della formola

$$x = 4\,(2\,p'_a - p_a + 1)\,, \tag{1}$$

la quale dà il numero x delle coincidenze di una involuzione d'ordine 2 e di genere aritmetico p'_a, dotata di un numero finito (≥ 0) di coincidenze, sopra una superficie di genere aritmetico p_a, se ne rileva che x deve esser multiplo di 4, e quindi che la K_P non può ammettere il solo punto unito P.

f) Consideriamo una trasformazione involutoria del gruppo G, della quale in *e*) si è dimostrata l'esistenza, e sia I_2 l'involuzione di 2° ordine generata dalla suddetta trasformazione. Poiché I_2 è mutata in sé da ogni trasformazione di G, la superficie F', imagine di I_2, viene ad ammettere un gruppo abeliano. Applicando ad F' il ragionamento sopra esposto per F, si conclude che F' possiede qualche involuzione di 2° ordine – priva di coincidenze – generata da una trasformazione involutoria del relativo gruppo abeliano. Ad una tale involuzione risponde su F un'involuzione I_4 senza coincidenze. Questa alla sua volta è rappresentata da una superficie F'' con un gruppo abeliano: su F'' si può dunque considerare una I_2 priva di coincidenze e corrispondentemente su F si avrà una I_8 senza coincidenze; e così proseguendo. Si arriva insomma alla conclusione che « per n intero arbitrario, esistono su F involuzioni d'ordine 2^n prive di coincidenze ».

Indicando con p_a il genere aritmetico di F, con p'_a il genere aritmetico di una tale involuzione I_{2^n} e applicando la relazione che lega i generi aritmetici di due superficie in corrispondenza algebrica (5), viene

$$2^n\,(p'_a + 1) = p_a + 1\,, \qquad \text{donde:} \quad p_a = -1\,.$$

Si conclude pertanto che « ogni superficie F, la quale ammetta un gruppo abeliano, ha il genere aritmetico $p_a = -1$ ».

(5) F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, Rendiconti del R. Istituto lombardo, (2) *36* (1903), pp. 495–511 [Nota XIV, p. 158; N.d.R.].

2. Prima di proseguire nello studio delle superficie che posseggono un gruppo abeliano, ci resta da dar ragione della formola (1) usata al n° precedente. Tale formola trovasi incidentalmente in una Memoria sulle superficie iperellittiche presentata da Enriques e da me all'Accademia di Francia. Per comodità del lettore riproduco qui la dimostrazione.

Consideriamo sulla superficie F sostegno della involuzione I_2, dotata di un numero finito di coincidenze, un sistema lineare generico $|A|$, e sia $|A'|$ il trasformato di $|A|$ mediante I_2. Diciamo $|B|$ il sistema lineare appartenente all'involuzione che contiene tutte le curve $A + A'$ e fissiamo l'attenzione sopra un punto unito P dell'involuzione stessa. Proviamo anzitutto che P è una *coincidenza perfetta*, cioè che nell'intorno di P la I_2 subordina l'identità. Supponiamo infatti che intorno a P si abbia un'involuzione non indentica: allora una B passante per P dovrà passare per questo punto con due rami coniugati nell'involuzione, cosicché la involuzione γ_2^1 subordinata da I_2 sulla B, non potrà avere coincidenze (in quanto al punto infinitamente vicino a P su uno dei rami risponderà il punto infinitamente vicino sull'altro ramo). Ora, detto ϱ il genere della γ_2^1, dalla formola di Zeuthen si trae che il genere effettivo della curva sostegno B vale $2\varrho - 1$, e quindi il genere virtuale – cioè il genere effettivo di una B generica – vale 2ϱ. Ma ciò è assurdo, perché una B generica, contenendo un'involuzione γ_2^1 priva di coincidenze, sempre per la formola di Zeuthen, dovrà avere il genere dispari. Dunque P è una coincidenza perfetta. – Ciò posto, sia $|\Gamma|$ il sistema lineare (semplice) corrispondente a $|B|$ sulla superficie Φ imagine della I_2. Si può addirittura supporre che $|\Gamma|$ sia il sistema delle sezioni piane o iperpiane di Φ. Si vede allora con facilità che a P risponde su Φ un punto doppio conico, cioè, dal punto di vista invariantivo, una curva razionale di grado -2. – Si conosce pertanto il genere e il grado della curva di diramazione (formata da x curve razionali di grado -2) sulla superficie Φ, e quindi la formola già applicata alla fine del n° precedente, dà la (1).

3. Cerchiamo ora di valutare il genere geometrico p_g della superficie F dotata del gruppo G.

Consideriamo il sistema lineare $|C|$ delle sezioni piane o iperpiane di F e applichiamo ad esso le trasformazioni di G. Dico anzitutto che non posson esistere infinite trasformazioni, le quali mutino in sé $|C|$. Infatti, nell'ipotesi contraria, la F conterrebbe infinite trasformazioni proiettive in sé e quindi, secondo i risultati di Enriques e di Fano [6], sarebbe razionale o riferibile

(6) F. ENRIQUES, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sé stesse*, Atti del R. Istituto veneto, (7) 4 (1893), pp. 1590–1635; *Intorno alla Memoria « Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sé stesse »*, ibid. (7) 5 (1894), pp. 638–642. G. FANO, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sé stesse*, Rendiconti dei Lincei, (5) 41 (1895), pp. 149–156; *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sé*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 10 (1896), pp. 1–15.

ad una rigata (in tal caso ellittica). La razionalità resta subito esclusa dal fatto che $p_a = -1$; mentre la possibilità che F sia riferibile ad una rigata ellittica, resta esclusa dal fatto che una trasformazione non identica di G non ha punti uniti. Se, invero, F fosse rigata, le trasformazioni di G lascierebbero invariante il fascio delle generatrici e dovrebbero esistere ∞^1 trasformazioni di G per cui resterebbe invariante una data generatrice (si tenga presente che le trasformazioni di G sono ∞^2 mentre le trasformazioni in sé del fascio, come ente ellittico, sono ∞^1). Ciò è assurdo, perché ognuna delle ∞^1 trasformazioni suddette avrebbe due punti uniti (eventualmente coincidenti).

Il sistema $|C|$ vien dunque portato dalle trasformazioni di G in ∞^2 sistemi lineari diversi, cioè $|C|$ appartiene ad un sistema continuo $\{C\}$ costituito da ∞^2 sistemi lineari. Da ciò si trae [7]:

$$p_g - p_a \geq 2 , \qquad \text{e quindi:} \quad p_g \geq 1 .$$

La nostra superficie F possiede pertanto un numero finito di curve eccezionali (di 1ª specie) e può perciò trasformarsi birazionalmente in una che ne sia affatto priva [8]. Riferendosi a questo modello, privo di curve eccezionali, che continueremo a designare con F, si vede subito che il sistema canonico di F non può esser dotato di punti base (o di curve fisse), perché l'insieme dei punti base sarebbe invariante rispetto al gruppo G, il che non può conciliarsi coll'ipotesi che G sia assolutamente transitivo.

Ne deriva che, se $p_g = 1$, non può esistere su F un'effettiva curva canonica, cioè la curva canonica deve essere in tal caso d'ordine zero.

Dimostreremo ora che l'ipotesi $p_g > 1$ deve escludersi. Suppongasi infatti $p_g > 1$ e dicasi $|K|$ il sistema canonico (privo di punti base e di curve fisse). Si possono distinguere tre casi:

1) Il sistema $|K|$ è di grado > 0 e semplice. La F può allora riferirsi birazionalmente ad una superficie le cui sezioni piane (o iperpiane) sono curve canoniche o pluricanoniche, e poiché $|K|$ è invariante rispetto al gruppo G, tale superficie ammetterà un gruppo continuo proiettivo. Ciò è assurdo, come abbiamo già visto al principio di questo nº.

2) Il sistema $|K|$ è di grado > 0, ma composto con un'involuzione $\infty^2 I_\mu$. Tale involuzione sarà invariante rispetto al gruppo G ed anzi il gruppo indotto da G tra gli elementi (gruppi) di I_μ risulterà abeliano (assolutamente transitivo). Ciò deriva dal fatto che una trasformazione S di G la quale lasci fisso un gruppo A di I_μ – per il che basta che faccia corrispondere due punti di A – lascia fisso ogni altro gruppo B di I_μ, perché applicare la S a B equivale ad applicare ad A la trasformazione $TS (\equiv ST)$ ove T è una trasformazione di G che muta un punto di A in uno di B.

(7) F. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, *39* (1904), pp. 371–392 [Nota XVIII, p. 234; N.d.R].

(8) Se F possiede una curva eccezionale, questa è trasportata dalle trasformazioni di G negli ∞^2 punti di F.

Se s'indica pertanto con Φ una superficie birazionalmente identica all'involuzione I_μ, la Φ possiederà un gruppo abeliano G' rispetto a cui resterà invariante il sistema $|K'|$ di grado >0, semplice, e almeno ∞^2, imagine di $|K|$. Ne deriva che la Φ può trasformarsi in una superficie con un gruppo continuo proiettivo, mentre ciò, come sappiamo, è assurdo.

3) Il sistema $|K|$ è di grado $p^{(2)}=0$ e ogni curva K è composta con $i>0$ curve L – di genere $p^{(1)}=p^{(2)}+1=1$ – variabili in un fascio. Poiché il fascio delle L è invariante rispetto a G, una trasformazione che faccia corrispondere due punti di una medesima L, muterà questa curva in sé. V'ha di più che una trasformazione di G la quale lasci fissa una curva L_0, lascia fissa ogni altra curva L_1 del fascio stesso. Per veder ciò si ripete il ragionamento fatto nel caso 2) sostituendo ai gruppi A, B le curve L_0, L_1. – Ne segue che G subordina tra le L un gruppo permutabile assolutamente transitivo G', e quindi che il fascio delle L è ellittico. Ma ciò è assurdo, perché entro al fascio si avrebbe una $g_i^{p_g-1}$ $(i=p_g)$ invariante rispetto a G, e quindi un gruppo di elementi – le curve p_g–ple della serie – invariante rispetto allo stesso gruppo.

La conclusione delle considerazioni svolte in questo n° è che « ogni superficie la quale ammetta un gruppo abeliano, ha il genere geometrico $p_g=1$ e la curva canonica d'ordine zero ».

Osservazione. Il ragionamento esposto per escludere l'ipotesi $p_g>1$, prova più in generale che « sopra una superficie con un gruppo abeliano non può esistere alcun sistema lineare invariante rispetto al gruppo » e quindi che « ogni sistema continuo completo consta di ∞^2 sistemi lineari distinti aventi la stessa dimensione ». Di più per la cagione addotta discutendo il caso 2), il gruppo continuo G' indotto da G tra gli ∞^2 sistemi lineari d'un sistema algebrico, sarà abeliano. Onde « ogni sistema continuo completo è rappresentabile coi punti di una superficie dotata di un gruppo abeliano » (ove si prendano i punti di questa superficie come imagini dei sistemi lineari contenuti entro al dato sistema continuo).

4. Vediamo ora di provare che le condizioni trovate nei nn. precedenti ($p_a=-1$, $p_g=1$, curva canonica di ordine zero) sono non soltanto necessarie, ma anche sufficienti per affermare che la superficie F ammette un gruppo abeliano.

Consideriamo su F un qualunque sistema lineare $|C|$ semplice e regolare, privo di punti base, e di dimensione r. Esso, com'è noto [9], appartiene totalmente ad un sistema continuo $\{C\}$ contenente $\infty^{p_g-p_a}$, cioè ∞^2, sistemi

(9) F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rendiconti della R. Accademia di Bologna, 1904; ved. pure F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, *20* (1905), pp. 93–96 [Nota XXIII, p. 291; N.d.R.].

lineari distinti. – Essendo $|C_1|$, $|C_2|$ due tali sistemi lineari, qualunque sia $|C|$ entro $\{C\}$, esiste sempre il sistema $|C + C_1 - C_2|$, e quindi l'operazione $+ C_1 - C_2$ determina entro la varietà $\{C\}$, formata da ∞^2 elementi, una trasformazione birazionale, la quale, tenendo fisso $|C_1|$ e facendo variare $|C_2|$, descrive un gruppo abeliano (10).

Si fissino su F r punti generici e si consideri il sistema continuo $\infty^2 \{D\}$, birazionalmente identico alla varietà $\infty^2 \{C\}$, formato dalle curve C che passano per quegli r punti, e si dica Φ una superficie che rappresenti birazionalmente le curve D e che sia quindi dotata di un gruppo abeliano. Tra i punti di F, Φ si ottiene una corrispondenza algebrica, chiamando omologhi due punti P, Q di F, Φ quando P giace sulla D corrispondente a Q. I punti di Φ omologhi a P, riempono una curva Γ imagine del sistema delle ∞^4 curve D uscenti da P. Al variare di P su F, la Γ descrive su Φ un sistema continuo $\{\Gamma\}$ ∞^2 (non necessariamente completo) birazionalmente identico ad F, perché il sistema $\{D\}$, a causa della genericità del sistema $|C|$ di partenza, può supporsi semplice.

Vi sono a priori da distinguere tre casi:

1) Le ∞^2 curve Γ sono tra loro equivalenti. Tra le due curve comunque fissate D, Γ si ha allora una corrispondenza, chiamando omologhi due punti P, Q che siano pure omologhi nella corrispondenza dianzi definita tra F, Φ. Essendo le Γ equivalenti, questa corrispondenza è a valenza zero in un senso e quindi anche nel senso opposto (11), cioè le D segano sopra una D fissata gruppi equivalenti ed appartengono perciò ad un medesimo sistema lineare (12): il che contraddice alla maniera con cui fu costruito $\{D\}$.

2) Una Γ generica è equivalente ad ∞^1 altre formanti entro $\{\Gamma\}$ un sistema Σ. Allora tra la curva σ di F imagine di Σ – o tra una parte di σ e la parte corrispondente di Σ, qualora questo sistema sia riducibile – e la superficie Φ, si ha una corrispondenza a valenza zero in un senso e quindi anche nel senso opposto: cioè le D segano sopra σ gruppi equivalenti.

Variando Γ e quindi Σ, σ descrive entro F un fascio privo di punti base formato da curve ellittiche ($n = 2\pi - 2$), e due curve D (non equivalenti) differiranno per curve σ (13), cioè da una D si dovrà poter ottenere ogni altra D aggiungendo e togliendo due gruppi distinti di i curve del fascio. Ora si osservi che il fascio delle σ deve essere ellittico, perché se fosse razionale,

(10) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, (5) *141* (1905), pp. 545–556; n. 3.

(11) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2) *54* (1903), p. 49; oppure: *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) *12* (1905), pp. 55–79 [queste «Opere», XV, p. 173 e XXV, p. 296; N.d.R.].

(12) Ved. il n. 2, teor. I della mia Nota: *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 65_2 (1906), pp. 625–643 [Nota XXXI; p. 290; N.d.R.].

(13) Ved. la mia Memoria citata in (11), n. 6.

le D sarebbero a due a due equivalenti, mentre se fosse di genere $\varrho > 1$, il genere geometrico di F risulterebbe $p_g = \varrho$ (14).

Ne deriva che la varietà dei gruppi di i curve σ contiene soltanto ∞^1 gruppi non equivalenti, e quindi tra le D non se ne potrebbero trovare più di ∞^1 non equivalenti.

3) Data una Γ generica vi sono in Σ altre $i - 1$ $(i \geq 1)$ curve Γ equivalenti a quella. Si ottengono allora ∞^2 sistemi lineari distinti $|\Gamma|$ formanti una varietà che ammette un gruppo abeliano (n. 3, Oss.). Tale varietà sarà birazionalmente identica al sistema $\infty^2\{\Gamma\}$, cioè ad F, solo quando sia $i = 1$. In questo caso F ammetterà dunque un gruppo abeliano.

Quando sia invece $i > 1$, la varietà suddetta risulterà birazionalmente identica ad un'involuzione d'ordine i entro al sistema $\{\Gamma\}$, ossia ad una involuzione d'ordine i tra i punti di F. Cosicché in tal caso F viene rappresentata sopra una superficie i-pla Ψ dotata di un gruppo abeliano.

Poiché F ha la curva canonica d'ordine zero, su Ψ non posson esistere punti di diramazione (15), e quindi in virtù di un noto ragionamento sintetico (16) si conclude che la F stessa ammette un gruppo abeliano.

Si può pertanto enunciare il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie algebrica possegga un gruppo continuo ∞^2, permutabile e assolutamente transitivo, di trasformazioni birazionali in sé, è che i suoi generi, aritmetico e geometrico, abbiano i valori

$$p_a = -1 , \qquad p_g = 1$$

e che la curva canonica esistente sulla superficie sia d'ordine zero (17).

Il gruppo ∞^2 è *generalmente transitivo* allora e solo allora che trattisi di una superficie rigata (razionale o ellittica).

La discussione svolta nel 3°) caso considerato in questo n° ci prova di più che:

Una superficie di generi $p_a = -1$, $p_g = 1$, colla curva canonica d'ordine > 0, è sempre rappresentabile sopra una superficie multipla avente $p_a = -1$, $p_g = 1$ e la curva canonica d'ordine zero.

Tale risultato coincide in sostanza con quello cui hanno condotto le ricerche dei sigg. Picard e Painlevé relativemente al problema d'inversione per le superficie abeliane.

(14) Ved. il ragionamento geometrico col quale il sig. ENRIQUES dimostra che « una superficie di genere $p_a = -1$, con un fascio di genere $\varrho > 1$, ha il genere $p_g = \varrho$ » (*Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sé stesse*, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, *20* (1905), pp. 61–72).

(15) F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, Rendiconti del R. Ist. Lombardo, (2) *36* (1903), pp. 495–511; n. 3 [Nota XIV, p. 158; N.d.R.].

(16) F. ENRIQUES, *Nota cit.* in (14), n. 5.

(17) Quest'ultima condizione si può sostituire coll'altra che il quadrigenere P_4 sia uguale ad 1 (cf. F. ENRIQUES, *Nota cit.* in (14), n. 7).

XXXVI.

INTORNO ALLE SUPERFICIE IPERELLITTICHE IRREGOLARI

In collab. con F. ENRIQUES, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, *171* (1908), pp. 4–9.

1. Scopo di questa Nota è di esporre un teorema che permette di caratterizzare, mediante i valori dei generi e dei plurigeneri, le superficie iperellittiche irregolari (di rango $r \geq 1$). Il teorema può essere enunciato sinteticamente come segue:

Le condizioni necessarie e sufficienti perché una superficie algebrica irregolare sia iperellittica, si possono esprimere dicendo che il genere numerico $p_a = -1$ *e che i plurigeneri* P_i $(i = 1, 2 \cdots)$ *assumono soltanto i valori* $0, 1$.

Più precisamente queste condizioni corrispondono a un numero finito di tipi che si lasciano definire mediante i valori dei primi plurigeneri (n. 4).

Il teorema sopra enunciato si riattacca alla determinazione mediante i valori dei plurigeneri delle « superficie ellittiche possedenti due fasci di curve ellittiche », la qual determinazione – appunto per questo scopo – fu da noi indicata nella Nota che avemmo l'onore di presentare all'Accademia nell'aprile scorso.

Ma sebbene possedessimo già allora, nelle sue linee generali, la dimostrazione del fatto che « ogni superficie ellittica con due fasci di curve ellittiche è iperellittica », ci trattenne dall'enunciare la conclusione un dubbio che, per motivi di salute, non potemmo appurare. Si tratta precisamente di questo: quando si procede ad un'analisi aritmetica delle superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$, si trovano (in rapporto cogli ordini dei corrispondenti gruppi) delle superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche il cui determinante riceve soltanto valori particolari (e precisamente i valori $n = 2, 3, 4, 6, 8, 9$) [1], e non si vede subito a priori che si esauriscono per tal modo tutte le superficie ellittiche predette; onde per questo lato si affaccia il dubbio che l'imposizione di valori particolari al determinante, costituisca una condizione da aggiungere ai valori dei generi, per esprimere che una data superficie ellittica è iperellittica.

(1) Questo risultato è implicito nelle tabelle che i sigg. Bagnera e De Franchis hanno pubblicato al n. 5 della Nota inserita in questi Rendiconti (aprile 1907); e da parte nostra fu sviluppato mediante un'analisi contenuta nella parte addizionale di una Memoria che abbiamo inviato all'Accademia di Francia (luglio 1907) [tale Memoria, successivamente pubblicata col titolo: *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, Acta Mathematica, *32* (1909), pp. 283–392 e *33* (1910), pp. 321–403, sarà ristampata nel volume II di queste « Opere »; N.d.R.].

Mentre ci proponevamo di ritornare su questo punto, i sigg. Bagnera e De Franchis sono giunti dal canto loro a chiarire la cosa e a riconoscere – in modo indipendente dalla nostra ricerca – il fatto che « tutte le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche sono iperellittiche »; questo fatto essi hanno enunciato in una recente Nota dei Comptes Rendus dell'Accademia di Francia, ricca di altri risultati importanti.

Siccome però in codesta Nota non si trova messo in rapporto il fatto suaccennato coi valori dei plurigeneri, stimiamo non inutile ritornare sull'argomento esponendo i brevi sviluppi che seguono.

2. Ci sia permesso anzitutto di riassumere la nostra dimostrazione del teorema che « le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche sono iperellittiche ».

Sia data una superficie ellittica con due fasci di curve ellittiche C , K (secantisi in $n > 1$ punti).

Si tratta di costruire una superficie F iperellittica di rango 1, che sia rappresentata sulla Φ multipla senza punti di diramazione; le coordinate dei punti di Φ sono allora funzioni razionali di quelle dei punti di F.

Accenneremo brevemente come si possa procedere all'effettiva costruzione dell'anzidetta superficie multipla. Perciò ricordiamo alcune cose intorno alle superficie ellittiche (2).

Una superficie ellittica Φ – di determinante $n > 1$ – può rappresentarsi sopra un cilindro ellittico

$$\varphi(x, y) = 0$$

multiplo secondo il numero n, con una curva di diramazione composta di t sezioni piane $z = a_1 , z = a_2 \cdots z = a_t$. A queste componenti della curva di diramazione competono certi ordini

$$s_1 , s_2 , \cdots , s_t ,$$

e, se le curve C formanti il fascio ellittico di Φ debbono essere ellittiche, si deve avere

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=t} \frac{s_i - 1}{s_i} = 2 ,$$

d'onde segue

$$t = 4 , \quad s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2 ,$$

oppure:

$$t = 3 , \quad s_1 = s_2 = s_3 = 3 ,$$

$$o : s_1 = 2 , \quad s_2 = s_3 = 4 ,$$

$$o : s_1 = 2 , \quad s_2 = 3 , \quad s_3 = 6 .$$

(2) F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, Rendic. Circolo Mat. di Palermo, (1905); §§ 8, 9.

In corrispondenza a questi casi si avrà

$$n = 2\delta\,,$$
$$n = 3\delta\,,$$
$$n = 4\delta\,,$$
$$n = 6\delta\,,$$

dove δ è un intero *a priori* arbitrario.

Limitiamoci per semplicità al primo caso.

Allora, si può costruire una superficie iperellittica F rappresentata sulla Φ contata due volte senza punti di diramazione, nel modo seguente:

Essendo

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

l'equazione della superficie Φ, avente un certo ordine m, esiste una superficie di ordine $2m - 8$

$$\chi(x, y, z) = 0\,,$$

biaggiunta alla Φ, la quale è di bigenere 1 $(n \cdot 3\,, a)$.

Consideriamo le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0 \\ u^2 = \chi(x, y, z)\,; \end{cases}$$

esse rappresentano nello spazio $S_4(x, y, z, u)$ una superficie F. Ora si può verificare che le sezioni di F cogli iperpiani paralleli all'asse u sono curve *irriducibili* secantisi secondo gruppi *canonici*, e se ne deduce che la F è una superficie irriducibile di genere $p_g = 1$, avente inoltre tutti i plurigeneri $P_i = 1$ $(i = 2\,, 3\,, 4\cdots)$. D'altra parte, poiché sulla Φ doppia non vi sono punti di diramazione, per una nota formula di corrispondenza [3] il genere numerico di F risulterà, come quello di Φ,

$$p_a = -1\,;$$

ma queste condizioni definiscono, come è noto [4], le superficie iperellittiche di rango 1.

3. Ciò premesso, passiamo a caratterizzare le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche, mediante i valori dei loro plurigeneri.

Si ha anzitutto $p_g = 0$, $p_a = -1$. Per calcolare i valori dei plurigeneri distinguiamo i 4 casi sopra menzionati.

$$a) \qquad t = 4\,, \qquad s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2\,.$$

(3) F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, Rendiconti del R. Ist. Lombardo, (2) *36* (1903), pp. 495–511 [Nota XIV, p. 158; N.d.R.].

(4) F. ENRIQUES, *Sulle superficie che ammettono un gruppo continuo, ecc.*, Rendic. Circolo Mat. di Palermo, (1905).

Le superficie così definite dipendono da due moduli arbitrari, cioè dal modulo di φ e dal birapporto $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$. I valori dei plurigeneri si calcolano mediante la formula di Enriques (5):

$$P_m = 1 + m(t-2) - \sum_{i=1}^{t} \varrho_i , \tag{3}$$

ove ϱ_i è un intero soddisfacente alle condizioni

$$\frac{m}{s_i} \leq \varrho_i < \frac{m}{s_i} + 1$$

e ove si prenda $P_m = 0$ tutte le volte che il 2° membro risulti negativo. Si trova così:

$$p_a = -1 , \quad P_{2i+1} = 0 , \quad P_{2i} = 1 .$$

Reciprocamente questi valori caratterizzano le superficie di cui si tratta, giacché anzi basta che si abbia

$$p_a = -1 , \quad p_g = 0 , \quad P_2 = P_4 = 1 \ (6)$$

Infatti, essendo $p_a = -1$, $p_g = 0$, si ha una superficie ellittica i cui plurigeneri possono essere calcolati mediante la formola (3). Ora, poiché $P_2 = t - 3 = 1$, verrà $t = 4$; e poiché $P_4 = 1$, verrà $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$; donde segue che, essendo soddisfatta la (1), sulla superficie ellittica in questione le curve del fascio ellittico sono ellittiche.

$$b) \qquad t = 3 , \quad s_1 = s_2 = s_3 = 3 .$$

Le superficie corrispondenti dipendono da un sol modulo: quello di φ (e le curve ellittiche C delle superficie stesse sono equianarmoniche). Pei valori dei relativi plurigeneri trovasi:

$$p_a = -1 , \quad P_{3i+1} = P_{3i+2} = 0 , \quad P_{3i} = 1 .$$

Questi valori caratterizzano le superficie in questione. Basta anzi che sia

$$p_a = -1 , \quad P_3 = 1 , \quad P_8 = 0 ,$$

giacché dalla formola (3), con un'ovvia analisi aritmetica, si trae

$$t = 3 , \quad s_1 = s_2 = s_3 = 3 .$$

$$c) \qquad t = 3 , \quad s_1 = 2 , \quad s_2 = s_3 = 4 .$$

Le superficie così definite, possedenti un fascio ellittico di C armoniche, dipendono da un sol modulo. Si ha per esse:

$$p_a = -1 , \quad P_{4i+1} = P_{4i+2} = P_{4i+3} = 0 , \quad P_{4i} = 1 .$$

(5) 1ª Memoria citata § 8.

(6) In luogo di $P_4 = 1$ si può anche scrivere $P_6 = 1$.

Come nei casi precedenti si vede che questi valori dei plurigeneri caratterizzano le superficie in questione, bastando anzi che si abbia

$$p_a = -1\,, \qquad P_4 = 1\,, \qquad P_6 = P_{10} = 0\,.$$

d) $\quad t = 3\,, \qquad s_1 = 2\,, \qquad s_2 = 3\,, \qquad s_3 = 6\,.$

Le superficie così definite – possedenti, come nel caso *b*), un fascio ellittico di curve equianarmoniche – dipendono da un modulo. Per esse

$$p_a = -1\,, \qquad P_{6i+1} = P_{6i+2} = \cdots = P_{6i+5} = 0\,, \qquad P_{6i} = 1\,.$$

Questi valori caratterizzano tali superficie ellittiche, ed anzi basta per esempio che sia

$$p_a = -1\,, \qquad P_2 = P_3 = P_{14} = 0\,, \qquad P_6 = 1\,.$$

In tal caso la discussione che conduce al risultato è un po' meno semplice che nei casi precedenti, e perciò la riferiremo.

Essendo $P_2 = 0$ e quindi $p_g = 0$, la superficie in questione, di genere $p_a = -1$, è una superficie ellittica i cui plurigeneri possono calcolarsi mediante la (3). Dall'ipotesi $P_2 = 0$ segue intanto $t = 3$. L'ipotesi $P_6 = 1$ dà facilmente:

$$\alpha) \qquad s_i \geq 3 \qquad (i = 1\,,\ 2\,,\ 3)$$

oppure:

$$\beta) \qquad s_1 = 2\,, \quad s_2 \geq 3\,, \quad s_3 \geq 6.$$

Osserviamo ora che $P_4 = 0$. Infatti se fosse $P_4 > 0$, poiché $P_6 = 1$, esisterebbe il sistema bicanonico, contro l'ipotesi $P_2 = 0$. La relazione $P_4 = 0$, tenendo conto dei possibili valori $\alpha)$ $\beta)$ per le s_i, porta

$$\alpha') \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3\,,$$

oppure:

$$\alpha'') \qquad s_1 = s_2 = 3\,, \quad s_3 \geq 4\,,$$

$$\beta') \qquad s_1 = 2\,, \quad s_2 = 3\,, \quad s_3 \geq 6\,.$$

Poiché i valori $\alpha')$ $\alpha'')$ dànno $P_3 = 1$, l'ipotesi $P_3 = 0$ porta a scartarli e restano quindi come possibili i soli valori $\beta')$. L'ipotesi $P_{14} = 0$ porta infine a concludere che $s_3 = 6$.

4. Riassumendo, e ricordando che le superficie iperellittiche di rango 1 (superficie di Picard) sono caratterizzate dai valori $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ dei plurigeneri [7]; si ha il seguente teorema:

(7) F. ENRIQUES, 2ª Memoria citata.

Le condizioni affinché una superficie irregolare sia iperellettica di rango $r \geq 1$, *si possono esprimere mediante i valori dei relativi generi e plurigeneri, indicati nella tabella seguente*:

$$p_a = -1 \begin{cases} 1)\ r > 1\,, & p_g = 0\,, & P_2 = P_4 = 1 \\ 2)\ r > 1\,, & P_8 = 0\,, & P_3 = 1 \\ 3)\ r > 1\,, & P_6 = P_{10} = 0\,, & P_4 = 1 \\ 4)\ r > 1\,, & P_2 = P_3 = P_{14} = 0\,, & P_6 = 1 \\ 5)\ r = 1\,, & p_g = P_4 = 1\,. \end{cases}$$

Mediante l'analisi aritmetica accennata in principio, il teorema acquista una maggiore determinazione, e precisamente risulta che:

I valori del rango r, *del divisore* δ *e del determinante* $n\ (= r\delta)$ *corrispondentemente ai singoli casi* 1) 2)$\cdots$5) *della tabella precedente, son dati da quest'altra tabella*:

$$1)\ r = 2 \begin{cases} \delta = 1\,, & n = 2 \\ \delta = 2\,, & n = 4 \end{cases}$$

$$2)\ r = 3 \begin{cases} \delta = 1\,, & n = 3 \\ \delta = 3\,, & n = 9 \end{cases}$$

$$3)\ r = 4 \begin{cases} \delta = 1\,, & n = 4 \\ \delta = 2\,, & n = 8 \end{cases}$$

$$4)\ r = 6 \quad \delta = 1\,, \quad n = 6$$

$$5)\ r = 1,\ \delta \text{ qualunque.}$$

I casi 1) 2) 3) comprendono ciascuno due famiglie, dipendenti nel caso 1) da due moduli e negli altri due da un sol modulo.

Il caso 4) comprende una sola famiglia dipendente da un sol modulo e il 5) infinite famiglie dipendenti da tre moduli.

XXXVII.

OSSERVAZIONI SUL RESTSATZ PER UNA CURVA IPERSPAZIALE

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *43* (1907–1908), pp. 439–447.

I.

(Lettera del prof. E. Bertini al prof. F. Severi).

Come Ella sa, Castelnuovo [1] chiama ipersuperficie *aggiunta* ad una curva irriducibile qualunque C di uno spazio S_r una ipersuperficie che in ogni punto s^{uplo} di C si comporti come il cono che proietta da un S_{r-3} generico una curva aggiunta alla proiezione piana di C: precisamente che per ogni ramo uscente da ciascun punto s^{uplo} di C sia obbligata ad avere col ramo tanti punti comuni quanti ne ha la curva aggiunta per essere tale col ramo corrispondente della curva piana proiezione; e Castelnuovo dimostra il teorema che le ipersuperficie aggiunte di ordine abbastanza elevato segnano sopra C (prescindendo dai punti che dipendono dall'aggiunzione) una serie completa non speciale.

Applichisi questo teorema nel caso che C sia completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie di $S_r : f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots, f_{r-1} = 0$ e sieno Φ_l ipersuperficie aggiunte che segnano sopra C una serie completa. È facile allora vedere che le Φ_{l-1} aggiunte, se esistono, segnano pure sopra C una serie completa. Invero sia G il gruppo di punti in cui un iperpiano generico $x_0 = 0$ sega C e sia Φ_l una ipersuperficie aggiunta a C e passante per G (certo esistente se esistono le Φ_{l-1} aggiunte). Questa Φ_l passa per tutti i punti semplici comuni alle $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \cdots, f_{r-1} = 0$, $x_0 = 0$ e però è rappresentabile nella forma [2]

$$(1) \qquad \Phi_l \equiv A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_{r-1} f_{r-1} + \Phi_{l-1} x_0 ,$$

nella quale Φ_{l-1} non può essere identicamente nulla, perché Φ_l non passa per C (mentre possono essere nulle tutte le A, cioè quando le Φ_l per G si spezzino necessariamente in x_0 e nelle Φ_{l-1}). La precedente identità mostra che

(1) Nella Nota: *Sui multipli di una serie lineare...*, Rend. del Circolo matem. di Palermo, 7 (1893).

(2) Sua Nota: *Rappresentazione di una forma qualunque...*, Rend. dei Lincei, (5) *11* (1902); n. 6.

Φ_{l-1} è pure superficie aggiunta e segna su C la stessa serie che vi segna Φ_l, escluso il gruppo G, serie completa perché residua di questo gruppo rispetto ad una serie ammessa completa.

Potendosi in egual modo passare dalle Φ_{l-1} aggiunte alle Φ_{l-2} aggiunte e così via, si conclude che *sopra una curva completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie, irriducibile e del resto qualunque, le ipersuperficie aggiunte di qualsiasi medesimo ordine segnano una serie completa* (*astraendo dai punti che caratterizzano l'aggiunzione*), il che, per quanto so [3], era stato osservato soltanto nel caso che la curva fosse priva di punti multipli.

Ne discende immediatamente il Restsatz nel caso considerato. Si può anche notare che il teorema del n. 2 della Sua Nota « Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve... » [4], è un caso particolare del teorema precedente.

Se una curva C irriducibile e del resto qualunque non è completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie, si può certo far passare per essa $r-1$ ipersuperficie così che la residua intersezione C' sia priva di parti multiple. Basta osservare infatti che, presa una prima ipersuperficie passante per C, si possono considerare ipersuperficie pure passanti per C dello stesso ordine (ad esempio dell'ordine di C, onde fra esse sono i coni che la proiettano dagli S_{r-3} di S_r) che segnino su quella prima ipersuperficie una serie lineare di cui un elemento generico non abbia (escluso C, se $r = 3$) parti fisse e quindi nemmeno, per un teorema notissimo [5], parti multiple. Presa per seconda ipersuperficie una generica di queste, si potrà analogamente considerarne una terza che abbia comune colla intersezione della prima e della seconda (escluso C, se $r = 4$) una varietà senza parti multiple e così di seguito.

Si può porre la questione: le ipersuperficie dello stesso ordine abbastanza alto passanti per C' e aggiunte a C (nel senso già dichiarato) segnano sopra C una serie completa? Se la risposta fosse affermativa (il che non mi è riuscito di vedere), con una considerazione analoga a quella fatta dianzi, fondata sull'identità (1), si estenderebbe la proprietà a ipersuperficie di ordine qualunque passanti per C' ed aggiunte a C e si avrebbe il Restsatz in ogni caso.

È noto che la risposta è affermativa facendo le ipotesi particolari che C' sia pure irriducibile e che tanto C quanto C' sieno prive di punti multipli. In questo caso la dimostrazione si può fare nel modo seguente forse più semplice di quello noto [6].

(3) Sua Nota: *Su alcune questioni di postulazione*, Rend. del Circolo matem. di Palermo, *17* (1903); § 2.

(4) Rend. dei Lincei, (5) *12* (1903).

(5) Cfr., ad esempio, il n. 18 del cap. 10° del mio libro: *Introduzione alla Geometria projettiva degli iperspazii*. Pisa, Spoerri, 1907.

(6) Cfr. il § 2 già citato della Sua Nota dei « Rend. di Palermo », 1903. Adotto nella dimostrazione le indicazioni di questa Nota: cioè sono m, m' gli ordini, p, p' i generi delle C, C' e sono $n_1 n_2, \cdots, n_{r-1}$ gli ordini delle $r-1$ ipersuperficie passanti per $C + C'$: onde $m + m' = n_1 n_2 \cdots n_{r-1}$.

Supposto l opportunamente grande (quanto occorra per le considerazioni seguenti) la serie segnata sopra C dalle ipersuperficie Φ_l di ordine l passanti per C' e non per C è una serie non speciale, cioè una serie $g_{lm-\delta}^{lm-\delta-p-\gamma_l}$, se si escludono i δ punti comuni a C, C' e se si indica con γ_l la deficienza della serie stessa. Per dimostrare appunto che $\gamma_l = 0$, si noti che la dimensione delle Φ_l passanti per $C + C'$ è

$$(2) \qquad \binom{l+r}{r} - 1 - (m+m')\,l + \frac{1}{2}(m+m')\,(\sum n_i - r - 1)$$

(§ 1, n. 3 della Sua Nota ora citata): cosicché, indicando con ϱ_l la dimensione del sistema delle Φ_l passanti per C' soltanto, si ha

$$lm - \delta - p - \gamma_i = \varrho_l - \binom{l+r}{r} + 1 + (m+m')\,l -$$

$$- \frac{1}{2}(m+m')\,(\sum n_i - r - 1) - 1\,,$$

ossia

$$(3) \qquad \varrho_l = \binom{l+r}{r} - lm' - \delta - p - \gamma_l + \frac{1}{2}(m+m')\,(\sum n_i - r - 1)\,.$$

La dimensione ϱ_l si può calcolare anche in quest'altro modo. Le Φ_l passanti per i δ punti comuni (sempre per l abbastanza alto) formano un sistema di dimensione

$$(4) \qquad \binom{l+r}{r} - 1 - \delta$$

e segnano sopra C', prescindendo dai detti δ punti, una serie completa non speciale (perché tale è, per il teorema di Castelnuovo ricordato in principio, la serie segnata su C' da tutte le Φ_l), cioè una serie $g_{lm'}^{lm'-\delta-p'}$. Segue che la dimensione delle Φ_l passanti per C' è anche

$$(5) \qquad \varrho_l = \binom{l+r}{r} - 2 - lm' + p'.$$

Eguagliando i due valori trovati di ϱ_l si ha

$$\frac{1}{2}(m+m')\,(\sum n_i - r - 1) = p + p' + \gamma_l + \delta - 2$$

la quale, confrontata colla somma delle due relazioni

$$2p - 2 + \delta = m\,(\sum n_i - r - 1)\,, \qquad 2p' - 2 + \delta = m'\,(\sum n_i - r - 1)$$

(§ 1, n. 3, b), l. c.), mostra essere $\gamma_l = 0$: onde è completa la serie segnata

su C dalle Φ_l passanti per C' quando l è opportunamente grande [7]. Ed ora si dimostra il teorema per le Φ_{l-1}, passanti per C' e non per C', se esistono, proprio colla considerazione fatta nel caso che C sia completa intersezione. Cioè, detto G il gruppo di punti in cui un iperpiano generico $x_0 = 0$ sega $C + C'$ e Φ_l una ipersuperficie passante per C' e per G, si potrà scrivere la (1): donde ecc.

Terminerò coll'osservare che la dimostrazione da Lei data del teorema del n. 2 della Sua Nota « Sulla deficienza della serie caratteristica... » il quale si ottiene qui semplicemente, come già dissi, mediante la (1), conduce con lieve modificazione alle seguente notevole proposizione: – *Se sopra una curva C irriducibile qualunque un sistema lineare di ipersuperficie d'ordine* 1 , Φ_l, *completo rispetto ad un gruppo base, segna una serie completa, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema lineare di ipersuperficie d'ordine* $l-1$, Φ_{l-1}, *completo rispetto allo stesso gruppo base, segni pure su C una serie completa, è che le* Φ_l *del sistema completo passanti per C e quelle passanti per il gruppo G di punti determinato su C da un iperpiano generico* α *seghino questo iperpiano nel medesimo sistema lineare.* – Basta sostituire, nella sua dimostrazione, C a D , n (ordine di C) a kn, $\binom{r-1+l}{r-1}$ ad $\binom{l+2}{2}$, e notare che le Φ_l del sistema completo contenenti C segano su α un sistema di dimensione

$$\binom{r-1+l}{r-1} - 1 - n + \zeta_l - \delta_l$$

indicando con δ_l la deficienza di questo sistema. Allora come condizione necessaria e sufficiente perché la serie segnata su C dalle Φ_{l-1} sia completa si trova (invece dalla Sua $\theta_l + \zeta_l = z_l$)

$$\theta_l + \zeta_l = z_l + \delta_l :$$

ma questa, per l'ultima parte del Suo ragionamento, è appunto condizione necessaria e sufficiente perché coincidano i due sistemi lineari segnati su α dalle Φ_l per C e dalle Φ_l per G.

La condizione è certo soddisfatta se le Φ_l per C segnano su α un sistema completo, chè allora quello segnato dalle Φ_l per G, dovendo manifestamente comprenderlo, coincide con esso.

(7) Scambiando C con C' invece della (5) si ha

(6) $$\binom{l+r}{r} - 2 - lm + p$$

come dimensione delle Φ_l passanti per C. Le dimensioni (2), (3), (4), (6) sono manifestamente stabilite senza presupporre la irriducibilità di C' ed inoltre sono (3), (6) rispettivamente le dimensioni dei sistemi di Φ_l passanti per C' , C e (2) è la dimensione del loro sistema d'intersezione. Dall'osservare che la somma delle (3), (6) è eguale a quelle delle (2), (4) allora e allora soltanto che sia $\gamma_l = 0$ si ha che (sempre per l sufficientemente alto), se $\gamma_l = 0$, il sistema delle Φ_l passanti per i δ punti comuni, cioè di dimensione (4), è il sistema congiungente dei due sistemi (3), (6) e viceversa (senza imporre la irriducibilità di C').

II.

(Lettera del prof. F. Severi al prof. E. Bertini).

1. – A complemento di quanto Ella espone nella Sua lettera, osserverò che si può rispondere affermativamente alla questione da Lei posta, di sapere cioè se le ipersuperficie d'ordine abbastanza alto aggiunte – nel senso di Castelnuovo – ad una curva C di S_r, e passanti per la curva C' ulteriormente comune ad $r-1$ ipersuperficie condotte genericamente per C, seghino sulla C medesima una serie lineare completa (fuori delle intersezioni fisse).

A tal uopo dimostrerò questa proposizione più generale:

Se le ipersuperficie d'ordine assai alto passanti per un dato gruppo base A – che puo esser formato da punti, curve, superficie..., con assegnati comportamenti lungo ciascuna di esse – segnano sopra C, fuori delle eventuali intersezioni fisse, una serie lineare completa, lo stesso accade per le ipersuperficie d'ordine assai elevato che passano pel gruppo base $A+B$, ove B è un altro gruppo base arbitrario (8).

Alla dimostrazione di tale proprietà si adatta benissimo il ragionamento che ho altrove esposto per le curve gobbe (9).

Giova per brevità e chiarezza, d'introdurre in questo caso generale, il *concetto di molteplicità d'intersezione, in un punto comune ad una curva C e ad un gruppo base*. S'intenderà con ciò il numero i delle intersezioni che quel punto assorbe nel numero complessivo delle intersezioni di C con un'ipersuperficie d'ordine l assai alto, passante pel gruppo base. La definizione è legittimata da ciò che il numero i non potendo che decrescere col crescere di l, per l assai elevato deve restare costante.

Ciò premesso, s'immagini condotta genericamente pel gruppo base B un'ipersuperficie d'ordine elevato q, Φ_q, che non contenga C. Delle intersezioni di Φ_q con C, alcune – cioè quelle che eventualmente cadano in punti di B – resterebbero fisse al variare di Φ_q, mentre le altre, costituenti un gruppo che indicherò con M, varierebbero. La genericità di Φ_q consente pertanto di affermare che il gruppo M è costituito da un certo numero ε_q di punti distinti (semplici) della curva C.

Quanto ai punti fissi, in ciascuno di essi la Φ_q avrà con C moltiplicità d'intersezione eguale a quella che ivi ha con C il gruppo base B.

Per ipotesi le ipersuperficie Ψ_l d'ordine l assai alto ($\geq t$), passanti pel gruppo base A, segnano sulla C una serie lineare *completa* g, fuori dei punti fissi, ciascuno dei quali deve contarsi tante volte quant'è ivi la molteplicità d'intersezione di C col gruppo A. La stessa serie g può anche staccarsi su C,

(8) I due gruppi base A, B potranno ben presentare delle condizioni comuni: è appena necessario avvertire che le ipersuperficie per $A+B$ dovranno soddisfare *doppiamente* ad esse: una volta in quanto passano per A e un'altra volta in quanto passano per B.

(9) *Sul teorema di Riemann–Roch e sulle serie continue di curve...*, Atti della R. Acc. di Torino, *40* (1905), n. 3 [Nota XXVI, p. 317; N.d.R.].

fuori dei punti fissi, dalle ipersuperficie d'ordine $l+q$ pel gruppo base $A+B+M$. I punti fissi, oltre che in M, cadono in quei punti di A e di B che restano fissi al variare rispettivamente di Φ_q e di Ψ_l: anzi ciascuno di tali punti dovrà contarsi tante volte quant'è in esso la molteplicità d'intersezione di C col gruppo base $A+B$ (somma delle molteplicità relative ad A , B). Tutto ciò segue dall'osservare che tra le ipersuperficie d'ordine $l+q$ pel gruppo base $A+B+M$, ve ne sono di quelle spezzate nella Φ_q ed in una Ψ_l.

Elevando, se occorre, il valore del limite t, si può ottenere che gli ε_q punti del gruppo M impongano condizioni indipendenti alle ipersuperficie d'ordine $l+q$ che già passano pel gruppo base $A+B$; sicché la serie staccata su C, fuori dei punti fissi, da queste ultime ipersuperficie risulterà *completa*, *c.d.d.*

2. – Si applichi questa proposizione al caso in cui il gruppo A è definito dalla condizione di aggiunzione nei punti multipli di C e il gruppo B dal passaggio per la curva C', e si scenda poi dall'ordine $h=t+q$ all'ordine $h-1$ o colla considerazione da Lei esposta quando C' manca o estendendo il ragionamento con cui si chiude il n. 3 della mia Nota citata.

Si perviene allora alla conclusione che *se si definiscono come aggiunte ad una curva* C di S_r, le ipersuperficie che passano per C' e soddisfano alla condizione di aggiunzione nei punti multipli di C, *le aggiunte di un ordine dato* ARBITRARIO *staccano su* C, *fuori dei punti fissi, una serie lineare completa.*

3. Il risultato si può estendere alla superficie e poi per induzione, senza difficoltà di concetto, alle varietà superiori. Mi limito ad esporre rapidamente la cosa per le superficie.

Sia F una superficie algebrica di S_r, dotata di singolarità qualunque, e definiamo dapprima come « ipersuperficie subaggiunte » ad F quelle che segnano sopra un S_{r-1} generico, ipersuperficie aggiunte – nel senso di Castelnuovo – alla curva sezione, e che passano inoltre con molteplicità $s-1$ per ogni punto s^{plo} isolato *improprio* di F (punto non abbassante il genere di una sezione curvilinea generica per esso) (10). Complessivamente, poiché anche il punto variabile sopra una linea multipla è un punto multiplo improprio, le condizioni precedenti si potranno citare come « condizioni di aggiunzione rispetto a tutti i punti multipli impropri di F ».

Evidentemente i coni che proiettano da un S_{r-4} le superficie subaggiunte alla proiezione di F da quello S_{r-4} sopra un S_3, sono ipersuperficie subaggiunte.

Fissato un S_{r-4} generico, Ω, s'indichi con Γ la curva luogo dei punti d'appoggio delle corde di F incontranti Ω. Al variare di Ω, la Γ descrive un sistema *razionale*, il quale è contenuto totalmente in un sistema *lineare*. Le ipotesi che questo sistema abbia una curva fissa o sia composto colle curve

(10) Le « aggiunte » si otterrebbero imponendo alle subaggiunte un punto base $(s-2)^{\text{plo}}$ per ogni punto s^{plo} *proprio*.

di un fascio si escludono facilmente e si conclude pertanto che la Γ è irriducibile. Si noti ch'essa avrà un punto s^{plo} in ogni punto s^{plo} improprio isolato di F e tre punti doppi nei punti d'appoggio dei piani trisecanti di F incontranti Ω secondo una retta. Indicheremo con G il gruppo di tali punti doppi.

Il sistema lineare di tutte le subaggiunte d'un ordine l arbitrario, che passano per Γ, contiene i coni subaggiunti d'ordine l col vertice in Ω, e quindi segna su F un sistema lineare completo (sempre fuori delle linee fisse).

Ora, per la proposizione del n. 1, le subaggiunte soddisfacenti inoltre alle condizioni di aggiunzione rispetto a Γ, quando l sia grande, segnano su tale curva una serie completa. Da ciò segue che è completo il sistema $|C|$ staccato su F dalle subaggiunte d'ordine assai alto, che passano nel modo debito pei punti multipli di Γ.

Infatti il sistema completo $|D|$, che contiene totalmente $|C|$, segna su Γ la stessa serie (completa) che vi segna $|C|$, e il residuo di Γ rispetto a $|D|$ coincide necessariamente col residuo di Γ rispetto a $|C|$, perché quest'ultimo è completo. Onde $|D|$ e $|C|$ hanno la stessa dimensione, cioè $|C|$ è completo.

Elevando l, si può esigere che i punti di G presentino condizioni indipendenti alle subaggiunte d'ordine l. Allora per una cagione analoga a quella ora addotta per provare la completezza di $|C|$, risulta completo il sistema staccato su F, fuori delle linee fisse, dalle subaggiunte d'ordine l.

Ciò premesso, si ragioni come ai nn. 1, 2 riferendosi ad una superficie anziché ad una curva. Si concluderà che *le ipersuperficie d'un ordine dato* ARBITRARIO *subaggiunte alla superficie F, segano ivi, fuori delle linee fisse, un sistema lineare completo.* Per « subaggiunte » si debbono qui intendere le ipersuperficie che soddisfano non solo alla condizione di aggiunzione rispetto a tutti i punti multipli impropri di F, ma anche alla condizione di passare per una superficie F' ulteriore intersezione di $r-2$ ipersuperficie condotte genericamente per F.

XXXVIII.

APPUNTI DI GEOMETRIA ALGEBRICA

Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, *26* (1908), pp. 137–144.

Nel corso di Geometria algebrica che sto svolgendo quest'anno all'Università di Padova, ho avuto occasione di rimaneggiare o di completare alcune parti della teoria.

Mi sembra opportuno di far conoscere due punti delle mie lezioni, perché in uno di essi tolgo una lacuna nella dimostrazione che si dà ordinariamente del Restsatz, e nell'altro dò una semplice dimostrazione, ulteriormente estensibile, di una formula dovuta a Schubert, da cui si sono già ricavate conseguenze notevolissime, sia per la trattazione iperspaziale della Geometria algebrica, come per la teoria, che comincia appena a formarsi, delle serie non lineari di gruppi di punti sopra una curva algebrica.

La estensione della formula di Schubert, di cui si sta occupando attualmente il mio assistente Dr. Torelli, condurrà senza dubbio ad altre utili proposizioni sulle serie non lineari.

* * *

Nel primo punto, cui sopra ho accennato, delle mie lezioni, espongo una dimostrazione semplicissima del teorema di Noether $Af + B\varphi$, che è fondamentale nella trattazione algebrica della geometria sopra una curva secondo il piano di Brill e Noether. – Questa dimostrazione è modellata sul procedimento mediante cui altra volta ottenni le condizioni di rappresentabilità di una forma di quante si vogliano variabili, come combinazione lineare di un numero qualunque di forme delle stesse variabili [1], ed ha anche affinità con una dimostrazione sviluppata dalla signorina Scott pel teorema $Af + B\varphi$ [2].

Ma il mio ragionamento conduce ad un risultato più generale, che non ho altrove notato: *al teorema* $Af + B\varphi$ *nel caso in cui le due curve algebriche* $f = 0$, $\varphi = 0$ *presentino nei punti comuni contatti del tutto arbitrari.*

(1) *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*, Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei, (5) *91* (1902), pp. 105–113 [Nota IX, p.95; N.d.R.].

(2) Mathematische Annalen, *52* (1899).

E questa forma più generale del teorema $Af + B\varphi$ *occorre* nella dimostrazione del Restsatz, a meno che non si voglia stabilir prima il fatto che mediante una trasformazione cremoniana di una curva piana, le curve aggiunte ad una curva data si mutano in aggiunte alla trasformata (3).

* * *

Passo ad esporre la dimostrazione del teorema accennato, che si enuncia così:

Se le curve algebriche $f = 0$, $\varphi = 0$, *degli ordini rispettivi* m, n, *non aventi parti comuni, posseggono singolarità e contatti arbitrari nei loro punti d'intersezione, ogni curva algebrica d'ordine* l *passante colla molteplicità* $r+s-1$ *(almeno) per ogni punto* P *che sia* r*–plo per* f *ed* s*–plo per* φ *(intendendosi la condizione estesa ai punti multipli distinti o infinitamente vicini comuni alle* f, φ*), si puo rappresentare con un'equazione del tipo*

$$Af + B\varphi = 0 ,$$

ove $A = 0$, $B = 0$ *son curve algebriche degli ordini rispettivi* $l - m$, $l - n$, *che hanno in* P *le rispettive molteplicità* $s - 1$ *ed* $r - 1$ *(almeno).*

Vediamo anzitutto qual'è la dimensione del sistema lineare Σ formato dalle curve $Af + B\varphi = 0$, ove si lascino arbitrari i coefficienti delle curve A, B passanti pei P colle debite molteplicità. Quando $l < m + n$, una curva di Σ determina (a meno d'un fattore costante) le A, B; mentre invece quando $l \geq m + n$ ad ogni curva di Σ rispondono più equazioni del tipo considerato. – Tenendo conto del fatto che i due polinomi f, φ son primi fra loro (per l'ipotesi che le curve $f = 0$, $\varphi = 0$ non abbiano parti comuni) si vede subito che da una rappresentazione $Af + B\varphi = 0$, si deducono tutte le rappresentazioni corrispondenti ad una medesima curva di Σ, lasciando variare i coefficienti della curva $X = 0$, d'ordine $l - m - n$, nell'equazione

$$(A - X\varphi)f + (B + Xf)\varphi = 0 .$$

Ciò premesso, per ottenere la dimensione σ del sistema Σ, occorre togliere dal numero dei coefficienti arbitrari nei polinomi A, B, il numero dei coefficienti arbitrari nel polinomio X, eppoi ancora un'unità a causa del fattore costante pel quale si possono moltiplicare i due membri dell'equazione. Avremo pertanto, quando l sia così grande che i punti multipli P impongano condizioni indipendenti alle A, B obbligate a passare per essi colle molteplicità $s - 1$, $r - 1$:

$$\varrho = \binom{l - m + 2}{2} - \sum_P \binom{s}{2} + \binom{l - n + 2}{2} - \sum_P \binom{r}{2} - \binom{l - m - n + 2}{2} - 1 .$$

(3) Così si fa per esempio in PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques* (Paris, Gauthier–Villars, 1906) t. II, p. 11.

e quindi, mediante facili trasformazioni algebriche,

$$\varrho = \binom{l+2}{2} - 1 - mn - \sum_P \binom{r+s}{2} + \sum_P rs .$$

Ora, in base al teorema di Bézout, esteso da Noether anche al caso in cui le due curve di cui si considerano le intersezioni abbiano comuni punti multipli distinti o infinitamente vicini, si ha $\sum_P rs = mn$, e per conseguenza viene:

$$\varrho = \binom{l+2}{2} - 1 - \sum_P \binom{r+s}{2} .$$

Ma tale è pure la dimensione del sistema lineare Σ' formato da tutte le curve d'ordine l assai alto che passano per ogni P colla moltiplicità $r+s-1$, e poiché, evidentemente, per ogni valore di l, il sistema Σ è contenuto in Σ', si conclude che per l abbastanza alto Σ e Σ' coincidono.

Il teorema è dunque dimostrato per le curve d'ordine abbastanza alto.

Per dimostrare il teorema per ogni valore dell'ordine, basterà ora provare che se la proprietà è vera per le curve d'ordine l, lo è pure per quelle d'ordine $l-1$. – In quel che segue useremo coordinate omogenee $(x_0\, x_1\, x_2)$.

Si può sempre supporre, facendo eventualmente una trasformazione di coordinate, la quale non altera per nulla le condizioni del teorema da dimostrarsi, che la retta $x_0 = 0$ sia disposta genericamente rispetto alle $f = 0$, $\varphi = 0$; che non passi cioè per nessuno dei P (nella quale ipotesi è pur compresa l'altra che x_0 non divida né f né φ).

Sia $g(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva d'ordine $l-1$ passante colle molteplicità $r+s-1$ per ogni P: allora la curva $x_0 g = 0$ sarà d'ordine l e passerà colle debite molteplicità pei punti P, sicché, avendo ammesso il teorema per le curve d'ordine l, risulterà identicamente

$$(1) \quad x_0 g(x_0, x_1, x_2) \equiv A(x_0, x_1, x_2) f(x_0, x_1, x_2) + B(x_0, x_1, x_2)\, \varphi(x_0, x_1, x_2) ,$$

ove $A = 0$, $B = 0$ passano colle molteplicità rispettive $s-1$, $r-1$ per ogni P, r–plo per $f = 0$ ed s–plo per $\varphi = 0$.

Dalla (1) ponendovi $x_0 = 0$, si trae

$$(2) \qquad A(0, x_1, x_2) f(0, x_1, x_2) + B(0, x_1, x_2)\, \varphi(0, x_1, x_2) \equiv 0 ,$$

donde segue che la forma binaria (non identicamente nulla) $\varphi(0, x_1, x_2)$ divide il prodotto $A(0, x_1, x_2) f(0, x_1, x_2)$.

E poiché $\varphi(0, x_1, x_2)$ non ha fattori comuni con $f(0, x_1, x_2)$ – chè altrimenti la retta $x_0 = 0$ conterrebbe qualche P – si conclude che

$$(3) \qquad A(0, x_1, x_2) \equiv A_0(x_1, x_2)\, \varphi(0, x_1, x_2) ,$$

cioè

$$(4) \qquad A(x_0, x_1, x_2) \equiv A_0(x_1, x_2)\, \varphi(x_0, x_1, x_2) + x_0 A_1(x_0, x_1, x_2) ,$$

ove A_1 è una forma d'ordine $l - m - 1$.

La (2) confrontata colla (3) porge

$$B(0, x_1, x_2) + A_0(x_1, x_2) f(0, x_1, x_2) \equiv 0,$$

cioè

$$(5) \qquad B(x_0, x_1, x_2) + A_0(x_1, x_2) f(x_0, x_1, x_2) \equiv x_0 B_1(x_0, x_1, x_2),$$

B_1 essendo una forma d'ordine $l - n - 1$. Mediante la (4) la (1) diviene

$$x_0 g \equiv x_0 A_1 f + (A_0 f + B)\varphi,$$

e ricordando la (5)

$$x_0 g \equiv x_0 A_1 f + x_0 B_1 \varphi, \qquad \text{ossia:} \quad g \equiv A_1 f + B_1 \varphi.$$

Dunque la forma g d'ordine $l - 1$ può esprimersi come combinazione lineare di f, φ. Quanto alle $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ le identità (4), (5) ci mostrano ch'esse passano colle molteplicità rispettive $s - 1$ ed $r - 1$ (almeno) per per ogni P r–plo per $f = 0$ ed s–plo per $\varphi = 0$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

* * *

Espongo infine la dimostrazione accennata della formula di Schubert [4].

Sopra una curva C – di genere qualunque – sieno date una serie lineare g^r_n e una serie (razionale o irrazionale) γ^1_m d'indice $\nu \geq 1$. Si tratta di trovare una relazione tra i numeri m, n, ν, r, il numero d dei punti doppi della γ^1_m ed il numero $z_{r,n}$ dei gruppi di $r + 1$ punti comuni alla g^r_n e alla γ^1_m.

Dato un punto generico P della curva C, ove si considerano le due serie, chiamiamo punti Q quelli che appartengono ulteriormente ai ν gruppi di γ^1_m passanti per P, e chiamiamo R gli ulteriori punti dei gruppi di g^r_n, che passano per r punti Q tolti da un medesimo gruppo di γ^1_m.

La corrispondenza involutoria S in cui sono omologhi i punti P, Q ha gl'indici uguali a $\nu(m - 1)$; la corrispondenza T in cui sono omologhi P, R ha gl'indici

$$z_{r-1,n-1}(m - r), \qquad \nu \binom{m-1}{r} (n - r).$$

Si osservi ora che, se dato P si considerano tutti i punti degli $\binom{m-1}{r}$ gruppi di g^r_n che passano per le r–ple dei punti Q relativi al dato P, si ottengono, oltre ai punti R omologhi di P, i punti Q contati ciascuno $\binom{m-2}{r-1}$ volte.

(4) C. SEGRE, Rendiconti dei Lincei, 2 ottobre 1887, p. 149; Annali di Matematica, (2) *22* (1894); § 13.

Ciò si può esprimere dicendo che *la corrispondenza*

$$T+\binom{m-2}{r-1}S$$

è a valenza zero (5).

I punti uniti di tale corrispondenza sono dati dai punti uniti di T e dai punti uniti di S contati ciascuno $\binom{m-2}{r-1}$ volte. – I punti uniti di T cadono in ciascuno dei punti formanti i gruppi di $r+1$ punti comuni a g_n^r ed a γ_m^1, sicché sono in numero di $z_{r,n}(r+1)$. I punti uniti di S sono i d punti doppi della serie γ_m^1. Verrà pertanto:

$$(6)\qquad z_{r-1,n-1}(m-r)+\nu\binom{m-1}{r}(n-r)+2\nu(m-1)\binom{m-2}{r-1}=$$

$$=z_{r,n}(r+1)+\binom{m-2}{r-1}d\,,$$

ossia:

$$z_{r-1,n-1}(m-r)+\nu\binom{m-1}{r}n+\nu(m-1)\binom{m-2}{r-1}=$$

$$=z_{r,n}(r+1)+\binom{m-2}{r-1}d\,.$$

Per $r=1$ si ha $z_{0,n-1}=\nu(n-1)$, e quindi risulta:

$$z_{1,n}=n\nu(m-1)-\frac{1}{2}d\,.$$

Per $r=2$, tenendo conto del valore di $z_{1,n-1}$, si ottiene:

$$\nu(n-1)(m-1)(m-2)-\frac{1}{2}(m-2)d+\nu n\binom{m-1}{2}+$$

$$+\nu(m-1)(m-2)=3z_{2,n}+(m-2)d\,,$$

donde:

$$z_{2,n}=n\nu\binom{m-1}{2}-\frac{1}{2}(m-2)d\,.$$

Così proseguendo s'intuisce la formula di Schubert

$$(7)\qquad z_{r,n}=n\nu\binom{m-1}{r}-\frac{1}{2}\binom{m-2}{r-1}d\,,$$

la quale si dimostra mediante la relazione (6) appena si sia ammessa per valori inferiori di r.

(5) Pei concetti di cui qui si profitta ved. la mia Memoria, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, ecc. Memorie della R. Accademia di Torino, (2) *54* (1903) [Memoria XV, p. 173; N.d.R.].

Osservazione. – Veramente la formula di Schubert è relativa ad un caso un po' più generale: cioè al caso in cui i gruppi della γ_m^1 sieno neutri per la serie g_n^r. Se uno generico di tali gruppi impone soltanto $k+1$ condizioni ($k+1 \leq r$) ai gruppi della serie, in tal guisa cioè che ognuno di quei gruppi sia contenuto almeno in un gruppo della g_n^r, si avrà da ricercare il numero dei gruppi della γ_m^1 che contengono $k+1$ punti presentanti soltanto k condizioni ai gruppi della serie. A questo problema risponde la formula generale di Schubert.

La deduzione di tale fomula generale dalla (7) *è immediata.* Si fissi infatti entro alla data serie g_n^r una serie subordinata g_n^k che non contenga (parzialmente) tutti i gruppi della γ_m^1. Ciò è sempre possibile, perché i gruppi di g_n^r passanti per un gruppo generico di γ_m^1 formano una g_n^{r-k-1} e si può quindi scegliere entro g_n^r una g_n^k non avente alcun gruppo comune con questa g_n^{r-k-1}: la g_n^k così costruita non potrà allora contenere che un numero finito di gruppi della γ_m^1. Dicasi μ questo numero e dicasi z il numero dei gruppi di γ_m^1 che contengono $k+1$ punti presentanti k condizioni ai gruppi di g_n^r. Tali aggruppamenti di $k+1$ punti sono evidentemente compresi nel numero $z_{k,n}$ – dato dalla formula (7) – dei gruppi di $k+1$ punti comuni alla γ_m^1 e alla g_n^k. Al numero $z_{k,n}$ portano un ulteriore contributo i μ gruppi comuni a γ_m^1 e a g_n^k, giacché anzi ciascuno di questi dà $\binom{m}{k+1}$ gruppi di $k+1$ punti comuni alla γ_m^1 e alla g_n^k. Dunque

$$z_{k,n} = \binom{m}{k+1}\mu + z\,,$$

cioè

$$\binom{m}{k+1}\mu + z = nv\binom{m-1}{k} - \frac{1}{2}\binom{m-2}{k-1}d\,,$$

che è la formula di Schubert.

XXXIX.

SULLA REGOLARITÀ DEL SISTEMA AGGIUNTO AD UN SISTEMA LINEARE DI CURVE APPARTENENTE AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *17*$_2$ (1908), pp. 465–470 (*).

La regolarità del sistema aggiunto alle sezioni piane di una superficie algebrica, è stata dimostrata dal sig. Picard « par une voie détournée », mediante gli integrali semplici appartenenti alla superficie (1).

Credo di rispondere a un desiderio dei cultori di geometria algebrica, esponendo in questa Nota una dimostrazione geometrica diretta del teorema di Picard. La mia dimostrazione conduce anzi ad un risultato più generale: la regolarità del sistema $|C'|$ aggiunto ad una curva irriducibile qualunque C, che sia atta a definire un sistema continuo di grado > 0.

Mi sembra degno di nota anche il risultato del n. 1, di cui mi giovo per stabilire la regolarità di $|C'|$: sopra la curva generica di un qualunque sistema lineare irriducibile $|D|$ che contenga parzialmente C, il sistema completo $|D - C|$ stacca una serie *completa*.

Questo è forse il primo di una catena di teoremi che condurranno a meglio precisare il teorema di Riemann–Roch sopra una superficie. Intanto al n. 4 ne deduco un nuovo significato per la sovrabbondanza di un sistema lineare.

1. Sulla superficie F consideriamo un sistema lineare irriducibile $|D|$, effettivamente privo di punti base, ed una curva irriducibile C, la quale sia atta a definire un sistema continuo (in particolare lineare) almeno ∞^1, di grado > 0, virtualmente privo di punti base.

Dimostreremo che se esiste il sistema lineare

$$|E| = |D - C|,$$

esso sega su una generica D una serie completa.

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nella seduta dell'8 novembre 1908.

(1) E. PICARD, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Journal de Crelle, *129* (1905), pp. 275–286. Ved. pure il trattato di E. PICARD e G. SIMART (Paris, Gauthier–Villars, 1906) a pag. 437 del t. II.

Indichiamo infatti con Σ il sistema continuo completo cui appartiene $|D|$ e ricordiamo il teorema (di Enriques) secondo cui è completa la serie caratteristica di $\Sigma = \{D\}$ (2).

Sia D_0 una generica D, e G il gruppo comune a C, D_0. Denotiamo con Σ_0 il sistema algebrico formato dalle curve di Σ passanti per G: in forza del teorema ricordato, la serie lineare completa residua di G rispetto alla serie caratteristica di D_0 — la qual serie residua contiene totalmente quella segata su D_0 da $|E|$ — è staccata su D_0, fuori di G, dalle curve di Σ_0 infinitamente vicine a D_0.

Ciò posto, vediamo com'è costituito il sistema Σ_0. Anzitutto ad esso appartiene il sistema Σ_1, di tutte le curve di Σ che contengono come parte C. Dico che, toltone Σ_1, in Σ_0 restano un numero finito di sistemi lineari.

Dovremo perciò provare che le curve di Σ_0 che non contengono come parte C, appartengono ad un numero finito di sistemi lineari. Tali curve segnano su C il gruppo G, e appartengono quindi alla varietà algebrica H costituita dalle curve di Σ che staccano su C gruppi equivalenti a G.

Ora, la varietà H è formata da un numero finito di varietà irriducibili, ciascuna delle quali, essendo costituita da curve che staccano gruppi equivalenti sopra una curva, C, atta a definire un sistema continuo di grado > 0, è contenuta totalmente in un sistema lineare (anzi nel caso attuale forma addirittura un sistema lineare) (3).

Si conclude pertanto che il sistema Σ_0 costituisce una varietà riducibile, composta dal sistema Σ_1 e da un certo numero di sistemi lineari

$$|D_0|, |D_1|, \cdots, |D_s|,$$

tra i quali havvi il sistema $|D_0|$ delle curve D che passano per G (4).

Ne deriva che le curve di Σ_0 infinitamente vicine a D_0, appartengono tutte quante al sistema lineare $|D_0|$, perché tali curve non possono appartenere né ai sistemi $|D_1|, \cdots, |D_s|$ *distinti* da $|D_0|$, né al sistema Σ_1 le cui curve contengono tutte una parte non infinitamente vicina a D_0.

Il sistema lineare $|D_0|$, col gruppo base assegnato G, ha dunque la serie caratteristica completa.

Ora, se $r + 1$ è la dimensione di $|D_0|$, la dimensione di $|E|$ risulta uguale ad r, perché basta imporre alle D_0 di passare per un punto generico di C, per ottenere tutte le D che contengono come parte C. La dimensione

(2) F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rend. della R. Acc. di Bologna, *9* (1904), pp. 5–13; ved. pure F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, *20* (1905), pp. 93–96 [Nota XXIII, p. 291; N.d.R.].

(3) F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto veneto, *65* (1906), pp. 625–643 [Nota XXXI, p. 390; N.d.R.].

(4) La varietà spezzata Σ_0 è però *connessa*, in quanto ciascun sistema $|D_i|$ ha comune con Σ_1 un sistema lineare di dimensione inferiore di un'unità rispetto a quella di $|D_i|$.

della serie g segata da $|E|$ su D_0, uguaglia quindi la dimensione della serie caratteristica di $|D_0|$: ne deriva che le due serie coincidono, cioè che la prima è completa.

Se i sistemi $|D|$, $|C|$ posseggono punti base assegnati, si ricade subito nel caso precedente mediante una trasformazione che muti quei punti base in curve eccezionali, a condizione però che i punti base di $|D|$ si assegnino con la loro molteplicità effettiva.

Possiamo pertanto enunciare il teorema seguente:

Avendosi sopra una superficie algebrica due sistemi lineari completi irriducibili $|C|$, $|D|$ — *di cui il primo può anche essere* ∞^0, *purché* C *sia in tal caso atta a definire un sistema continuo di grado* > 0 — *se esiste il sistema* $|D - C|$, *esso sega sopra una generica* D *una serie lineare completa.*

Quanto ai punti base, si tenga presente che $|D|$ deve essere privo di punti base ipermultipli.

Osservazione. — Nel corso del ragionamento abbiamo imparato a *costruire sopra una superficie irregolare un sistema lineare irriducibile colla serie caratteristica completa*: è il sistema $|D_0|$.

2. Si mantengano le notazioni e le ipotesi introdotte al principio del numero precedente, e si supponga di più che il sistema $|E|$ sia regolare; in tal guisa che la sua dimensione risulterà espressa da

$$r = n - \pi + p_a + 1, \tag{1}$$

ove n, π denotano il grado e il genere virtuali di $|E|$, e p_a il genere aritmetico di F.

La dimensione del sistema $|C'|$ aggiunto alla curva C, virtualmente priva di punti base, è data da

$$\varrho = \bar{\omega} - 1 + p_a + \varepsilon \qquad (\varepsilon \geq 0),$$

ove $\bar{\omega}$ è il genere virtuale di C. Poiché il sistema $|E + C'|$ è aggiunto a $|D|$, le curve C' segneranno su D_0 gruppi residui della serie g rispetto alla serie canonica: l'indice di specialità di g risulta pertanto espresso da

$$i = \varrho + 1 + \eta \qquad (\eta \geq 0).$$

Quanto all'ordine della serie g, esso è evidentemente eguale ad $n + j$, ove j denota il numero dei punti di un gruppo (E, C) onde la dimensione di g, cioè del sistema $|E|$, viene uguale a

$$r = n + j - \alpha + i = n + j - \alpha + \bar{\omega} + p_a + \varepsilon + \eta,$$

α indicando il genere di D_0.

Se si osserva che

$$\alpha = \pi + \bar{\omega} + j - 1,$$

dalla relazione precedente si ricava

$$r = n - \pi + p_a + 1 + \varepsilon + \eta ,$$

la quale, confrontata colla (1), porge

$$\varepsilon = \eta = 0 .$$

Si conclude che:

Quando il sistema $|D - C|$ — di cui all'enunciato precedente — è regolare, il sistema $|C'|$, aggiunto a C, è pure regolare e segna sopra una generica D una serie completa.

3. Prendiamo come modello della nostra superficie una, F, priva di singolarità in un iperspazio. Le curve di un multiplo abbastanza alto $|D|$ delle sezioni iperpiane di F, che passano colla molteplicità $s - 1$ pei punti s–pli (accidentali) di C, segano altrove, su questa curva, una serie completa non speciale. Si può di più supporre, crescendo eventualmente l'ordine del multiplo considerato, che i detti passaggi presentino condizioni indipendenti alle D. Indicando con m l'ordine di C, con $\bar{\omega}_0$ il suo genere effettivo, e con l l'ordine delle forme che segnano su F il sistema (completo) $|D|$, sarà

$$\sum \frac{s(s-1)}{2} + [ml - \sum s(s-1) - \bar{\omega}_0 + 1] =$$

$$= ml - \bar{\omega}_0 - \sum \frac{s(s-1)}{2} - 1 = ml - \bar{\omega} + 1$$

il numero delle condizioni che C presenta alle D che debbono contenerla; onde, essendo regolare il sistema $|D|$, il sistema $|E| = |D - C|$ risulterà regolare. Applicando allora il teorema del numero precedente, si perviene alla conclusione che $|C'|$ è regolare.

Tale conclusione è applicabile in particolare quando C sia effettivamente priva di punti multipli, e quindi anche quando C sia dotata di punti multipli, i quali si assegnino colla loro molteplicità effettiva.

Infatti in tal caso una trasformazione birazionale di F avente per punti fondamentali i punti multipli assegnati, muta C in un'altra curva C_1 priva effettivamente di punti multipli, e in questa trasformazione il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ col gruppo base definito, vien mutato nel sistema $|C_1'|$ aggiunto a C_1. Onde $|C'|$ è regolare come $|C_1'|$.

Si può dunque enunciare il teorema seguente:

Sopra una superficie algebrica F, il sistema $|C'|$ aggiunto ad una curva C, la quale sia atta a definire un sistema continuo che non sia un fascio irrazionale, è regolare.

Quanto ai punti base, che entrano nella definizione di $|C'|$, è sottinteso che i punti multipli di C si debbano riguardare come accidentali o come asse-

gnati colla loro molteplicità effettiva; ma in questo secondo caso per l'applicabilità del teorema basterà che C appartenga ad un sistema continuo di grado > 0, privo di punti base assegnati.

Applicando la proposizione dimostrata al sistema delle sezioni piane della superficie F, supposta appartenente allo spazio ordinario, si ha il *teorema di Picard*:

Le superficie d'ordine $n-3$, *aggiunte ad una superficie* F *d'ordine* n *dello spazio ordinario, segano sopra un piano generico un sistema (regolare) di deficienza uguale all'irregolarità della superficie; mentre le superficie aggiunte d'ordine* $> n-3$ *segano su quel piano sistemi completi (regolari).*

In altri termini:

Se una curva sghemba può considerarsi come linea doppia di una superficie d'ordine n, la formola di postulazione relativa a quella linea è applicabile per tutti gli ordini maggiori di $n-4$ (ed anche per l'ordine $n-4$ se la superficie è regolare).

4. Un'altra conseguenza dei teoremi dimostrati porta ad assegnare un nuovo significato geometrico per la sovrabbondanza di un sistema lineare irriducibile $|C|$, almeno ∞^2, privo di punti base.

È noto che tale sovrabbondanza è uguale alla somma delle deficienze della serie caratteristica di $|C|$ e della serie segata sopra una C dal sistema canonico. Orbene, noi ora proveremo che:

La sovrabbondanza di un sistema lineare irriducibile $|C|$, *almeno* ∞^2 *e privo di punti base, è uguale alla deficienza della serie segata da* $|C'|$ *sopra una curva* $2C$.

Detti n, π il grado e il genere di C, i l'indice di specialità, s la sovrabbondanza, la dimensione r vien data da

$$r = n - \pi + p_a + 1 - i + s, \tag{2}$$

Pel teorema del n. 1 il sistema $|C|$ sega sopra una curva irriducibile $2C$, una serie completa g. Se ϱ è la dimensione del sistema $|C'|$ e δ la deficienza della serie segata da $|C'|$ su $2C$, l'indice di specialità della serie g risulta uguale a

$$\varrho + 1 - i + \delta,$$

e quindi la dimensione di g, cioè di $|C|$, risulta espressa da

$$r = 2n - (2\pi + n - 1) + \varrho + 1 - i + \delta =$$
$$= n - 2\pi + 2 + \varrho - i + \delta.$$

Pel teorema del n. 3 si ha

$$\varrho = \pi - 1 + p_a,$$

onde viene:

$$r = n - \pi + p_a + 1 - i + \delta ,$$

la quale, confrontata colla (2), porge

$$s = \delta \quad (5).$$

Osservazione. Il teorema dimostrato era noto pel sistema $|C|$ delle sezioni piane di una rigata. In tal caso $|C'|$ non esiste, e la sovrabbondanza di $|C|$ risulta uguale all'indice di specialità della serie segata da $|C|$ su $2C$ (Segre).

(5) Si noti che questa costituisce una *nuova dimostrazione del teorema di Riemann-Roch sulle superficie*, dedotta dal teorema concernente la completezza della serie caratteristica di un sistema continuo completo.

XL.

LA BASE MINIMA POUR LA TOTALITÉ DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

Annales de l'École Normale Supérieure de Paris, (3) *25* (1908), pp. 449–468.

Je me propose de poursuivre ici mes recherches sur la base des courbes algébriques tracées sur une surface algébrique. Pour m'expliquer sur les questions dont je vais traiter, il faut que je rappelle les résultats de mes travaux antérieurs parus dans les *Comptes rendus* (1) et dans les *Mathematische Annalen* (2).

Je dis que deux courbes algébriques A, B, tracées sur une surface algébrique F, sont *algébriquement équivalentes* et j'écris

$$A \equiv B,$$

lorsqu'elles sont renfermées totalement dans un même système, dont les éléments (courbes) forment une cariété algébrique irréductible.

Soient $C_1, C_2, \cdots, C_h$ h courbes tracées sur F, telles que l'on ait entre elles la relation

$$(1) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_h C_h,$$

λ, μ étant des entiers positifs non tous nuls. On dira alors que les h courbes données sont *algébriquement dépendantes*. La relation (1) pourra s'écrire pour plus de symétrie sous la forme symbolique

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i C_i \equiv 0,$$

où l'on a posé $\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1}, \cdots, \lambda_h = -\mu_h$.

Eh bien, dans mes travaux cités tout à l'heure, j'ai démontré qu'il est toujours possible de fixer sur la surface F un certain nombre fini ϱ de courbes $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$, algébriquement indépendantes, telles que toute autre courbe tracée sur F dépende algébriquement des ϱ courbes fixées.

On peut donc dire que *toute* courbe C de F est donnée par la relation

$$(2) \qquad \lambda C \equiv \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho,$$

où les entiers λ ont des valeurs convenables.

(1) Séance du 6 février 1905 [Nota XXII, p. 288; N.d.R.].
(2) *62* (1906), p. 194 [Memoria XXIX, p. 332; N.d.R.].

Le groupe des courbes $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ se nommera, partant, une *base* des courbes tracées sur F, et ϱ sera dit le *nombre base*.

Dans la démonstration de ce théorème joue un rôle fondamental la proposition remarquable, établie par M. Picard, au sujet des courbes logarithmiques des intégrales simples de troisième espèce attachées à la surface [3]. C'est ainsi que le nombre ϱ, envisagé par M. Picard sous le point de vue fonctionnel, vient prendre une simple signification au point de vue géométrique.

Mais une question importante se pose d'elle–même au sujet de la relation (2). Les ϱ courbes de la base ne sont pas déterminées d'une manière unique, mais on les peut choisir d'une infinité de manières, pourvu qu'il soit rempli une certaine condition arithmétique que j'ai donnée ailleurs [4].

Cela posé, est–il possible de choisir les ϱ courbes mentionnées de telle façon que le coefficient λ résulte égal à l'unité en correspondance de toute courbe C tracée sur F? Une base jouissant de cette propriété sera dite une *base minima*.

Je démontre en ce Mémoire que, *étant donnée une surface algébrique quelconque F, il est toujours possible de construire sur F une base minima*; mais à ce but il faut en général augmenter le nombre des courbes qui donnent la base.

Si l'on ne veut pas augmenter le nombre de ces courbes, en généralisant un procédé que j'ai employé autrefois pour des classes particulières de surfaces [5], on arrive à construire ce que je nomme une *base intermédiaire*, c'est–à–dire un groupe de ϱ courbes $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ telles qu'en correspondance de toute courbe C existant sur F, l'entier λ de la relation (2) résulte un diviseur des entiers $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho$.

On voit que cette particulière base se réduit à une base minima lorsque la relation

$$\lambda C \equiv \lambda (\varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \cdots + \varepsilon_\varrho C_\varrho)$$

amène

$$C \equiv \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \cdots + \varepsilon_\varrho C_\varrho,$$

c'est–à–dire lorsque *l'opération de division appliquée aux courbes d'un système algébrique* est univoque.

Cela arrive pour des surfaces particulières, dont je donne quelques exemples au n. 4 de ce Mémoire.

Je démontre en général que *le nombre des systèmes distincts qu'on obtient en divisant par un nombre entier λ un système algébrique donné, admet un maximum fini σ indépendant de λ et du système envisagé.*

(3) PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques*, t. II, p. 241.

(4) Math. Annalen, *62*, p. 214, n° 10 [Queste «Opere», p. 352; N.d.R.].

(5) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2) *54* (1903) [Memoria XV, p. 173; N.d.R.].

On en tire que:

La base minima est formée par un groupe de $\varrho + \sigma - 1$ *courbes.*

Toute courbe de la surface F donnée s'obtient pourtant par les opérations d'addition et de soustraction appliquées aux courbes de la base minima.

§ 1. – Construction d'une base intermediaire.

1. Soit $(C_1 C_2 \cdots C_\varrho)$ une base des courbes algébriques tracées sur la surface F. Si $\varrho \geqq 2$, on peut supposer que deux (au moins) des systèmes linéaires

$$|C_1|, |C_2|, \cdots, |C_\varrho|$$

jouissent des propriétés suivantes:

1) L'ordre de leurs courbes est plus grand que l'ordre d'une courbe canonique de F (y compris les courbes exceptionnelles).

2) La *dimension virtuelle* attachée à chacun de ces systèmes est positive.

3) Leurs multiples d'ordre assez élevé renferment (partiellement) tout système donné à l'avance.

Ces conditions sont évidemment satisfaites si l'on prend

$$C_1 = A, \qquad C_2 = A + B,$$

A étant un multiple convenable d'une section plane (ou hyperplane) de F, et B une courbe algébriquement indépendante de A.

Cela posé, rappelons-nous la définition du *déterminant de la base* (6). Étant

$$n_{ik} = n_{ki} = [C_i C_k]$$

le nombre des points communs aux courbes C_i, C_k (ou le degré virtuel de C_i, lorsque $k = i$), le déterminant de la base est donné par la matrice

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1\varrho} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{\varrho 1} & n_{\varrho 2} & \cdots & n_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

On sait que *ce déterminant ne peut pas être nul.* Comme sa valeur est un nombre entier (positif ou négatif), *on pourra envisager une base dont le déterminant ait la valeur absolue minima. Eh bien, je dis qu'on obtient ainsi une base intermédiaire.*

Il suffira de prouver qu'étant donnée une base non intermédiaire $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ de déterminant D, on peut toujours construire une base nouvelle $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$ dont le déterminant Δ ait une valeur absolue $|\Delta| < |D|$.

(6) Math. Annalen, *Mémoire cité*, paragraphe VI.

En effet, la base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ n'étant pas intermédiaire, on pourra choisir sur F une courbe algébrique C telle que le coefficient λ de la relation

$$\lambda C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho \tag{3}$$

existant entre C et les courbes de la base, ne divise pas tout coefficient λ_i $(i = 1, 2, \cdots, \varrho)$. Supposons, par exemple, que λ ne divise pas le coefficient λ_1 et désignons par θ le plus grand commun diviseur des entiers λ, λ_1. On pourra alors déterminer deux autres entiers μ, μ_1 satisfaisant à l'équation

$$\lambda\mu + \lambda_1 \mu_1 = \theta.$$

Cela posé, supposons qu'il existe une courbe Γ_1 répondant au symbole

$$\mu C_1 + \mu_1 C,$$

et exprimons cette courbe au moyen des courbes $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$. On a tout d'abord

$$\lambda\Gamma_1 = \lambda\mu C_1 + \lambda\mu_1 C,$$

et, en comparant avec la (3),

$$\lambda\Gamma_1 \equiv \theta C_1 + \mu_1 \lambda_2 C_2 + \cdots + \mu_1 \lambda_\varrho C_\varrho.$$

Considérons maintenant le groupe de ϱ courbes

$$\Gamma_1, \Gamma_2 = C_2, \Gamma_3 = C_3, \cdots, \Gamma_\varrho = C_\varrho.$$

Entre le déterminant D de la base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ et le déterminant Δ de ce dernier groupe $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho)$, on a la relation [7]

$$\lambda^2 \Delta = \theta^2 D. \tag{4}$$

Il s'ensuit que le déterminant Δ n'est pas nul et, par suite, que le groupe $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$ forme une base [8]. Comme λ^2/θ^2 est un entier > 1, Δ résultera un diviseur de D, et l'on aura par conséquent

$$|\Delta| < |D|.$$

Lorsque le symbole $\mu C_1 + \mu_1 C$ ne représente pas des courbes effectives, on posera

$$\Gamma_1 = \mu C_1 + \mu_1 C + kC_2, \tag{5}$$

k étant un entier positif si grand qu'il existe le système

$$|\mu C_1 + \mu_1 C + kC_2|.$$

(7) Math. Annalen, *Mémorie cité*, formule (19).
(8) *Ibid.*, théorème VII.

Cela est toujours possible, car, par l'hypothèse 3°, parmi les systèmes $|C_2|, \cdots, |C_\varrho|$ on en trouve toujours un (au moins) dont les multiples d'ordre assez élevé renferment toute courbe donnée à l'avance.

Entre le déterminant Δ du groupe $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$ et le déterminant D, on a encore la relation (4), car, dans le déterminant formé par les coefficients des équivalences qui lient $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho$ aux courbes de la base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ on doit changer seulement l'élément $\mu_1 \lambda_2$ en $\mu_1 \lambda_2 + \lambda k$.

Remarque I. – Le procédé de la démonstration nous prouve aussi que *le déterminant d'une base intermédiaire est un diviseur commun aux déterminants des différentes bases.*

Remarque II. – Comme la courbe Γ_2 coincide avec C_2 et Γ_1 à cause de la relation (5) renferme un multiple arbitrairement fixé de C_2, les deux courbes Γ_1, Γ_2 de la base $(\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_\varrho)$ viennent satisfaire aux hypothèses 1°, 2°, 3°. En poursuivant de proche en proche, on voit que de telles hypothèses peuvent être faites au moins par rapport à deux courbes d'une base intermédiaire.

Cette remarque nous utile dans la suite.

2. Envisageons maintenant le cas où $\varrho = 1$. On peut prendre alors pour base toute courbe C de la surface F: le déterminant relatif se réduit au degré virtuel n de C, qui résultera nécessairement un entier > 0.

S'il existe sur F une base intermédiaire (C), comme pour toute courbe D de la surface on doit avoir

$$\mu D \equiv \mu \theta C,$$

la courbe C aura le degré virtuel minimum parmi les courbes tracées sur F. Le degré de toute courbe D résultera un multiple de n, et le nombre $[DE]$ des points où D coupe une autre courbe quelconque E de la surface, résultera un multiple du nombre $[CE]$. En particulier, en prenant pour courbe E une section plane de F, on voit que C a aussi l'ordre minimum parmi les courbes appartenant à F.

Mais *peut-on affirmer qu'en prenant sur la surface F, dont le nombre base a la valeur* $\varrho = 1$, *une courbe de degré (ou d'ordre) minimum, on obtient toujours une base intermédiaire*?

Malheureusement nous ne sommes pas en mesure de répondre à cette demande; toutefois les exemples que nous connaissons de surfaces ayant $\varrho = 1$ (le plan, les surfaces hyperelliptiques de Jacobi et de Picard, la surface la plus générale d'un ordre donné, etc.) tendent à faire pencher vers l'affirmative.

Mais cette difficulté n'empêche pas de prouver l'existence d'une base intermédiaire sur la surface F ayant $\varrho = 1$; il suffit pour cela d'élever à deux le nombre des courbes donnant la base.

Si l'on part, en effet, d'une base (C) qui ne soit pas intermédiaire, on pourra toujours considérer une courbe D telle que dans la relation

$$\lambda D \equiv \lambda_1 C$$

λ ne divise pas λ_1. En disant θ le plus grand commun diviseur de λ, λ_1, on construira, comme dans le cas $\varrho > 1$, la courbe virtuelle ou effective

$$\Gamma = \mu C + \mu_1 D,$$

μ, μ_1 étant deux entiers satisfaisant à la condition $\lambda\mu + \lambda_1 \mu_1 = \theta$. On en tire

$$\lambda\Gamma \equiv \theta C,$$

c'est-à-dire que la courbe Γ peut être virtuelle, mais le multiple $\lambda\Gamma$ est toujours une courbe effective.

Comme θ est un diviseur de λ, l'ordre de Γ vient être un diviseur de l'ordre de C. En poursuivant de proche en proche *on arrive à une dernière courbe (virtuelle ou effective) dont l'ordre divise l'ordre de toute autre courbe de F; c'est là une base intermédiaire.*

Lorsque la dernière courbe est virtuelle, on pourra toujours la regarder comme la différence $A - B$ de deux courbes effectives A, B [9], de sorte que *la base intermédiaire sera formée par ces deux courbes effectives.*

§ 2. – L'opération de division appliquée aux systèmes de courbes d'une surface algébrique.

3. Lorsque entre deux courbes A, B d'une surface F existe la relation

$$\lambda A \equiv B \qquad (\lambda \text{ entier positif}),$$

on dit que le système $\{A\}$ est obtenu en divisant par λ le système $\{B\}$.

L'opération de division n'est évidemment toujours possible; et *elle n'est pas nécessairement univoque*, comme nous le verrons plus tard sur quelques exemples.

Maintenant nous nous proposons de trouver en général une limite supérieure, dépendante seulement de la surface, pour le nombre des systèmes distincts qu'on obtient en divisant un système continu quelconque par un nombre entier.

Soit m l'ordre de la courbe composée d'une courbe canonique et des courbes exceptionnelles de F, et soit A_1 une courbe d'ordre $l > m$, tracée sur la surface F de genre numérique p_a, et donnant lieu à une dimension virtuelle

$$n - \pi + p_a + 1 \geqq 0,$$

où n, π sont respectivement le degré et le genre virtuels de A_1. On pourra alors parler du système complet *bien déterminé* $\{A_1\}$ [10].

(9) *Voir* F. Severi, Rendiconti del R. Istituto lombardo, (2) *38* (1905), p. 859 [Nota XXVII, p. 325; N.d.R.].

(10) F. Severi, Atti del R. Istituto veneto, *65* (1906), p. 638 [Nota XXXI, p. 400; N.d.R.].

S'il y a sur F des systèmes continus $\{A\}$ distincts de $\{A_1\}$, satisfaisant aux conditions

$$n = [A_1 A_1] = [AA_1] = [AA],$$

un multiple convenable de A_1 résultera algébriquement équivalent au même multiple de A (11), et par suite les systèmes $\{A\}$ auront le même ordre et le même genre de $\{A_1\}$; de sorte que tout système $\{A\}$ sera déterminé univoquement par une quelconque de ses courbes. Le nombre des systèmes $\{A\}$ étant évidemment fini, nous pouvons désigner ces différents systèmes par

$$\{A_2\}, \{A_3\}, \cdots, \{A_\sigma\}.$$

Soit $\{B_1\}$ un système continu satisfaisant aux mêmes conditions de $\{A_1\}$ (ordre $l' > m$, dimension virtuelle non négative). Alors les courbes, *a priori* virtuelles,

$$B_1 + A_1 - A_2, B_1 + A_1 - A_3, \cdots, B_1 + A_1 - A_\sigma,$$

auront l'ordre $l' > m$ et la dimension virtuelle non négative, de sorte qu'on pourra envisager les systèmes continus

$$\{B_i\} = \{B_1 + A_1 - A_i\} \qquad (i = 2, 3, \cdots, \sigma),$$

satisfaisant aux conditions

$$[B_1 B_1] = [B_1 B_i] = [B_i B_i].$$

On en tire que le nombre σ' des systèmes $\{B_i\}$ est $\geqq \sigma$. En partant des systèmes $\{B_i\}$ on arrive analoguement à la conclusion $\sigma \geqq \sigma'$, et l'on déduit par suite $\sigma = \sigma'$.

Le nombre σ reste donc indépendant du système $\{A\}$ dont on part, pourvu que soient remplies les conditions relatives à l'ordre et à la dimension virtuelle du système.

Cela posé, considérons une courbe quelconque C de la surface et supposons qu'il existe δ courbes $D_1, D_2, \cdots, D_\delta$ telles qu'il soit

$$\lambda D_1 \equiv \lambda D_2 \equiv \cdots \equiv \lambda D_\delta \equiv C,$$

c'est-à-dire qu'en divisant par λ le système $\{C\}$, on obtient δ systèmes *distincts*. Je dis que $\delta \leqq \sigma$.

Envisageons en effet les courbes (*a priori* virtuelles)

$$A_1 + D_1 - D_2, A_1 + D_1 - D_3, \cdots, A_1 + D_1 - D_\delta.$$

Comme l'ordre de ces courbes est $l > m$ et la dimension virtuelle en est $\geqq 0$, il s'agira de courbes effectives et les systèmes continus

$$\{A_i'\} = \{A_1 + D_1 - D_i\} \qquad (i = 2, 3, \cdots, \delta),$$

(11) Math. Annalen, *Mémoire cité*, théorème I.

satisfaisant aux conditions

$$[A_1 A_1] = [A_1 A_i'] = [A_i' A_i'],$$

seront compris entre les systèmes $\{A_i'\}$. Il faudra donc que $\delta \leqq \sigma$. On arrive, partant, à la conclusion suivante:

Le nombre des systèmes continus distincts qu'on peut obtenir en divisant un système quelconque par un nombre entier, ne peut pas surpasser une certaine limite σ dépendant seulement de la surface.

Remarque. – Considérons deux courbes C, D *satisfaisant aux conditions*

$$[CC] = [CD] = [DD],$$

c'est–à–dire deux sous–multiples d'un même système suivant un certain nombre entier. On démontre aisément que *le moindre entier pour lequel* $\lambda C \equiv \lambda D$ *ne peut pas surpasser la limite* σ *dont on parle ci–dessus.* En effet, les $\lambda - 1$ systèmes distincts

$$\{A_1 + iC - iD\} \qquad (i = 1, \cdots, \lambda - 1)$$

sont des systèmes $\{A_i'\}$ et, par suite, $\lambda - 1 \leqq \sigma - 1$.

4. *Exemples de surfaces sur lesquelles la division est univoque.* – Un exemple de surfaces ayant $\sigma = 1$ (ainsi que $\varrho = 1$) est donné, d'après M. Noether, par les surfaces (de l'espace S_3) les plus générales de leur ordre; un deuxième exemple, où ϱ peut etre quelconque, est donné par les surfaces des couples de points de deux courbes irrationnelles (distinctes ou coincidentes) [12].

Un autre exemple très intéressant est donné par le proposition suivante:

Sur toute surface, régulière ou irrégulière, ayant la courbe canonique d'ordre zéro, la division est une opération univoque.

On sait, d'après M. Enriques [13], que le genre numérique d'une surface F ayant la courbe canonique d'ordre zéro (et par suite $p_g = 1$), peut recevoir seulement les valeurs

$$p_a = 1 \quad \text{ou} \quad p_a = -1,$$

c'est–à–dire qu'il s'agit ou bien d'une surface régulière ou bien d'une surface hyperelliptique de rang 1 (surface de Jacobi ou de Picard).

On doit démontrer que deux courbes C, D tracées sur la surface F et satisfaisant aux conditions

$$[CC] = [CD] = [DD],$$

sont linéairement ou algébriquement équivalentes (suivant que F est régulière ou irrégulière).

(12) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica* (cité). Remarque à la fin du n° 11.

(13) Rendiconti della R. Acc. di Bologna, 9 décembre 1906.

Considérons d'abord le cas où F est régulière. Si la courbe C, de genre π, est irréductible et dépourvue de points multiples, le système $|D|$, du même ordre de $|C|$, doit renfermer, totalement, le système $|C|$, car il ne peut pas couper sur une C une série $g_{2\pi-2}$ de dimension $> \pi - 1$.

A la même conclusion on arrive aussi lorsque les C, D sont des courbes quelconques. Envisageons en effet sur F une courbe H irréductible de genre ϱ, et observons qu'il existe le système linéaire

$$|K| = |H + C - D|,$$

car à la courbe $H + C - D$ est attachée une dimension virtuelle positive $(= \varrho)$, En appliquant le raisonnement exposé ci-dessus, on conclut que

$$H \equiv K \qquad \text{et, par suite,} \qquad C \equiv D.$$

Examinons maintenant l'hypothèse $p_a = -1$.

Si la surface F a le diviseur $\delta = 1$, c'est-à-dire s'il s'agit d'une surface de Jacobi, surface des couples de points d'une courbe Γ de genre 2, la proposition qu'on veut établir est contenue, quoique sous une forme différente, dans mon Mémoire cité au commencement de ce numéro. Mais on peut établir la chose par une voie géométrique, comme il suit.

Envisageons sur F le système complet Σ, de genre, indice, degré, dimension, égaux à 2, qui renferme totalement les courbes C répondant aux points de Γ. On démontre aisément, comme nous l'avons fait, M. Enriques et moi, dans notre Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, que toute courbe D satisfaisant aux conditions

$$[CC] = [CD] = [DD] = 2$$

appartient à Σ. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la variété ∞^1, de genre 2, formée par les courbes de Σ issues par un point de D, renfermerait une involution de genre et ordre égaux à 2, qui répondrait aux points de D.

On en tire que deux courbes H, K satisfaisant aux conditions arithmétiques

$$[HH] = [HK] = [KK], \tag{6}$$

appartiennent à un même système continu, car le système continu bien déterminé $\{C + H - K\}$, auquel est attachée une dimension virtuelle $= 0$, coïncide avec Σ.

Si le diviseur de F a une valeur $\delta > 1$, c'est-à-dire si F est birationnellement identique à une involution engendrée sur une surface de Jacobi Φ par une transformation de deuxième espèce cyclique d'ordre δ, on considérera sur F le système continu Σ_δ répondant au système Σ de Φ. Les courbes C_δ de Σ_δ ont le genre effectif 2 et possèdent $\delta - 1$ points doubles. Je dis, réciproquement, que toute courbe D_δ douée de $\delta - 1$ points doubles et satisfaisant, par rapport à C_δ, aux conditions arithmétiques habituelles, appartient à Σ_δ.

En effet, par ce qui précède, à D_δ doit répondre sur Φ une courbe D appartenant au système continu déterminé par une C et par les $\delta - 1$ courbes $C', C'', \cdots, C^{(\delta-1)}$ conjuguées à C, et comme les courbes D, $C+C'+\cdots+C^{(\delta-1)}$ ont le même nombre $\delta(\delta-1)$ de points doubles, en appliquant un principe de continuité du à M. Enriques, on en tire que D ne peut pas contenir une partie irréductible où varient deux ou plusieurs points répondant à un même point mobile sur D_δ; c'est-à-dire que D est formé par δ courbes conjuguées du système Σ et, par suite, que D_δ appartient à Σ_δ.

Si la courbe D_δ, tout en satisfaisant aux conditions arithmétiques habituelles, n'a pas de points doubles, de sorte que son genre a la valeur $\delta+1$, le système linéaire $|D_\delta|$ aura la dimension $\delta-1$, et l'on pourra toujours envisager une courbe de ce système douée de $\delta-1$ points doubles. Cette courbe, et par conséquent toute courbe D_δ, restera algébriquement équivalente à C_δ.

Cela posé, on en déduit tout de suite, comme dans le cas traité ci-dessus d'une surface de Jacobi, que deux courbes H, K satisfaisant aux conditions (6) sont aussi équivalentes (algébriquement).

En particulier, comme une surface hyperelliptique quelconque de genre 1 (régulière ou non) a la courbe canonique d'ordre zéro, on pourra énoncer que, *sur toute surface hyperelliptique de genre géométrique* 1, *la division est une opération univoque.*

Il s'ensuit que *sur ces surfaces toute base intermédiaire est une base minima.*

5. *Exemples de surfaces où la division n'est pas univoque.* – On a de tels exemples en considérant les surfaces qui ne possèdent pas de courbes canoniques, tout en renfermant des courbes pluricanoniques d'ordre zéro. S'il s'agit de surfaces régulières, on tombe sur les surfaces, étudiées par M. Enriques, qui se ramènent birationnellement à une surface d'ordre 6 passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre [14]; s'il s'agit de surfaces irrégulières, on tombe sur des surfaces hyperelliptiques de rang > 1 [15].

§ 3. – Construction d'une base minima.

6. Considérons tout d'abord le cas où le nombre base ρ de la surface F soit > 1: on peut supposer (n° 1, *Remarque II*) que deux courbes d'une base intermédiaire $(C_1, C_2, \cdots, C_\rho)$ construite sur F, remplissent les conditions 1°, 2°, 3° du n° 1,

Soit C_1 une de ces courbes et soit σ le caractère de la surface F introduit au n° 3. On aura alors justement $\sigma - 1$ systèmes continus

$$\{D_1\}, \{D_2\}, \cdots, \{D_{\sigma-1}\},$$

(14) Memorie della Società italiana delle Scienze, (3) *14* (1906), p. 327.

(15) F. Enriques e F. Severi, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 5 janvier 1908 [Nota XXXVI, p. 437; N.d.R.].

tels qu'il soit

$$[C_1\,C_1] = [C_1\,D_i] = [D_i\,D_i] \qquad (i = 1, 2, \cdots, \sigma - 1).$$

Je dis que *le groupe des courbes*

$$C_1, C_2, \cdots, C_\varrho, \qquad D_1, D_2, \cdots, D_{\sigma-1}$$

constitue une base minima, c'est-à-dire qu'étant donnée une courbe quelconque C de la surface F, on a toujours une relation de la forme

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho + \mu_1 D_1 + \cdots + \mu_{\sigma-1} D_{\sigma-1},$$

les λ, μ étant des nombres entiers déterminés par C.

En effet, comme $(C_1\,C_2 \cdots C_\varrho)$ est une base intermédiaire, on a

$$\varepsilon C \equiv \varepsilon\lambda_1 C_1 + \varepsilon\lambda_2 C_2 + \cdots + \varepsilon\lambda_\varrho C_\varrho,$$

les ε, λ étant des entiers. Cela posé, envisageons les deux courbes

$$C \quad \text{et} \quad D = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho$$

dont la deuxième, tout en étant un sous-multiple d'une courbe effective, peut être une courbe virtuelle.

Moyennant C, D on peut construire deux courbes

$$C_0 = C + \delta C_1, \qquad D_0 = D + \delta C_1$$

(où δ est un entier assez grand) ayant l'ordre aussi élevé qu'on veut, le dimension virtuelle positive et satisfaisant en outre aux relations

$$[C_0\,C_0] = [C_0\,D_0] = [D_0\,D_0]; \tag{7}$$

de sorte que les symboles

$$D_0, D_0 + C_1 - D_1, D_0 + C_1 - D_2, \cdots, D_0 + C_1 - D_{\sigma-1} \tag{8}$$

représentent σ courbes effectives algébriquement distinctes, satisfaisant par rapport à C_0 aux conditions du type (7). Il s'ensuit, par la définition même du caractère σ, que C_0 est algébriquement équivalente à une courbe de la série (8); soit, par exemple,

$$C_0 \equiv D_0 + C_1 - D_1$$

et, par suite,

$$C \equiv (\lambda_1 + 1)\,C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho - D_1,$$

On obtient donc $\varrho + \sigma - 1$ courbes donnant la base minima.

Considérons maintenant le cas où $\varrho = 1$. Comme un multiple convenable de la courbe virtuelle ou effective $C_1 \equiv A - B$, donnant sur F une base intermédiaire, peut représenter une courbe d'un ordre arbitrairement grand et de dimension virtuelle positive, en désignant par D un tel multiple et par

$$\{D_1\}, \{D_2\}, \cdots, \{D_{\sigma-1}\}$$

les $\sigma - 1$ systèmes continus satisfaisant par rapport à D aux conditions arithmétiques habituelles, on en déduit, comme dans le cas $\varrho > 1$, que la base minima sur F est donnée par les courbes

$$C_1 , D_1 , D_2 , \cdots , D_{\sigma-1} ,$$

dont la première peut être virtuelle. Si l'on ne veut pas parler de courbes virtuelles, on aura à considérer la base (minima) formée par les courbes $A , B , D_1 , D_2 , \cdots , D_{\sigma-1}$, qui sont au nombre de $\sigma + 1 \; (= \varrho + \sigma)$.

7. On obtient donc le théorème suivant:

Sur toute surface algébrique on peut toujours construire une base minima des courbes qui lui appartiennent. Cette base est formée par $\varrho + \sigma - 1$ *courbes,* ϱ *étant le nombre base de la surface et* σ *le nombre maximum des systèmes continus distincts, qu'on obtient en divisant par un entier un système continu quelconque tracé sur la surface.*

Pour $\varrho = 1$ nous ne sommes pas en mesure d'exclure qu'une des σ courbes de la base minima devienne virtuelle; tout en admettant que ce cas soit possible, on peut toutefois construire une base minima formée par $\sigma + 1$ courbes effectives.

8. *Exemple*: La base minima sur une surface de Kummer à modules arbitraires.

La construction d'une base sur la surface de Kummer Φ (surface de quatrième ordre possédant 16 points doubles) est singulièrement instructive, car elle *donne l'occasion d'éclaircir, au point de vue invariantif, le rôle qui est joué, dans la formation de la base, par les points multiples isolés d'une surface.*

D'après un théorème bien connu de M. Humbert, toute courbe algébrique tracée sur Φ a l'ordre pair $2n$ et peut être envisagée comme l'intersection complète de Φ avec une surface d'ordre n, qui touche Φ le long de la courbe donnée.

Au premier abord on serait donc tenté de conclure que, si C est une section plane de Φ, toute courbe D de la surface est liée à C par une relation du type

$$2D \equiv nC$$

et, par suite, que le nombre base de Φ a la valeur $\varrho = 1$, (C) étant une base. Mais, au point de vue des transformations birationnelles, il faut envisager la chose d'une manière différente. En effet, si D est une conique de la surface, comme le degré virtuel de D a la valeur -2, la courbe $2D$ aura le degré -8 et par conséquent elle ne pourra pas être équivalente à une section plane de Φ.

Pour obtenir une telle section *il faut ajouter à la courbe* $2D$ *les six points doubles de* Φ *qui lui appartiennent*, en tant qu'on envisage ces points ou, si on l'aime mieux, leurs domaines, comme des courbes rationnelles de degré virtuel -2.

Ce n'est pas une convention établit ainsi; car en transformant la Φ en une surface Ψ de l'hyperespace dépourvue de points multiples et de courbes exceptionnelles (moyennant le système linéaire des surfaces d'un ordre arbitraire passant par les 16 points doubles) on obtient sur Ψ, en correspondance des points doubles, 16 *courbes* rationnelles de degré virtuel — 2 (et 16 courbes analogues répondant aux coniques de Φ). En faisant abstraction des points doubles de Φ, on n'aurait donc pas de propriétés invariantes vis–à–vis des transformations birationnelles.

Envisageons le nombre ϱ d'après M. Picard, en considérant les courbes logarithmiques des intégrales simples de troisième espèce attachées à Φ, et désignons par $x = 0$ l'équation du plan tangent à Φ le long de la conique D, et par $y = 0$ l'équation d'un plan arbitraire de l'espace, coupant Φ suivant la courbe C.

Alors on peut dire que l'intégrale de troisième espèce $\log x/y$ possède comme uniques lignes logarithmiques les D, C, en tant qu'on ne regarde pas les points doubles de Φ comme des courbes, c'est–à–dire lorsqu'on envisage la question au point de vue projectif [16]; mais, si l'on veut énoncer une propriété invariante vis–à–vis des transformations birationnelles, il faut dire que $\log x/y$ possède, outre les C, D, *six courbes logarithmiques infiniment petites se réduisant aux domaines des six points doubles* appartenant à $x = 0$.

Il suit de ces remarques qu'à la formation de la base doivent contribuer aussi les points doubles de Φ; c'est–à–dire que, pour obtenir une véritable base au point de vue invariantif, on doit considérer le groupe formé par une courbe quelconque de Φ, par exemple par une conique, et par un certain nombre de points doubles. Il est aisé de voir qu'il faut prendre *tous* les 16 points doubles.

Considérons, en effet, le déterminant Δ du groupe formé par une conique D_1 et par les points doubles de Φ, regardés comme des courbes rationnelles $D_2, D_3, \cdots, D_{17}$, de degré virtual — 2. Si $D_2 D_3, \cdots, D_7$ sont les points doubles appartenant à D_1, en posant

$$n_{ik} = [D_i D_k],$$

on aura

$$n_{ii} = -2, \qquad n_{12} = n_{13} = \cdots = n_{17} = 1, \qquad n_{1j} = 0 \qquad (j > 7),$$

$$n_{kl} = 0 \qquad (k, l \neq 1).$$

Par des calculs faciles, on trouve que le déterminant de dix–septième ordre Δ a la valeur 2^{16}. Cela signifie que les 17 courbes envisagées ne sont pas dépendantes et, par suite, qu'elles sont toutes essentielles dans la formation de la base. On conclut, partant, que *le nombre base d'une surface de Kummer à modules arbitraires a la valeur* $\varrho = 17$.

(16) C'est le point de vue de M. Picard. *Voir* PICARD et SIMART, t. II, p. 452.

Remarque. – Les considérations développées dans le cas particulier d'une surface de Kummer, nous montrent qu'en ayant une surface Φ donnée de d points doubles coniques isolés, lorsqu'on veut regarder ces points doubles comme des courbes rationnelles de degré -2, ce qui est nécessaire au point de vue invariantif, on doit modifier la *formule de M. Picard* (17) liant le nombre base ϱ au nombre ϱ_0 des intégrales doubles de deuxième espèce attachées à Φ, en l'écrivant sous la forme

$$\varrho_0 = N + 2d - 4p - (m - 1) + 2r - (\varrho - 1).$$

On obtient tout naturellement cette formule, en la dérivant de la forme invariantive

$$\varrho_0 = I + 4(p_g - p_a) - \varrho + 2,$$

qu'on peut donner à la formule de M. Picard, lorsqu'il n'existe pas des points doubles isolés; p_g, p_a désignent ici les genres de Φ, et I l'invariant relatif de Zeuthen–Segre, attaché à Φ (18).

En particulier, pour la surface de Kummer on a

$$I = 20, \qquad p_g = p_a = 1, \qquad \varrho = 17,$$

et l'on en tire, par conséquent,

$$\varrho_0 = 5 \text{ (19)}.$$

9. Revenons maintenant à la surface de Kummer Φ. La base $(D_1 D_2 \cdots D_{17})$ que nous avons construite n'est pas minima, car une conique H de Φ, différente de D_1, ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire (à coefficients entiers) des courbes D_i, tandis qu'une convenable de telles combinaisons est équivalente au *double* de H.

En vertu de la proposition démontrée au n. 4, pour obtenir sur Φ une base minima, il suffira d'y construire une base intermédiaire.

Comme toute courbe tracée sur Φ s'exprime par une combinaison linéaire des coniques et des points doubles, il s'agira de choisir 17 de ces 32 éléments de telle façon que le *déterminant* relatif, tout en étant différent de zéro, ait la valeur absolue minima (qui sera nécessairement une puissance positive de 2, car il doit être un diviseur, du même signe, de 2^{16}).

En désignant les points doubles et les coniques de Φ au moyen du symbolisme de M. Humbert (20), on démontre aisément que *le groupe des six coniques*

$$\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \alpha\beta', \alpha\gamma', \alpha\delta'$$

(17) PICARD et SIMART, t. II, p. 409. En définitive, nous remplaçons par $\varrho + d$ le nombre ϱ de M. Picard. Il n'y a ici aucune contradiction, puisqu'il s'agit de deux points de vue différents.

(18) La forme invariantive donne tout de suite la forme projective de la formule de Picard, lorsqu'il y a aussi des points multiples isolés d'ordre s; on trouve qu'il faut écrire $\sum s$ au lieu de $2d$, la somme $\sum$ étant étendue aux points multiples isolés de la surface.

(19) PICARD et SIMART, t. II, p. 452.

(20) Journal de Math., 1893, p. 58.

et des onze points doubles

$$(\alpha\alpha')\,,\ (\alpha'\,\beta)\,,\ (\alpha'\,\gamma)\,,\ (\alpha'\,\delta)\,,\ (\alpha\delta')\,,\ (\beta\delta')\,,\ (\beta'\,\delta),$$
$$(\beta\gamma')\,,\ (\beta'\,\gamma)\,,\ (\gamma\delta')\,,\ (\gamma'\,\delta)$$

donne une base minima sur la surface de Kummer.

On représente, en effet, les 5 points doubles restant au moyen des courbes de cette base, par des relations du type

$$(\alpha\beta') \equiv 2\gamma\gamma' - 2\alpha\alpha' + (\gamma\beta') + (\gamma\delta') + (\gamma'\,\beta) + (\gamma'\,\delta) - (\alpha'\,\beta) - (\alpha'\,\delta) - (\alpha'\,\gamma),$$

qu'on obtient en exprimant que « le double de toute conique, augmenté des 6 points doubles qui lui appartiennent, est équivalent à une section plane de Φ ».

Les 10 coniques qui n'appartiennent pas à la base, sont données par des relations qu'on obtient en exprimant que « les faces d'un *tétraèdre de Göpel* (groupe de 4 plans singuliers n'ayant pour sommet aucun point singulier) touchent la surface Φ suivant 4 coniques d'une même quadrique [21] ».

Le déterminant de la base minima a la valeur 64. – On arrive à cette conclusion sans difficulté, car on connaît le nombre des points communs à deux courbes quelconques de la base.

10. *Aperçu sur les variètès à plusieurs dimensions.* – Tandis que la démonstration de l'existence d'une base sur une surface présente des difficultés essentielles, il n'arrive pas ainsi lorsqu'il s'agit des variétés à plusieurs dimensions, car *on peut déduire aisément l'existence d'une base pour la totalité des variétés algébriques à* $r-1$ *dimensions appartenant à une variété à* $r\ (\geqq 3)$ *dimensions, de l'existence d'une base sur une variété à* $r-1$ *dimensions.*

Ainsi, par exemple, on arrive à démontrer l'existence d'une base pour la totalité des surfaces tracées sur une variété algébrique V à trois dimensions, en remarquant que deux surfaces algébriques A , B de V, qui coupent une section hyperplane de V suivant deux courbes algébriquement équivalentes, sont elles–mêmes algébriquement équivalentes, c'est–à–dire qu'elles sont renfermées totalement dans un même système continu.

Cette proposition nous assure aussi que le nombre des systèmes distincts, qu'on obtient en appliquant la division par un entier à un système continu de surfaces, admet un maximum fini, dépendant seulement de V; et *cela amène à la construction d'une base minima pour les surfaces appartenant à* V.

L'existence de la base sur une variété à plusieurs dimensions pourra donner peut–être une solution à la question, soulevée par M. Poin-

(21) Cette propriété peut se regarder comme une conséquence de l'univocité de la division sur la surface de Kummer Φ. En effet, la courbe A formée par les coniques d'un groupe de Göpel et par les 12 points doubles appartenant aux arêtes du tétraèdre a le degré virtuel 16, et elle est coupée en 16 points par la section B de Φ avec une quadrique quelconque, de sorte qu'on a $[AA] = [AB] = [BB] = 16$ et, par suite, $A \equiv B$.

caré [22], relative à la construction des groupes de p points d'une courbe de genre p

$$f(x, y) = 0,$$

qui appartiennent au domaine de rationalité des coefficients de f [23]. Il s'agit là de fixer sur f un *système fondamental* d'un nombre fini de ces groupes, de telle façon qu'on en déduise tout autre groupe analogue, par des opérations rationnelles.

Je crois qu'on pourra arriver à ce résultat, en partant de la base sur la variété algébrique engendrée au varier des coefficients de la courbe f.

(22) *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*, Journal de Math., (5) 7 (1901), p. 161.

(23) On veut dire que toute fonction symétrique des coordonnées des points d'un tel groupe appartient au domaine de rationalité des coefficients de f.

XLI.

LE SUPERFICIE ALGEBRICHE CON CURVA CANONICA D'ORDINE ZERO

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *68* (1908), pp. 247–260.

La questione di cercare il numero dei moduli da cui dipendono le superficie algebriche regolari con curva canonica d'ordine zero (superficie con tutti i generi uguali ad 1) e di assegnare i tipi birazionalmente distinti cui queste superficie possono ricondursi, ha richiamato varie volte l'attenzione dei geometri.

Di tale questione intendo appunto occuparmi nella presente Nota, ove dimostro che il numero dei moduli delle suddette superficie è precisamente 19; e che inoltre esse distribuisconsi in infinite famiglie birazionalmente irriducibili, corrispondenti ai valori d'un intero π, che può assegnarsi ad arbitrio, e che rappresenta il minimo genere delle curve tracciate sulle superficie medesime.

Il numero–base della superficie generica F d'una di queste famiglie, è uguale ad 1, cosicché, prendendo come modello di F una superficie normale d'ordine $2\pi - 2$ dello spazio S_π, su questa non esistono che curve intersezioni complete!

Il numero dei moduli d'una classe di superficie algebriche qualunque, è stato recentemente ricercato da Enriques, il quale però in generale non ha potuto che assegnarne un limite inferiore: qui, profittando anche di questo risultato, trovo, come ho detto, il numero preciso dei moduli per le nostre superficie.

All'altro risultato, relativo alla base sopra una superficie di generi 1, era pervenuto indipendentemente da me il sig. Enriques. La dimostrazione che qui svilupperò, e che poggia talora sopra considerazioni assai delicate, concorda con quella da lui accennata in una Nota recentissima [1]. Questa coincidenza deriva evidentemente da ciò, che il nostro studio comune sulle superficie iperellittiche [2] ci ha portato a considerare da un medesimo punto di vista la questione delle superficie F coi generi uguali ad 1.

(1) *Le superficie di genere 1.* Rendiconti della R. Acc. di Bologna, (2) *13* (1908), pp. 25–28.

(2) F. ENRIQUES–F. SEVERI, *Intorno alle superficie iperellittiche*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) *16*$_1$ (1907), pp. 443–453; *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (5) *17*$_1$ (1908), pp. 4–9 [queste «Opere», XXXIII, p. 410 e XXXVI, p. 437; N.d.R.]. La Memoria *in extenso* è in corso di stampa negli «Acta Mathematica» sotto il titolo: *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, Acta Math., *32* (1909), pp. 283–392; ibidem, *33* (1910), pp. 321–403 [apparirà nel Vol. II di queste «Opere»; N.d.R.].

Termino la presente Nota con alcune considerazioni sul numero–base e sugl'integrali doppi di 1ª specie appartenenti ad una superficie F, anche a moduli particolari. Il numero–base può assumere tutti i valori (interi) compresi tra il minimo ed il massimo possibili.

1. Nel seguito indicherò in modo generico con F una superficie regolare con curva canonica d'ordine zero.

Dato ad arbitrio l'intero $\pi\ (\geq 3)$, cerchiamo anzitutto nello S_π l'infinità delle superficie F, d'ordine $2\pi - 2$ (normali), birazionalmente distinte, con 4 punti doppi conici.

Ci serviremo a tal uopo del teorema di Bachet–Legendre, secondo cui ogni intero può decomporsi nella somma di 4 quadrati [3]. Posto

$$\pi - 3 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2 \qquad (\nu_i \geq 0), \tag{1}$$

si consideri nello spazio ordinario una superficie Φ del 4° ordine, priva di punti doppi, e possedente 4 curve razionali $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ degli ordini rispettivi $2\nu_1, 2\nu_2, 2\nu_3, 2\nu_4$, non secantisi a due a due e non aventi punti multipli.

Come risulta da note ricerche intorno alle curve algebriche tracciate sopra una superficie del 4° ordine [4], la condizione che s'impone ad una superficie del 4° ordine volendo che contenga 4 curve come le Γ, equivale a quattro condizioni semplici: vi sono cioè ∞^{30} superficie Φ.

Sopra una Φ fissata, ciascuna delle Γ non è eccezionale [5] ed ha pertanto il grado virtuale -2; sicché, indicando con $|C|$ il sistema delle sezioni piane di Φ, il sistema

$$|D| = |C + \nu_1 \Gamma_1 + \nu_2 \Gamma_2 + \nu_3 \Gamma_2 + \nu_4 \Gamma_4|$$

risulterà di genere

$$\pi = 3 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2$$

e di grado

$$n = 4 + 2\,(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2) = 2\pi - 2\,.$$

(3) Di tale teorema si giovano i sigg. G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS per ridurre al 4° ordine certe superficie iperellittiche: *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti*, Memorie dei XL, (3) *25* (1908), pp. 253–343; p. 317.

(4) M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Abhandl. der Ac. der Wissensch. zu Berlin (1883); K. ROHN, *Die Raumcurven auf den Flächen vierter Ordnung*, Beri. der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissen. zu Leipzig, *49* (1897), pp. 631–663.

(5) Da che su Φ il sistema canonico è segato da superficie d'ordine zero. — Del resto vale in generale la proprietà: *sopra una superficie d'ordine* $2\pi - 2$ *dello* S_π $(\pi \geq 3)$, *con curva canonica d'ordine zero, non vi posson esser curve eccezionali*, giacché se Γ fosse una curva eccezionale d'ordine μ, il sistema $|C + \Gamma|$ (C sezione iperpiana della superficie) avrebbe il genere $\varpi = \pi + \mu - 1$ e il grado $\alpha = 2\pi - 3 + 2\mu = 2\varpi - 1$.

Di più le curve Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4, son fondamentali pel sistema $|D|$, perché

$$[D\Gamma_i] = [C\Gamma_i] - \nu_i [\Gamma_i \Gamma_i] = 0,$$

ove col simbolo $[D\ \Gamma_i]$ (e analoghi) s'indica il numero dei punti comuni alla coppia di curve D , Γ_i (e analoghe).

Si vede pure con facilità che il sistema $|D|$:

a) è irriducibile: ciò segue dal fatto che il sistema $|C + \Gamma_i|$ — di dimensione $= \pi + 2\nu_i - 2$ — non può avere come parte fissa la Γ_i;

b) è semplice: fissati infatti due punti P , Q di Φ (esterni alle Γ) può sempre costruirsi una D spezzata in C e nelle Γ, che passi per P e non per Q;

c) non ha punti base ($n = 2\pi - 2$).

La Φ può quindi riferirsi birazionalmente ad una superficie normale F, d'ordine $2\pi - 2$, dello spazio S_π, sulla quale il sistema $|E|$, corrispondente a $|D|$, venga segato dagl'iperpiani. Alle curve fondamentali Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4, risponderanno su F 4 punti P_1 , P_2 , P_3 , P_4, tali che le sezioni iperpiane per uno, P_i, di essi, essendo imagini delle curve $D - \Gamma_i$, avranno il genere $\pi - 1$ e il grado $n - 2$: onde i punti P risulteranno doppi e anzi conici, poiché il loro intorno è imagine d'una curva irriducibile.

Si ha in tal modo nello S_π una F d'ordine $2\pi - 2$, con 4 punti doppi conici.

Si osserverà subito che *ogni* F d'ordine $2\pi - 2$ appartenente allo S_π e dotata di 4 punti doppi conici, P_1 , P_2 , P_3 , P_4, può ottenersi nel modo esposto.

Si decomponga infatti $\pi - 3$ come indica la (1), e, detto $|D|$ il sistema delle sezioni iperpiane di F, si consideri il sistema $|D - \nu_1 P_1 - \nu_2 P_2 - \nu_3 P_3 - \nu_4 P_4|$, che è costituito da tutte le D passanti per ognuno dei P_i con $2\nu_i$, rami.

Si avrà così su F un sistema irriducibile di grado 4 e di genere 3, che – in senso invariantivo – sarà privo di punti base e avrà la dimensione 3. Mediante questo sistema la F si muta in una superficie di 4° ordine – che può *particolarizzarsi* in una quadrica doppia – con 4 curve razionali Γ_i, degli ordini $2\nu_i$, corrispondenti agl'intorni dei punti P_i. Le Γ_i non hanno evidentemente punti doppi, né si secano a due a due.

Tante son dunque le F birazionalmente distinte, quante le Φ birazionalmente distinte.

Ora l'infinità di queste Φ si valuta nel modo seguente:

Data una Φ, l'insieme di tutte quelle che sono ad essa birazionalmente identiche, forma una varietà algebrica, eventualmente spezzata. Quel che è certo si è che *una parte irriducibile di questa varietà, è formata da* Φ *tra loro omografiche.*

Entro una di queste parti, si fissi infatti una superficie Φ_0 e si faccia tendere con continuità Φ a Φ_0. Fra le trasformazioni birazionali che mutano Φ in Φ_0, ve n'è una (almeno) τ, che, col tendere di Φ a Φ_0, tende all'identità.

Il sistema lineare, tracciato su Φ_0, rispondente, mediante τ, al sistema lineare $|C|$ delle sezioni iperpiane di Φ, si muove con continuità tendendo al sistema $|C_0|$ delle sezioni piane di Φ_0.

Poiché $|C_0|$ non appartiene ad un sistema continuo più ampio di curve dello stesso ordine (da che Φ_0 è regolare), due ipotesi sono possibili:

1) Mediante τ al sistema $|C|$ risponde il sistema *fisso* $|C_0|$, e quindi Φ e Φ_0 sono proiettive.

2) Mediante τ a $|C|$ risponde un sistema che può ridursi per continuità al sistema $|C_0|$, aumentato di componenti eccezionali.

Ma quest'ultima ipotesi si scarta subito, ricordando (ved. nota (5)) che Φ_0 non può possedere curve eccezionali.

La infinità delle Φ che son birazionalmente identiche ad una data, uguaglia pertanto l'infinità delle Φ ad essa omograficamente identiche, e quindi:

Nello S_π *le* F *d'ordine* $2\pi - 2$, con 4 *punti doppi conici, birazionalmente distinte tra loro, sono* ∞^{15}.

2. Applichiamo ora il risultato di F. Enriques [6], in virtù del quale si può affermare che le F birazionalmente distinte, d'ordine $2\pi - 2$, nello spazio S_π, sono $\infty^{19+\theta}$ $(\theta \geq 0)$.

L'imposizione di un punto doppio conico ad una F, equivale ad una condizione semplice (al più), come si vede per esempio proiettando la totalità delle F sopra uno spazio S_3.

L'imposizione di 4 punti doppi conici equivarrà dunque a $4 - \varepsilon$ $(0 \leq \varepsilon \leq 4)$ condizioni; onde la infinità delle F birazionalmente distinte, con 4 punti doppi conici (almeno), risulterà uguale a $15 + \theta + \varepsilon$. Confrontando col risultato del nº prec., si conclude che $\theta = \varepsilon = 0$.

Il procedimento seguìto da Enriques per contare i moduli d'una superficie algebrica, mostra come la parti (*famiglie*) di cui si compone – se è spezzata – la varietà delle F birazionalmente identiche ad una data, hanno tutte la dimensione $19 + \theta$.

Si può dunque dire che:

Ogni superficie d'ordine $2\pi - 2$ *con curva canonica d'ordine zero, appartenente allo spazio* S_π (π *intero arbitrario* ≥ 3), *fa parte di una famiglia che contiene precisamente* 19 *moduli: la superficie generica di questa famiglia non ha punti doppi.*

Quest'ultima affermazione deriva da ciò, che altrimenti l'imposizione di 4 punti doppi equivarrebbe a meno di 4 condizioni.

(6) *Sui moduli delle superficie algebriche*, Rendiconti dei Lincei, (5) *17*1 (1908), pp. 690–694.

Osservazione. Il ragionamento stesso con cui si chiude il n° prec., applicato ad una $F_{2\pi-2}$ dello S_π, prova che ogni parte irriducibile della varietà formata dalle superficie $F_{2\pi-2}$ birazionalmente identiche alla data, è costituita da superficie omografiche. Ne segue che *nello* S_π, *le superficie d'ordine* $2\pi - 2$ *con curva canonica d'ordine zero, dipendono da* $\pi(\pi + 2) + 19$ *costanti.*

Ogni tale superficie appartiene ad una famiglia (irriducibile) generata da ∞^{19} *sistemi di superficie proiettivamente identiche.*

3. Proviamo adesso che *la superficie generica di una delle suddette famiglie, non può possedere curve razionali senza punti doppi* (cioè di grado virtuale -2).

Suppongasi il contrario, e sia n l'ordine di una Γ razionale senza punti doppi appartenente alla generica F. Distinguiamo due casi:

1) $n = 2m$ (m intero). Allora, se C denota una sezione iperpiana di F, il sistema

$$|D| = |C + m\Gamma|,$$

di genere $\pi + m^2$ e di grado $2\pi - 2 + 2m^2$, è irriducibile, perché non possiede Γ come parte fissa e perché, contenendo $|C|$, non può esser composto con un fascio. Per la stessa ragione $|D|$ è anche semplice; onde nello spazio $S_{\pi+m^2}$ si può costruire una superficie d'ordine $2\pi - 2 + 2m^2$, birazionalmente identica ad F, su cui il sistema corrispondente a $|D|$, venga segato dagl'iperpiani.

Alla curva Γ risponde un punto doppio conico della nuova superficie, e al variare di F nella propria famiglia, si ottiene così nello $S_{\pi+m^2}$ una famiglia di ∞^{19} superficie birazionalmente distinte, ciascuna con un punto doppio.

Si arriva in tal modo a contradire al teorema del n° 2.

2) $n = 2m + 1$. Si riduce al caso precedente, trasformando preventivamente la F mediante il sistema su essa segato dalle quadriche.

4. Passiamo ora alla ricerca della base sopra una superficie F a moduli generali.

A tal uopo ci converrà di richiamare alcune nozioni sopra certe superficie iperellittiche, che possono considerarsi come superficie di Kummer generalizzate [7].

Data una superficie di Jacobi K – imagine della varietà delle coppie di punti di una curva di genere 2 – entro al gruppo continuo ∞^2 di trasformazioni birazionali (di 2ª specie) che mutano in sé K, vi sono alcune trasformazioni (in numero finito) cicliche d'ordine δ arbitrario. Una di queste trasformazioni, genere su K una involuzione I_δ, priva di coincidenze, che ha per imagine una superficie iperellittica K_δ, di rango 1 e divisore δ.

(7) F. ENRIQUES–F. SEVERI, 1ª Nota citata, n. 5. Ved. pure il *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, nn. 50, 51.

La K_δ è mutata in sé da un gruppo continuo ∞^2 di trasformazioni di 2ª specie (corrispondenti alle analoghe di K) e da una serie ∞^2 di trasformazioni di 1ª specie (pure corrispondenti alle analoghe di K), ciascuna delle quali è involutoria. L'involuzione di 2° ordine generata su K_δ da una trasformazione di 1ª specie T, ha per imagine una superficie regolare (di rango 2 e divisore δ), della quale si può prendere come modello proiettivo, *nello spazio* $S_{2\delta+1}$, *una superficie* $\overline{F}$ *d'ordine* 4δ *con* 16 *punti doppi conici, a sezioni iperpiane di genere* $2\delta + 1$.

I punti doppi rispondono alle 16 coincidenze di T. Esistono poi su $\overline{F}$ 16 curve razionali normali d'ordine 2δ, che sono di contatto per altrettanti iperpiani.

I 16 punti doppi e le 16 curve razionali, formano una configurazione *simile* a quella dei 16 punti doppi e delle 16 coniche d'una superficie di Kummer ($\delta = 1$).

La F dipende da 3 moduli, che son quelli della curva di genere 2 da cui proviene. *Se questi moduli son generici, data su* $\overline{F}$ *una curva qualunque* $\overline{\Gamma}$, *esiste sempre una forma che tocca semplicemente* $\overline{F}$ *lungo* $\overline{\Gamma}$, *talchè* $2\overline{\Gamma}$ *sia la completa intersezione di* $\overline{F}$ *colla forma stessa.*

Questo teorema (noto per $\delta = 1$) è un'immediata conseguenza di una proprietà della superficie K_δ (8) o, se si vuole, del fatto che ogni curva tracciata su $\overline{F}$ può rappresentarsi uguagliando a zero una conveniente funzione Θ di divisore δ (9).

5. Ricorderò ancora una proprietà che ho avuto occasione di dimostrare in un lavoro d'imminente pubblicazione negli « Annales de l'Ecole normale supérieure de Paris » (10), che cioè sopra una superficie con curva canonica d'ordine zero, la divisione è un'operazione univoca. Questa proprietà dice in sostanza che *se due curve tracciate sopra una superficie con curva canonica d'ordine zero, hanno due equimultipli equivalenti, sono esse pure equivalenti.* La proprietà stessa si può anche enunciare dicendo che « se due curve A , B della superficie soddisfanno alle condizioni aritmetiche

$$[AA] = [AB] = [BB],$$

esse sono equivalenti ».

6. Richiamate queste nozioni, consideriamo nello spazio $S_{2\delta+1}$ la famiglia ∞^{19} di superficie F, birazionalmente distinte, cui appartiene una data superficie di Kummer generalizzata $\overline{F}$. La superficie generica $\overline{F}$ di questa famiglia, come sappiamo, non ha punti doppi (n° 2).

(8) F. ENRIQUES–F. SEVERI, 1ª Nota citata, n. 2; *Mémoire*, n. 27.

(9) *Mémoire*, n. 29.

(10) *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Ann. de l'École Norm., (3) *25* (1908), pp. 449–468 [Nota XL, p. 467; N.d.R.].

Facciamo tendere con continuità F ad $\overline{F}$. Una curva Γ tracciata sulla F, tende ad una curva $\overline{\Gamma}$ tracciata sulla particolare $\overline{F}$; non si può però escludere che la curva limite $\overline{\Gamma}$ sia costituita da una curva contata più volte o che contenga uno o più volte l'intorno di qualche punto doppio di $\overline{F}$.

Comunque sia, durante la variazione continua rimane immutato l'ordine m e il genere virtuale π della curva variabile. E poiché al limite il doppio di $\overline{\Gamma}$ ha lo stesso ordine e lo stesso genere virtuale che competono ad un certo multiplo di una sezione iperpiana di $\overline{F}$, indicando con k un conveniente intero, s'avrà:

$$m = 2k\delta\,, \qquad \pi = \frac{k^2\delta}{2} + 1.$$

Se ne trae che su F le curve $A = 2\Gamma$, $B = kC$, ove C designi una sezione iperpiana di F, soddisfanno alle condizioni aritmetiche

$$[AA] = [AB] = [BB] = 8(\pi - 1),$$

e quindi (n° 5) che

$$2\Gamma \equiv kC\,.$$

Anche sulla superficie F vale dunque la proprietà che il doppio d'ogni curva equivale ad un multiplo di una sezione iperpiana.

Se δ è impari, l'espressione di π mostra senz'altro che deve essere k pari $(= 2h)$, e quindi, in virtù della univocità della divisione su F, si trarrà

$$\Gamma \equiv hC\,.$$

In ogni caso, se fosse $k = 2h + 1$, si avrebbe

$$2(\Gamma - hC) \equiv C\,.$$

Questa mostra che la curva (eventualmente virtuale) $\Gamma - hC$, avendo l'ordine > 0, è non speciale [11]. Calcolando la dimensione virtuale r del sistema $|\Gamma - hC|$ si trova

$$r = \frac{1}{2}\delta + 1 > 0;$$

onde [12] esisterebbe il sistema $|\Gamma - hC|$, cioè $|C|$ sarebbe divisibile per 2. Per ragioni di continuità sarebbe allora divisibile per 2 anche il sistema delle sezioni iperpiane di $\overline{F}$. Tale conclusione è assurda, perché $\overline{F}$ avrebbe il divisore $< \delta$.

(11) F. SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2) *38* (1905), pp. 859–865 [Nota XXVIII, p. 325; N.d.R.].

(12) *Ibidem*, n. 6.

In ogni caso è dunque $\Gamma \equiv hC$.

Così abbiamo risoluto la questione della base per le superficie F, a moduli generali, appartenenti a spazi di dimensione impari.

7. Occupiamoci ora delle F, d'ordine $4\delta - 2$, che appartengono ad uno spazio $S_{2\delta}$ di dimensione pari.

Partendo da una famiglia come quella considerata nel n. prec., mediante l'imposizione di un punto doppio, s'ottiene una famiglia che contiene 18 moduli. Sopra una superficie di questa famiglia la base è evidentemente formata dalla curva razionale di grado -2, cui dà luogo il punto doppio, e da una sezione iperpiana.

Se quindi proiettiamo le superficie così ottenute, dai relativi punti doppi, sopra un $S_{2\delta}$ fissato, avremo ivi delle superficie d'ordine $4\delta - 2$, su ciascuna delle quali, $\overline{F}$, la base è formata da una conica $\overline{D}$ – proiezione dell'intorno del punto doppio – e da una sezione iperpiana. Come sappiamo (nn. 2, 3) queste superficie appartengono ad una famiglia più ampia dipendente da 19 moduli, la cui superficie generica F non possiede né punti doppi né curve razionali.

Quando F tende con continuità ad $\overline{F}$, non s'alterano i caratteri virtuali di due curve tracciate su F, né il numero dei loro punti comuni; e quindi il *determinante* [13] relativo alle due curve, conservasi costante. Le due curve al limite daranno pertanto due curve indipendenti o no, se tali erano inizialmente.

Ne deriva che *il numero-base ϱ di F non può decrescere quando F tende ad $\overline{F}$.*

D'altronde, se questo numero neppure crescesse, se cioè fosse sempre $\varrho = 2$, come su $\overline{F}$, una base di F si muterebbe in una base di $\overline{F}$. Ma in tale ipotesi, non si può affermare a priori che una base minima si muti in una base minima, perché potrebbe darsi che, quando F riducesi ad $\overline{F}$, qualche sistema inizialmente non divisibile (per interi) venisse ad ammettere dei sottomultipli. Si può dunque dire soltanto che ogni curva di $\overline{F}$, eventualmente contata più volte, è limite di una curva di F. Ciò vale in particolare per la conica $\overline{D}$.

Si perviene così alla conclusione che su F esiste una curva A di genere virtuale $1 - k^2$ (tale essendo il genere di $k\overline{D}$). Poiché una curva composta di due parti di genere > 0, ha pure il genere > 0, si vede che A non può esser composta che da curve di genere virtuale nullo (anzi da k curve razionali coincidenti di grado -2). Si giunge in tal modo a contraddire al teorema del n° 3.

Concludiamo pertanto che il numero-base di F dev'essere $\varrho = 1$.

(13) Vedi la mia Memoria, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Mathematische Annalen, *62* (1906), pp. 194–225; § 1 [Memoria XIX, p. 332; N.d.R.].

Una curva d'ordine minimo, formerà su F base minima [14]. Tale curva non potrà essere sottomultipla di una sezione iperpiana della superficie, perché altrimenti sarebbe divisibile per un intero anche il sistema delle sezioni iperpiane di $\overline{F}$ e quindi quello della superficie di $S_{2\delta+1}$, che dà per proiezione $\overline{F}$: ciò che è assurdo (fine del n° 6).

8. Riunendo i risultati dei nn. 6, 7, si ha il teorema:

Qualunque sia l'intero π (≥ 3), *nello spazio* S_π *esiste sempre una superficie d'ordine* $2\pi - 2$, *coi generi* 1, *priva di punti doppi, variabile in una famiglia dipendente da* 19 *moduli, la quale non contiene che curve intersezioni complete.*

Ne deriva come immediato corollario che:

Le infinite famiglie che s'ottengono al variare di π, *sono tra loro birazionalmente irriducibili.*

Si può dunque dire che *le superficie regolari aventi la curva canonica d'ordine* 0 (*cioè di generi* $p_a = P_2 = 1$), *dipendono da* 19 *moduli e da un intero: il minimo genere delle curve che loro appartengono.*

Questo risultato può ravvicinarsi a quello noto [15] per le superficie irregolari con curva canonica d'ordine zero:

Le superficie irregolari con curva canonica d'ordine zero (*cioè di generi* $p_g = P_4 = 1$, $p_a = -1$), *dipendono da* 3 *moduli e da un intero: il divisore* (*che è poi legato in modo semplice al minimo genere delle curve su esse tracciate*).

9. La formula di Picard, che lega il numero ϱ_0 degl'integrali doppi distinti di 2ª specie, al numero-base ϱ, nel caso di superficie regolari con curva canonica d'ordine zero, riducesi a

$$\varrho + \varrho_0 = 22.$$

Poiché in generale per le superficie F è $\varrho = 1$, così si conclude che: *Una superficie regolare* F, *a moduli generali, con* $p_a = P_2 = 1$, *possiede* 21 *integrali doppi distinti di* 2^a *specie.*

Partendo da una famiglia ∞^{19} di superficie $F_{4\delta}$ dello spazio $S_{2\delta+1}$ (come quella considerata al n° 6), mediante successive imposizioni di punti doppi, si viene ad aumentare il numero-base d'un'unità alla volta (senza introdurre curve eccezionali) così che quando si arriva alla superficie iperellittica con 16 punti doppi, il numero-base risulta $\varrho = 17$ [16].

(14) Nella mia Memoria citata sulla base minima, son giunto veramente alla conclusione che, quando $\varrho = 1$, non può escludersi che la base minima sia formata da una curva virtuale C. Qui però questo caso non può presentarsi, perché l'ordine e la dimensione virtuale di C risultano positivi.

(15) F. ENRIQUES–F. SEVERI, 1ª Nota citata, n. 2.

(16) Vedi la mia Memoria citata sulla base minima.

Se si legano i tre moduli della superficie iperellittica, mediante una, due, tre *relazioni singolari di Humbert*, il numero–base viene ad accrescersi ancora di un'unità alla volta [17].

Dunque *esistono superficie di generi* $p_a = P_2 = 1$, *il cui numero–base ha uno qualunque dei valori compresi tra* 1 *e* 20, *e quindi per cui il numero degl'integrali doppi di* 2^a *specie, ha uno qualunque dei valori da* 21 *a* 2.

Osserveremo per ultimo che il numero ϱ_0 è certamente non inferiore ad 1 ($p_g = 1$). È però assai probabile che l'esistenza d'un integrale doppio di 1^a specie, porti di conseguenza l'esistenza d'un integrale doppio di 2^a specie, *distinto* da esso, cosicché insomma $\varrho_0 = 2$ e quindi $\varrho = 20$, sieno rispettivamente il minimo e il massimo possibile pei numeri ϱ_0 e ϱ.

(17) Cfr. REMY, *Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce de certaines surfaces algébriques*, Comptes rendus, *147* (1908), pp. 1270–1272.

INDICE

PREFAZIONE . . . . . Pag. V

FRANCESCO SEVERI, Commemorazione di B. Segre . . . . . » VII

Elenco cronologico generale delle pubblicazioni di Francesco Severi . . . . . » XXI

I. Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe . . . . . » 1

II. Sopra le coniche che toccano e secano una o più curve gobbe . . » 1

III. I gruppi neutri con elementi multipli, in un'involuzione sopra un ente razionale . . . . . » 5

IV. Le coincidenze di una serie algebrica $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni . . . . » 6

V. Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio . . . . . » 12

VI. Intorno ai punti doppi improprî di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e ai suoi punti tripli apparenti . . » 14

VII. Sugli spazi plurisecanti d'una semplice infinità razionale di spazi » 31

VIII. Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive . . . . . » 33

IX. Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre . . . . . » 95

X. Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica . . . . . » 104

XI. Sulla forma delle rigate cubiche . . . . . » 118

XII. Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica . . . . . » 119

XIII. Su alcune questioni di postulazione . . . . . » 132

XIV. Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica . . . . . » 158

XV. Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie . . . . . » 173

XVI. Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica . . . . . » 224

XVII. Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso . . » 231

XVIII. Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . » 234

XIX. Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie . . . . . » 247

XX. Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie . . . . . » 252

XXI. Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard della 1ª e della 2ª specie appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . » 281

XXII. Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de Picard attachées à la surface . . . . . Pag. 288
XXIII. Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare . . . . . » 291
XXIV. Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques . . . . . » 294
XXV. Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche . . . . . » 296
XXVI. Sul teorema di Riemann–Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . » 317
XXVII. Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . » 325
XXVIII. Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche . . . . . » 331
XXIX. Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica . . . . . » 332
XXX. Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard . . . . . » 363
XXXI. Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà . . . . . » 390
XXXII. Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli . . » 404
XXXIII. Intorno alle superficie iperellittiche . . . . . » 410
XXXIV. Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche . . . . . » 421
XXXV. Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali . . . . » 429
XXXVI. Intorno alle superficie iperellittiche irregolari . . . . . » 437
XXXVII. Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale . . . . . » 443
XXXVIII. Appunti di geometria algebrica . . . . . » 450
XXXIX. Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica . . . . . » 456
XL. La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique . . . . . » 462
XLI. Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero . . . . » 478

237585

SCUOLA NORMALE SUPERIORE - PISA - BIBLIOTECA

FINITO DI STAMPARE NELLA
TIPOGRAFIA DELL'ACCADEMIA
NAZIONALE DEI LINCEI IN ROMA
NELL'OTTOBRE 1971

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Prezzo L. 25.000-